

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي



UNIVERSITE DE JIJEL
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Génie Mécanique

جامعة جيجل
كلية العلوم والتكنولوجيا
رقم الملف: M2.493

Projet de Fin d'Études

*Pour l'Obtention du Diplôme
De Master 2 en Génie Mécanique
Option : Mécanique des Matériaux et de Structure*

Thème

Analyse de contraintes de denture d'un engrenage droit

Les membres du jury :

KENOUNI Mohamed Président
BOUNNECHE Samir Examineur
BOUNIB Hamou Encadreur

Présenté par :

BENAYAD Youcef
DJABELKHEIR Saad

Promotion 2015

Université de Jijel

Remerciement

*Nous remercions d'abord **Dieu** tout puissant de nous avoir donné la force, le courage et la volonté pour arriver au bout de ce travail, ainsi que **nos parents** à qui nous vouons une reconnaissance infinie pour leurs soutiens et leurs patiences.*

Nous remercions chaleureusement tous ceux et celle qui ont collaboré, de près ou de loin, à la réalisation de ce projet.

*Nous avons spécialement apprécié le professionnalisme de nos encadreurs **Mr. BOUNIB H** et **Mr. KHEDIMALLAH A** qui se sont montrés attentifs et très disponibles tout au long de la réalisation de ce mémoire et grâce à leur aide précieuse et leurs conseils scientifiques on a pu accomplir ce modeste travail.*

*Sans oublié toute la **promotion 2015***



Dédicace

Je dédie ce Modeste travail,

*avant tout à les deux personnes les plus chères au
monde ma chère mère et mon père qui ont sacrifié
leur vie pour
ma réussite, et pour leurs encouragements. Que dieu
les gardes éternellement heureux.*

A toute ma famille

*A tous mes
amis et mes collègues, et à tous ceux qui
m'ont aidé pour réaliser ce mémoire.*

Benayad youcef



Dédicace

*Je dédie ce Modeste travail,
à mes chères parents que dieu les garde et le protège*

A toute ma famille ;

mes frères et toutes mes sœurs ;

mes amis et mes collègues de la protection civile

A toute la promotion 2015

Djabelkheir Saad



Sommaire

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre I : Généralités sur les engrenages cylindriques à denture droite

Introduction :	3
I.1. Classification des engrenages	3
I.2. dispositions des axes de l'engrenage	3
I.3. Forme extérieure des roues	3
I.4. Types de dentures	3
I.5. Définitions	4
I.5.1. Engrenage	4
I.5.2. Pignon	4
I.5.3. Roue conjuguée.....	4
I.5.3.1. Roue menant	4
I.5.3.2. Roue menée.....	4
I.5.4. Denture.....	4
I.5.4.1. La dent	4
I.5.4.2. Entre-dents	4
I.5.4.3. Surface de tête.....	4
I.5.4.4. Surface de pied.....	4
I.5.4.5. Denture extérieure.....	4
I.5.4.6. Denture intérieure	4
I.6. Les engrenages cylindriques à denture droit.....	5
I.6.1. Profils conjugués	5
I.6.1.1. Définition	5
I.6.1.2. Détermination de profil par la méthode des enveloppes.....	5
I.6.2. Denture en développante de cercle	6
I.6.2.1. Définition	6
I.6.2.2. Equation polaire de la développante de cercle.....	8
I.6.3. Calcul des épaisseurs de la dente	10
I.6.3.1. Epaisseur de denture SM	10
I.6.3.2. Epaisseur de tête Sa	10
I.6.3.3. Epaisseur de base Sb	10
I.7. Généralités sur les interférences des dentures cylindriques.....	10

I.7.1. L'interférence avec le profil de raccordement.....	13
I.7.2. Conditions à respecter pour éviter l'interférence.....	13
I.7.2.1. Condition 1	13
I.7.2.2. Condition 2	14
I.8. Caractéristique des dentures	15
I.8.1. Crémaillère génératrice normalisée	15
I.8.2. Denture normalisée	16
I.8.3. Denture normale	16
I.8.4. Le module m	16
I.8.5. Diamètres primitifs (d)	16
I.8.6. Diamètre de tête (d_a).....	16
I.8.7. Diamètre de pied (d_f).....	16
I.8.8. Pas circonférentiel (P).....	17
I.8.9. Largeur de denture (b)	17
I.8.10. Hauteur des dents (h)	17
I.8.11. La saillie (h_a)	17
I.8.12. Le creux (h_f)	17
I.8.13. Expression de l'entraxe (a)	17

Chapitre II : Méthodes de calcul de résistance d'un engrenage à denture droite

Introduction.....	20
II.1. Les méthodes de calcul de résistance	20
II.1.1. La méthode de Lewis.....	20
II.1.2. La méthode AGMA.....	22
II.1.3. La Méthode ISO	23

Chapitre III : Analyse statique comparative : Modèles Eléments finis-Méthodes semi-empiriques des contraintes sur la denture droite d'un pignon

Introduction.....	29
III.1. Paramètres d'engrenage, dimensions du pignon, matériau	29
III.2. Conception du pignon par CATIA v5.....	30
III.2.1. Dessin de développante de cercle	30

III.2.2. Dessin de la dent	32
III.2.3. Choix du matériau.....	34
III.3. Analyse statique du pignon par les EF	34
III.3.1. Modèles	34
III.3.2. Maillage.....	35
III.3.3. Conditions aux limites	35
III.3.4. Charge appliquée.....	36
III.4. Résultats de l'analyse par EF des deux modèles.....	36
III.5. Calcul des contraintes par méthodes semi-empiriques	38
III.5.1. Méthode de Lewis	39
III.5.2. Méthode ISO	39
III.5.3. Méthode AGMA	39
III.6. Comparaison des résultats.....	39

Chapitre III :Contraintes superficielles : comparaison entre modèle E.F et modèle analytique

Introduction.....	42
IV.1. L'application de la théorie d'Hertz.....	42
IV.2. Contrainte de contact (Hertz).....	42
IV.3. Pression d'Hertz nominale de l'engrenage	43
IV.4. Pression d'Hertz de base (Pression nominale).....	45
IV.5 Pression de contact (pression nominale) : Modèle EF.....	47
Conclusion général.....	48
Annexes.....	49

Figures

Figure 1.1 : Engrenage cylindrique à denture droite.....	5
Figure 1.2 – Méthode des enveloppes.....	6
Figure 1.3 : Denture droite en développante de cercle.....	7
Figure 1.4 : Développante de cercle.....	8
Figure 1.5 : Equation polaire de la développante.....	8
Figure 1.6 : Définition de l'involute.....	9
Figure 1.7 : Calcul des épaisseurs.....	10
Figure 1.8 : interférence théorique.....	11
Figure 1.9 : Interférence de taillage avec outil pignon.....	12
Figure 1.10 : taillage avec outil crémaillère et forte interférence.	12
Figure 1.11 : Profil de raccordement de pied.....	13
Figure 1.12 Interférence de taillage par outil pignon.....	14
Figure 1.13 : Interférence de taillage par outil crémaillère.....	14
Figure 1.14 : caractéristiques géométriques de la denture.....	15
Figure 1.15 : la crémaillère génératrice normalisée.....	16
Figure 1.16 : valeur de module m en mm par rapport au diamètre et nombre de dente.....	16
Figure 1.17 : définition de l'entraxe a.....	17
Figure 2.1 : Méthode de Lewis.....	21
Figure 2.2 : Hypothèse simplificatrice ISO.....	24
Figure 2.3 : Dent de crémaillère génératrice.....	24
Figure 2.4 : détermination de l'angle γ	25
Figure 3 : Équations de la développante.....	30
Figure 3.1 Données paramétriques de développante de cercle.....	31
Figure 3.2 Command\GSD_PointSplineLoftFromExcel.....	32
Figure 3.3 Développante de cercle sur Catia V5.....	32
Figure 3.4 : l'esquisse finale avant l'extrusion.....	33

Figure 3.5 Pignon a denture cylindrique droite.....	33
Figure 3.6 Modèle 3 dents (3D)	34
Figure 3.7 Modèle pignon (3D).....	34
Figure 3.8 : Taille de maillage.....	35
Figure 3.9 Application des conditions aux limites.....	35
Figure 3.10a : Model 3dents (3D), Contrainte équivalent de Von Mises	37
Figure 3.10b : Modèle 3dents (3D), répartition des déplacements.....	37
Figure 3.11 a : Modèle pignon (3D), répartition de contraintes de Von Mises.....	38
Figure 3.11b : Modèle pignon (3D), répartition des déplacements.....	38
Figure 4.1 Contrainte de contact entre deux cylindres.....	43
Figure 4.2 pression d'hertz.....	43
Figure 4.3 Engrenage parallèle extérieur à denture droite.....	44
Figure 4.4 Valeur nominale des contraintes de contact.....	47

Tableaux

Tableau 1.1 : Caractéristique de la denture	18
Tableau 3.1 : Paramètres et dimensions du pignon.....	29
Tableau 3.2 : Caractéristique de matériau	33
Tableau 3.3 : contraintes de Von Mises et des déplacements pour les deux modèles.....	36
Tableau 3.4 : Différences entre la méthode des EF et les méthodes analytiques	39
Tableau 4.1 Valeurs des facteurs intervenant dans la formule de calcul de σ_{H0}	44

Introduction générale

Les engrenages, par leur diversité, sont reconnus comme des éléments de transmission de l'automobile, l'aviation, la marine et autres.

Les engrenages sont sujet à divers endommagements qui réduisent leurs durées de vie, en particulier la fatigue en flexion causée par les contraintes de traction au pied des dents.

Ces contraintes de traction aux pieds des dents résultent, principalement, des couples transmis et conduisent à l'initiation de fissures qui, avec le temps, se propagent et mettent plusieurs dents hors usage suite aux nouvelles répartitions de charges induites.

Les pieds des dents sont des zones de concentrations de contraintes. La concentration de contrainte est en lien directe avec le type de raccordement du profil de la dent au cercle de pied.

Le calcul de résistance d'un engrenage a fait l'objet de plusieurs recherches, mais il reste que les deux organismes reconnus dans le domaine par leurs normes sont ISO et AGMA.

ISO et AGMA basent leurs méthodes de calcul sur la méthode de Lewis, méthode RDM, reconnue moins efficace du fait qu'elle ne prend pas en considération la concentration de contrainte au pied de la dent. Pour pallier aux problèmes, ISO et AGMA introduisent des facteurs, dans le calcul de la contrainte nominale et la contrainte maximale que le concepteur doit être vigilant et connaisseur dans le domaine lors de leurs applications.

L'analyse par Eléments finis par des codes de calcul sophistiqués est en percée continue. Cette analyse fidèle est la solution complète aux problèmes de mécanique de solides quel que soient leurs complexités. Le présent travail consiste à déterminer, la contrainte nominale au pied de la dent et la contrainte nominale de contact d'un pignon à denture droite par une analyse EF, suivant le code Catia v5. Les résultats de l'analyse sont comparés aux résultats déterminés par les méthodes ISO et AGMA.

Le premier chapitre donne des généralités sur les engrenages, en particulier, le profil en développante de cercle d'une denture droite et le phénomène d'interférences. Le deuxième chapitre est consacré aux méthodes de calcul de résistance des engrenages présentées par ISO et AGMA. Le troisième chapitre présente l'analyse par EF du pignon, par le code Catia v5, et la comparaison des résultats à ceux déterminés par les méthodes ISO et AGMA. Le quatrième chapitre traite le calcul de contrainte nominale de contact par la méthode analytique et la comparaison du résultat à celui du modèle EF.

Chapitre I : Généralités sur les engrenages cylindriques à denture droite

Introduction :

Le principe de transmission de puissance et d'entraînement par obstacle, dénommé aussi engrènement, est connu depuis plus de 2000 ans. Il est caractérisé par l'utilisation des pièces munies de dents qui s'impliquent les unes dans les autres.

Les engrenages sont des organes de transmission mécanique de puissance utilisant le principe d'engrènement. Ils servent à transmettre le mouvement de rotation entre deux arbres rapprochés dont le rapport de vitesses angulaires doit rester constant.

- Actuellement, l'engrenage reste le moyen le plus utilisé dans l'industrie de transmission de puissance. Il est présent dans toutes les applications emblématiques de la mécanique : l'aéronautique, les automobiles, les machines-outils... etc.
- On peut distinguer plusieurs types d'engrenages selon la géométrie de la denture. Parmi ces types il existe les engrenages cylindriques à denture droite dont nous limiterons notre étude.

I.1. Classification des engrenages : [1,2]

Les engrenages sont classés en différentes catégories caractérisées par :

- les positions relatives des deux axes.
- la forme extérieure des roues.
- le type des dentures.

I.2. dispositions des axes de l'engrenage :

- Arbres parallèles : engrenages cylindriques à dentures droites ou hélicoïdales.
- Arbres concourants : engrenages conique à dentures droites, hélicoïdales.
- Arbres orthogonaux : engrenages à roue et vis sans fin.
- Arbres quelconque : engrenages hypoïdes et spiroïdaux.
- Les engrenages à axes parallèle sont les plus utilisés en raison de leur simplicité et de leur facilité de réalisation et de contrôle.

I.3. Forme extérieure des roues :

- Cylindriques
- Conique
- Toriques

I.4. Types de dentures :

La denture peut être :

- Droite
- Hélicoïdale (simple ou double. a chevron ou en spirale)

I.5. Définitions :**I.5.1. Engrenage :**

Mécanisme élémentaire constitué de deux organes dentés, mobiles autour d'axe de position relative invariable, et dont l'un entraîne l'autre par l'action des dents successivement en contact.

I.5.2. Pignon :

Dénomination applicable, dans un engrenage à la roue ayant le plus petit nombre de dents, pour la distinguer de l'autre roue (dénommée simplement en ce cas roue conjuguée ou plus simplement roue).

I.5.3. Roue conjuguée :

Les deux roues d'un engrenage, chacune des deux roues est dite conjuguée à l'autre.

I.5.3.1. Roue menant :

Celle des deux roues d'un engrenage qui entraîne l'autre.

I.5.3.2. Roue menée :

Celle des deux roues d'un engrenage entraînée par l'autre.

I.5.4. Denture :**I.5.4.1. La dent :**

- Dans une roue, chacun des éléments en saillie devant assurer par contact avec les dents d'une autre roue, l'entraînement de l'une des roues par rapport à l'autre.
- Toutes les dents d'une même roue sont identiques géométriquement, superposables par rotation autour de l'axe de la roue.
- L'ensemble des dents d'une roue est appelé « **denture** ».

I.5.4.2. Entre-dents :

Espace séparant deux dents voisines d'une roue (ou deux filets voisins d'une vis à plusieurs filets ou deux spires consécutives d'une vis à un seul filet).

I.5.4.3. Surface de tête :

Surface de révolution limitant la denture du côté du sommet des dents.

I.5.4.4. Surface de pied :

Surface de révolution limitant la denture du côté du fond des entre-dents.

I.5.4.5. Denture extérieure :

Denture dont la surface de tête est à l'extérieur de la surface de pied.

I.5.4.6. Denture intérieure :

Denture dont la surface de tête est à l'intérieur de la surface de pied.

I.6. Les engrenages cylindriques à denture droite :

Les directions des dents sont parallèles à l'axe des roues. (Figure 1.1).

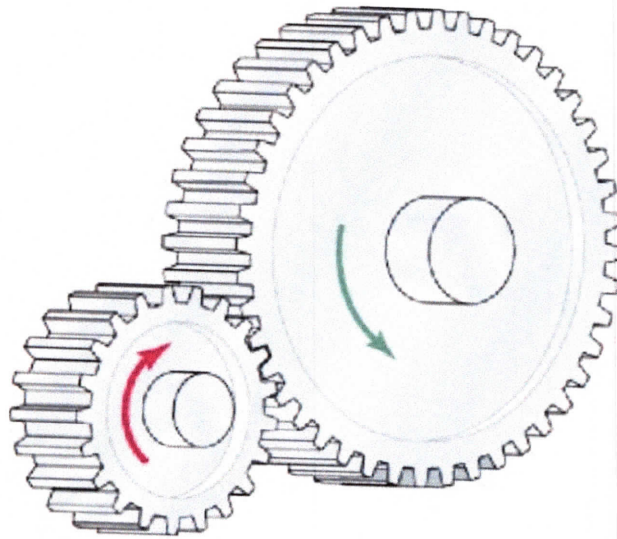


Figure 1.1 : Engrenage cylindrique à denture droite.

I.6.1. Profils conjugués : [3]

I.6.1.1. Définition :

Les intersections des surfaces des dentures d'une roue cylindrique, avec un plan Perpendiculaire à l'axe de rotation de la roue, sont appelées profils. Il est évident que pendant tout le temps où deux surfaces de denture en contact assurent la transmission, ces deux surfaces doivent rester tangentes.

Dire que les surfaces de denture doivent être constamment tangentes, cela revient à dire que l'infinité de couples de profils correspondants, obtenus en coupant les surfaces de denture par différents plans perpendiculaire aux axes, doivent rester constamment tangents.

On dit alors que les profils sont conjugués.

I.6.1.2. Détermination de profil par la méthode des enveloppes :

La méthode des enveloppes est immédiate (figure 1.2). Supposons connus les cylindres primitifs des deux roues d'un engrenage, calculés de façon que le rapport des vitesses angulaires des deux axes $X_1 X_2$ soit une valeur donnée.

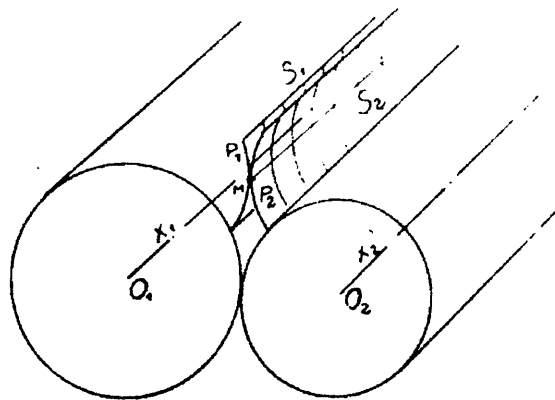


Figure 1.2 – Méthode des enveloppes

Si nous faisons rouler sans glisser les deux cylindres l'un sur l'autre, la surface S_2 enveloppe de la surface S_1 et liée au cylindre primitif d'axe X_2 est bien la surface conjuguée de S_1 .

Les profils P_1 et P_2 sont des profils conjugués, leur point de contact à l'instant considéré est M . l'infinité de couples de profils conjugués obtenue en coupant S_1 et S_2 par différents plans perpendiculaire à X_1 et X_2 ont chacun leur point de contact ; si nous joignant tous ces points de contact, nous obtenons la ligne de contact des surface conjuguées S_1 et S_2 à l'instant considéré. Le contact est dit linéaire.

Considérons maintenant une surface S'_1 tangente à la surface S_1 précédente suivant une ligne L' . Il est évident que si nous remplaçons les surfaces conjuguées S_1 et S_2 définies précédemment par le couple composé par S'_1 et S_2 , les contacts successifs s'effectueront suivant les points d'intersection de L' et des lignes de contact successives L .

Le contact est dit ponctuel dans ce cas. Indiquons tout de suite que les engrenages à contact ponctuel sont pratiquement les plus utilisés.

I.6.2. Denture en développante de cercle :

I.6.2.1. Définition :

Considérons un cylindre d'axe X_1 de section C_1 par un plan perpendiculaire à axe (Figure 1.3).

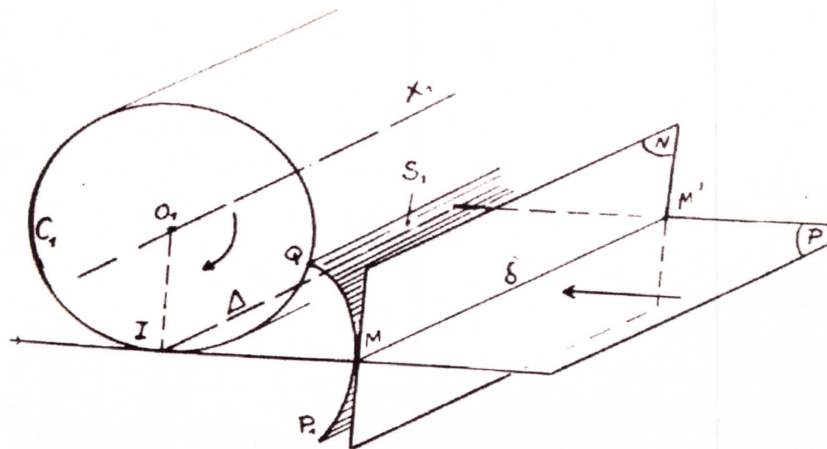


Figure 1.3 : Denture droite en développante de cercle.

Soit P un plan qui lui est tangent suivant la génératrice Δ . Un plan N perpendiculaire à P et parallèle à X_1 , est lié invariablement à P.

Faisons rouler sans glisser le plan P sur le cylindre ; le plan N enveloppe une surface S_1 par rapport au cylindre.

Le plan P qui est normal à N le long de la droite MM' , l'est également par rapport à la surface S_1 suivant cette droite MM' (l'axe instantané du mouvement étant la génératrice Δ). La surface S_1 peut donc être considérée comme engendrée par la droite MM' du plan P lorsque celui-ci roule sans glisser sur le cylindre, cette surface est donc une surface cylindrique. Sa courbe directrice qui ayant le profil P_1 résultante de l'intersection avec un plan perpendiculaire à l'axe, possède les propriétés suivantes :

- c'est la trajectoire d'un point M d'une tangente à un cercle qui roule sans glisser sur ce cercle : c'est un arc de développante du cercle considéré.

Par définition, nous pouvons écrire : (figure 1.4)

$$IM = \widehat{IQ}$$

$$I_1M_1 = \widehat{I_1Q}$$

- le point Q est le point de rebroussement de la développante, en effet, après avoir décrit l'arc P,
- Le point M décrit l'arc symétrique de P par rapport au rayon OQ.
- La normale à la développante en un point quelconque au cercle développé C.
- Le rayon de courbure de la développante en un point M est la portion de la normale compris entre ce point et le point I de tangence avec le cercle développé : en l'autre

$inv\alpha$: involute α .

En un point M quelconque, de rayon r_M , l'angle de la développante avec le rayon OM est l'angle d'incidence α_m défini par :

$$\cos \alpha_m = \frac{r_b}{r_m}$$

$$T_m M = T_m Q = r_b \operatorname{tg} \alpha_m$$

$$\widehat{QW} = \widehat{T_m Q} - \widehat{T_m W}$$

$$r_b \widehat{QOM} = r_b \operatorname{tg} \alpha_m - r_b \alpha_m$$

$$\widehat{QOM} = \operatorname{tg} \alpha_m - \alpha_m = \operatorname{involute}(\alpha_m) = \operatorname{inv}(\alpha_m)$$

Remarque : dans cette expression $\operatorname{inv}(\alpha_m)$ et α_m sont exprimés en radians.

Au point primitif I : $\operatorname{inv}(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) - \alpha$

Au point de tête a : $\operatorname{inv}(\alpha_a) = \operatorname{tg}(\alpha_a) - \alpha_a$

La longueur de l'arc de développante t compris entre le centre de base et un point M quelconque est : $t = \frac{r_b \times \operatorname{tg}^2(\alpha_M)}{2}$

- Définition de la fonction involute : [4]

L'étude des engrenages à développante de cercle nécessite l'utilisation d'une nouvelle fonction : la fonction involute. (Figure 1.6)

Les propriétés de la développante de cercle précisent que la longueur de l'arc de cercle A (priseur le cercle de base) est égale à la longueur du segment MH.

$$\widehat{AH} = MH$$

$$r_b \cdot (\theta_M + \alpha_M) = r_b \cdot \tan(\alpha_M)$$

$$\theta_M + \alpha_M = \tan(\alpha_M)$$

$$\theta_M = \tan(\alpha_M) - \alpha_M$$

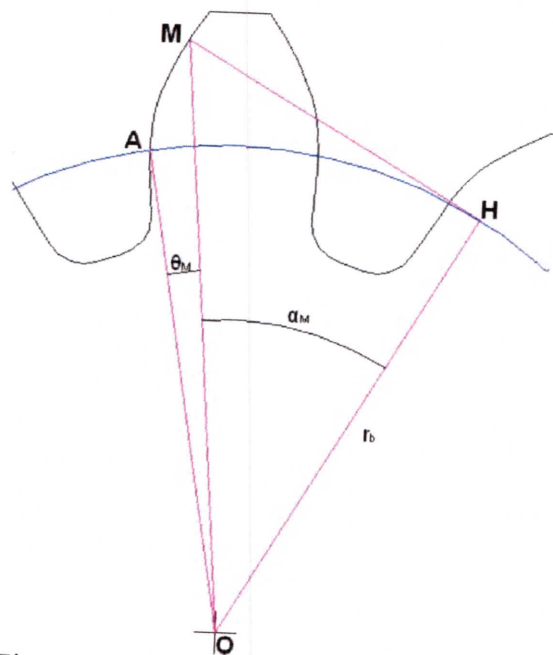


Figure 1.6 : Définition de l'involute

L'angle particulier θ_M est l'involute de l'angle complémentaire α_M :

$$\theta_M = \text{inv}(\alpha_M) = \tan(\alpha_M) - \alpha_M$$

I.6.3. Calcul des épaisseurs de la dent :

I.6.3.1. Epaisseur de denture S_M :

Connaissant par exemple l'épaisseur S sur un cercle primitif, déterminer l'épaisseur S_M sur un cercle de rayon quelconque r_M : (Figure 1.7)

$$r_b = r \cdot \cos \alpha = r_M \cos \alpha_M$$

$$\cos \alpha_M = \cos \alpha \left(\frac{r}{r_M} \right)$$

$$S_M = r_M \left[\frac{S}{r} + 2(\text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_M) \right]$$

I.6.3.2. Epaisseur de tête S_a :

Considérer $r_M = r_a$:

$$\cos \alpha_a = \cos \alpha \frac{r}{r_a}$$

$$S_a = r_a \left[\frac{S}{r} + 2(\text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_a) \right]$$

I.6.3.3. Epaisseur de base S_b :

On considère que l'angle d'incidence sur le cercle de base est nul :

$$S_b = r_b \left[\frac{S}{r} + 2\text{inv} \alpha \right]$$

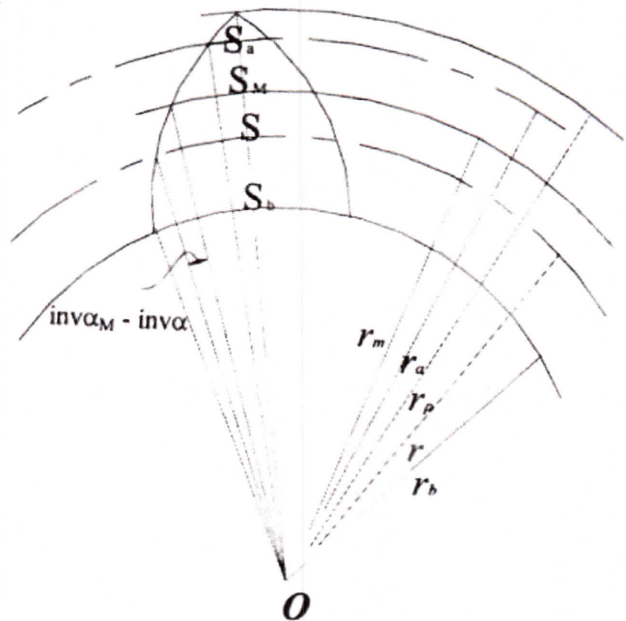


Figure 1.7 : Calcul des épaisseurs

I.7. Généralités sur les interférences des dentures cylindriques : [2]

Pour engrener correctement, deux profils en contact doivent rester constamment tangents et dans le cas des dentures à développante de cercle, le lieu des points de contact successifs est une droite tangente aux cercles de base. S'il en est autrement, on dit qu'il se produit le Phénomène d'interférence.

Pour mettre en évidence les phénomènes d'interférence (figure 1.8), nous allons considérer

L'engrènement de deux profils conjugués P_1 et P_2 que nous supposons complets, c'est-à-dire allant jusqu'à leur cercle de base respectif.

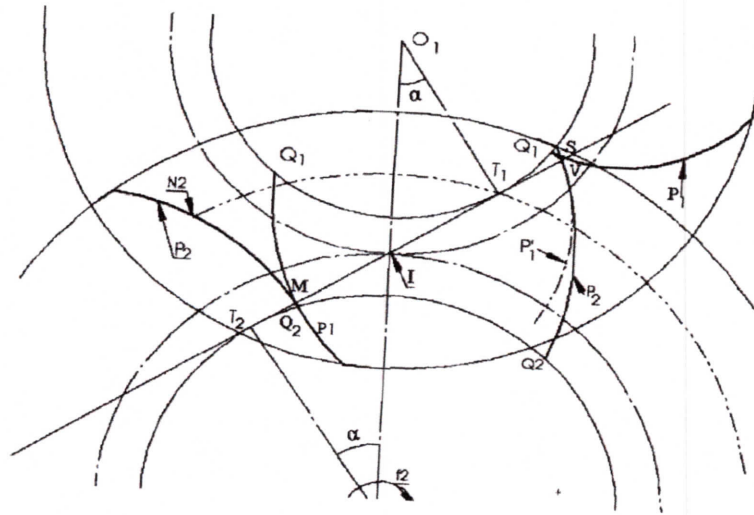


Figure 1.8 : interférence théorique.

A un instant donné, les deux profils sont en contact au point M, situé sur la ligne d'action.

L'engrènement se poursuivant, le point d'action se déplace pour arriver au point particulier T_1 ,

Le contact s'effectue alors suivant les points N_2 de P_2 et Q_1 de P_1 qui sont venus se confondre en T_1 . Poursuivons maintenant l'étude de l'engrènement au-delà du point T_1 . Au point V de la ligne d'action, le centre de courbure de P_2 est le point T_2 où la ligne d'action est tangente au cercle de base de P_2 . Le profil conjugué de P_2 , soit P'_1 , a son centre de courbure en T_1 , point de tangence de la ligne d'action (normale commune à P_2 et P'_1 en V), avec le cercle de base correspondant. Le profil P'_1 a donc une courbure dirigée dans le même sens que P_2 ; ce n'est autre que la branche fictive de P_1 , les deux profils P_1 et P'_1 étant symétriques par rapport au rayon O_1Q' . Comme le montre la figure, le point Q_1 se trouve donc à l'intérieur du profil P_2 .

Celui-ci coupe alors la branche réelle de développante P_1 (au point S) : c'est ce qu'on appelle l'interférence théorique.

S'il y'a un jeu entre dents important, la transmission n'est certes pas arrêtée, mais le contact s'effectue dans de très mauvaises conditions, donnant lieu à des variations de vitesse angulaire, à des vibrations intenses et à une usure très rapide. Si, par contre, le jeu entre dents est nul ou faible, il se produit le coincement.

Pour éviter l'interférence théorique, nous voyons que la saillie maximale admissible pour la roue O_2 a comme valeur v_2 (telle que le point de tête passe par le point T_1 , point d'interférence).

Nous allons maintenant remplacer le pignon O_1 par un outil pignon O_0 comme montré sur la

Figure 1.9

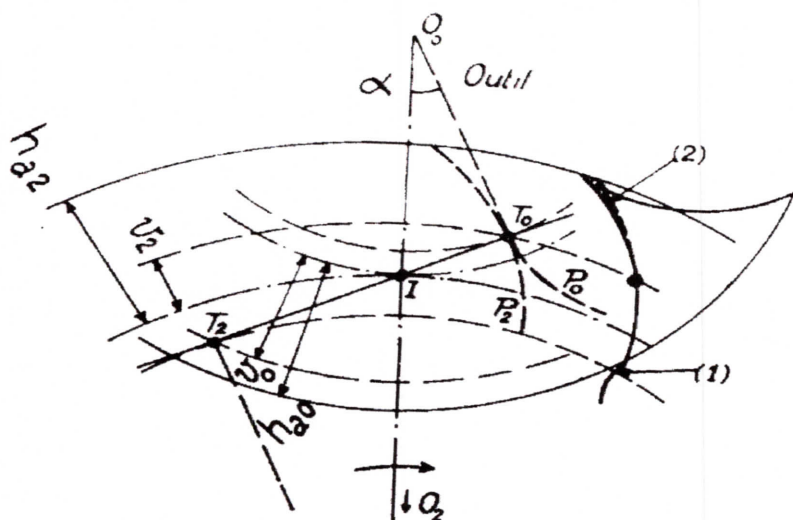


Figure 1.9 : Interférence de taillage avec outil pignon

Nous voyons que la saillie h_{a2} , de la roue taillée dépasse la valeur maximum admissible V_2 : l'interférence se traduit alors par une dépouille de toute la partie (2) du sommet des dents de la roue. D'un autre côté, comme la saillie h_{a0} de l'outil est plus grand que la saillie maximale admissible V_0 , l'interférence produite provoque un dégagement prononcé du pied des dents de la roue.

Il est facile de voir que les risques d'interférence augmentent lorsque le nombre de dents de la roue augmente (la crémaillère est le cas le plus défavorable) et le nombre de dents du pignon diminue, ou lorsque l'angle de pression diminue.

Par exemple l'interférence très prononcée qui se produit lors du taillage d'un pignon de petit nombre de dents avec une crémaillère et un faible angle de pression. (Figure 1.10).

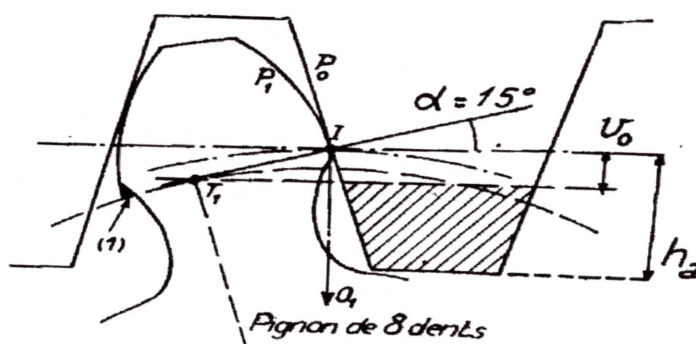


Figure 1.10 : taillage avec outil crémaillère et forte interférence.

I.7.1. L'interférence avec le profil de raccordement :

La figure (1.11) suivante représente les trois (3) formes possibles de profil de raccordement de pied.

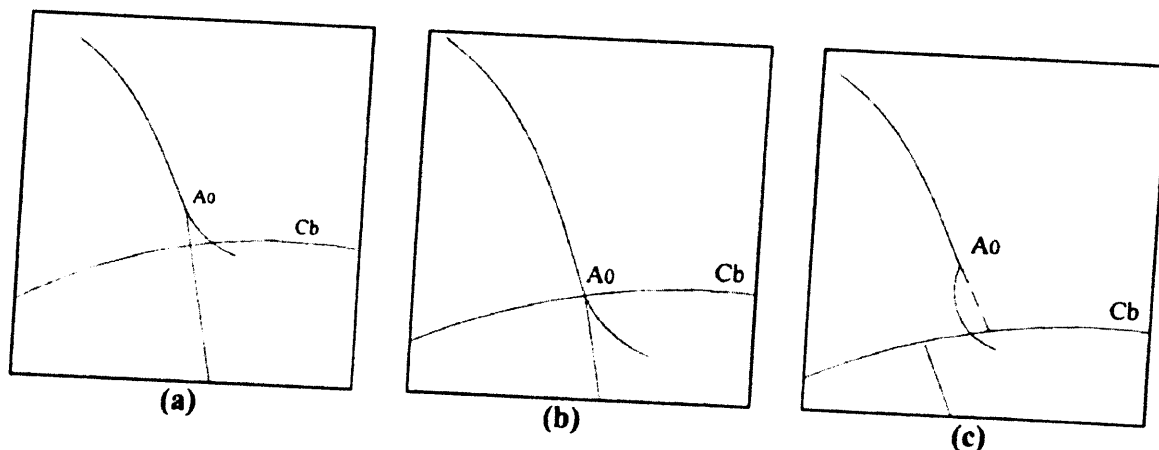


Figure 1.11 : Profil de raccordement de pied.

Selon la Figure on constate :

- L'absence d'interférence de taillage ou le profil de développante s'arrête au point A_0 extérieur au cercle de base (Figure 1.11a).
- A la limite de l'interférence de taillage, le profil en développante va jusqu'à son cercle de base (Figure 1.11b).
- Lorsqu'il y a interférence de taillage, la dent se trouve dégagée au pied dont un angle vif situé à l'extérieur du cercle de base marque la limite du profil en développante (Figure 1.11c).

I.7.2. Conditions à respecter pour éviter l'interférence : [4]

I.7.2.1. Condition 1 : (Figure 1.12)

$$m_0 < IH_1 ; (m_0 \text{ ou } m)$$

$$m_0 < IT_1 \cdot \sin \alpha_0$$

$$m_0 < (O_1 l \cdot \sin \alpha_0) \cdot \sin \alpha_0$$

$$m_0 < O_1 l \cdot \sin^2 \alpha_0$$

$$m_0 < O_1 l \cdot \sin^2 \alpha_0$$

$$m_0 < \frac{d_1}{2} \sin^2 \alpha_0 \quad m_0 < \frac{m_0 \cdot Z_1}{2} \sin^2 \alpha_0$$

$$Z_1 > \frac{2}{\sin^2 \alpha_0}$$

Pour $\alpha_0 = 20^\circ$ (Valeur standard), la limite est $Z = 17$ dents.

Il n'y aura jamais d'interférence de taillage, lorsque le pignon taillé aura un nombre de dents supérieur à 17 pour un angle de pression de taillage de 20° .

I.7.2.2. Condition 2 :

(Figure 1.13).

$$\frac{d_{a2}}{2} < O_2T_1$$

Avec :

$$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot m_0;$$

$$O_2T_1 = \sqrt{O_2T_2^2 + T_2T_1^2}$$

$$O_2T_2 = \frac{m_0 Z_2}{2} \cdot \cos \alpha_0$$

$$T_2T_1 = O_2O_1 \cdot \sin \alpha_0$$

$$T_2T_1 = \frac{m_0 \cdot (Z_1 + Z_2)}{2} \cdot \sin \alpha_0$$

Au final :

$$\frac{d_{a2}}{2} < \frac{m_0}{2} \cdot \sqrt{Z_1^2 \cdot \sin^2 \alpha_0 + 2 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot \sin^2 \alpha_0 + Z_2^2}$$

Equation du 2^{ème} degré en Z_1 , dont les racines sont :

$$Z_1 > -Z_2 + \sqrt{Z_2^2 + 4 \cdot \frac{Z_2 + 1}{\sin^2 \alpha_0}}$$

Il n'y aura jamais d'interférence théorique de taillage entre le pignon 1 et l'outil pignon 2

($Z_{2\text{mini}} = 17$ dents) si $Z_1 > 13$ dents.

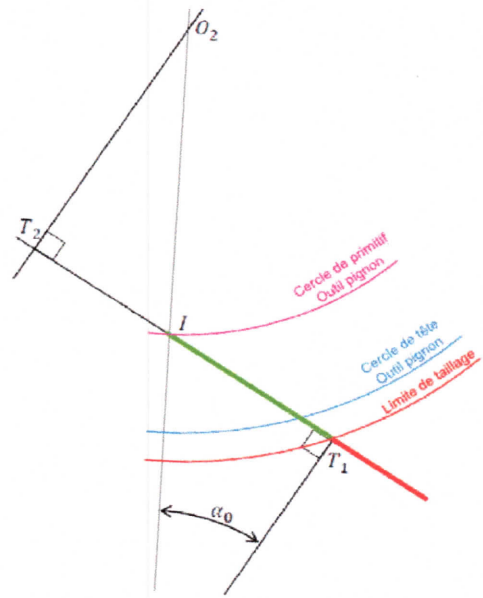


Figure 1.12 : Interférence de taillage par outil pignon

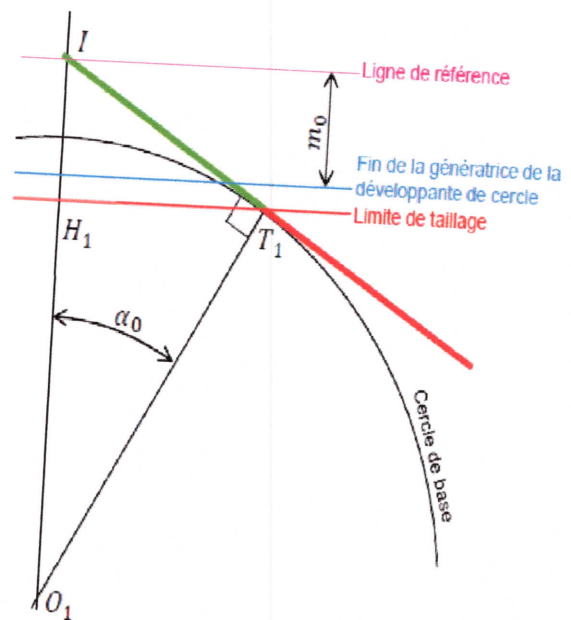


Figure 1.13 : Interférence de taillage par outil crémaillère

I.8. Caractéristique des dentures : [2]

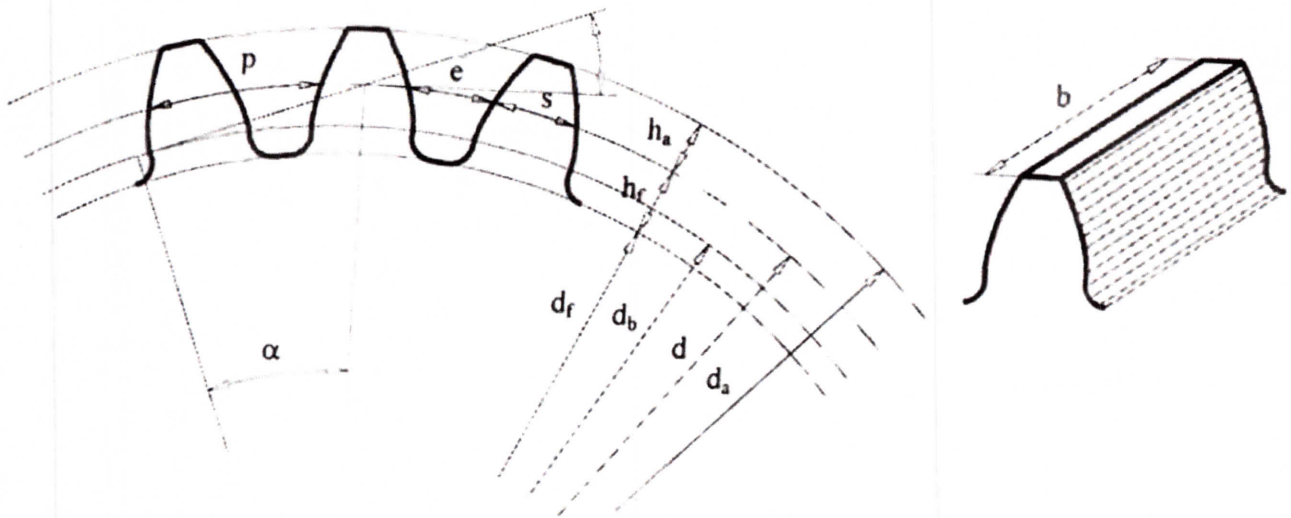


Figure 1.14 : caractéristiques géométriques de la denture

I.8.1. Crémaillère génératrice normalisée :

Les éléments géométrique de la crémaillère génératrice normalisée définis par (figure 1.15)

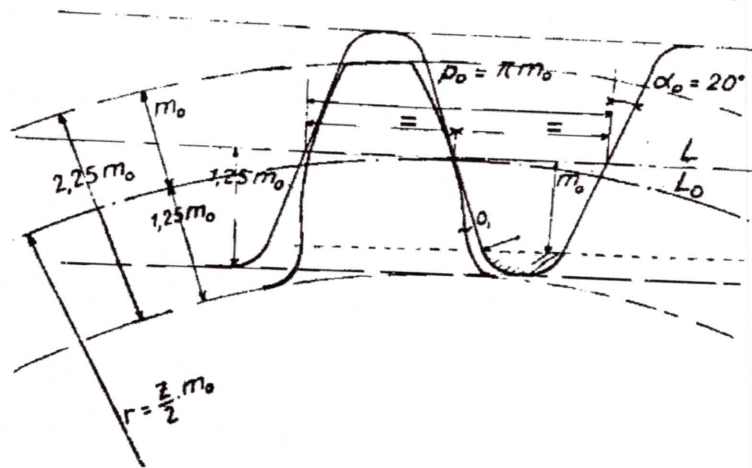


Figure 1.15 : la crémaillère génératrice normalisée

Sur la ligne de référence L_0 nous avons :

- m_0 : Module de la crémaillère génératrice et l'angle de pression $\alpha_0 = 20^\circ$
- saillie = $1.25 \cdot m_0$
- Arrondi au sommet : il commence à une distance de la ligne de référence égale au module, une valeur du rayon de (0.38 module).

I.8.2. denture normalisée :

Une denture sera dite normalisée si elle peut être engendrée à partir de la crémaillère génératrice normalisée.

I.8.3. denture normale :

Une denture normale est une denture normalisée pendant la génération de laquelle la ligne primitive de taillage L de la crémaillère génératrice est confondue avec la ligne de référence L_0 .

I.8.4. Le module m :

Le module d'une denture est la valeur qui permet de définir les caractéristiques d'une roue dentée. C'est le rapport entre le diamètre primitif de la roue et le nombre de ses dents. Le module est une grandeur normalisée. (Figure 1.16).

Remarque :

L'épaisseur de la dent et sa résistance dépendent du choix du module. Ce choix ne doit pas être improvisé mais doit se faire après un calcul de RDM.

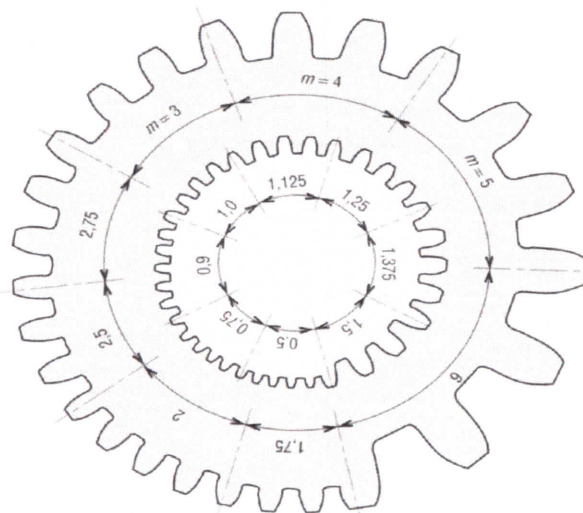


Figure 1.16 : valeur de module m en mm par rapport au diamètre et nombre de dents.

I.8.5. Diamètres primitifs (d) :

Ce sont les diamètres des roues de friction, équivalentes à l'engrenage, qui donnent le même rapport de réduction ou de multiplication de vitesse pour le même entraxe.

I.8.6. Diamètre de tête (d_a) :

Diamètre du cercle de tête (le cercle qui passe par les sommets des dents).

I.8.7. Diamètre de pied (d_f) :

Diamètre du cercle de pied (le cercle qui passe par les pieds des dents).

I.8.8. Pas circonférentiel (P) :

C'est l'arc sur le cercle primitif, compris entre deux dents consécutives.

I.8.9. Largeur de denture (b) :

C'est l'épaisseur de la roue ou du pignon.

I.8.10. Hauteur des dents (h) :

La hauteur des dents comprend deux parties.

I.8.11. La saillie (h_a) :

La distance radiale entre le cercle de tête et le cercle primitif.

I.8.12. Le creux (h_f) :

La distance radiale entre le cercle de pied et le cercle primitif.

I.8.13. Expression de l'entraxe (a) :(figure 1.17).

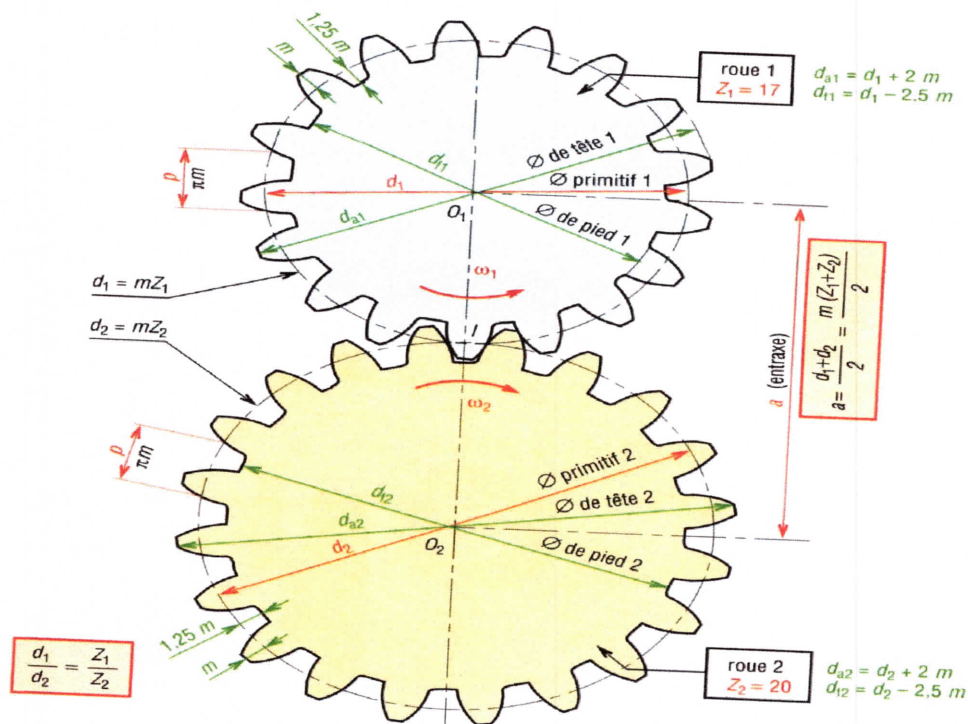


Figure 1.17 Définition de l'entraxe a.

Tableau 1.1 Caractéristiques de la denture

Symbole	Désignation	Formule
m	Module	Par calcul de RDM
Z	Nombre de dents	Par un rapport de vitesse
d	Diamètre primitif	$d = m \cdot Z$
d_a	Diamètre de tête	$d_a = d + 2m$
d_f	Diamètre de pied	$d_f = d - 2.5m$
d_b	Diamètre de base	$d_b = d \cdot \cos \alpha$
h_a	Saillie	$h_a = m$
h_f	Creux	$h_f = 1.25m$
h	Hauteur de dent	$h = 2.25m$
P	Pas	$P = \pi m$
b	Largeur de denture	$b = km \ (5 \leq k \leq 16)$
a	Entraxe	$a = (d_1 + d_2)/2$

Chapitre II : Méthodes de calcul de résistance d'un engrenage à denture droite

Introduction

Une denture se définit complètement à partir du module m dont la valeur approximative résulte d'un calcul de résistance des matériaux.

Les contraintes de référence sont calculées dans des situations idéalisées et affectées d'une série de coefficients pour tenir compte de la situation réelle.

Les méthodes de calcul des engrenages qui sont proposées : (Lewis, ISO, AGMA), ces méthodes sont toujours très complexes, car elles tiennent compte d'un grand nombre de paramètres, mais elles donnent tous les éléments qui permettront de définir, calculer et de dessiner les engrenages.

II.1. Les méthodes de calcul de résistance

On étudie les trois méthodes de calcul suivantes :

- La méthode de Lewis.
- la méthode AGMA.
- La méthode ISO.

II.1.1. La méthode de Lewis [3]

Lewis, en 1893, qui a analysé les dentures droites symétriques par la théorie des poutres, en inscrivant dans celles-ci une parabole d'iso contraintes représentant une poutre d'égale résistance. L'extrémité de celle-ci se trouve à l'intersection de la ligne d'action avec l'axe de symétrie de la dent. Lewis propose que la section de contrainte superficielle maximale, ou la section critique, se situe au point de tangence de la parabole avec le profil de la dent. Suite à cette hypothèse, la contrainte en tension se calcule comme pour une poutre en flexion, avec un encastrement à la section critique, sollicitée par la composante dans la direction normale à la ligne de symétrie de la dent de la force appliquée sur la dent.

Cette méthode est à l'origine des autres méthodes. Sa formule a été établie en 1893. Elle est encore utilisée aujourd'hui pour des approximations et des études simplifiées.

Les hypothèses de base sont les suivantes (figure 2.1) :

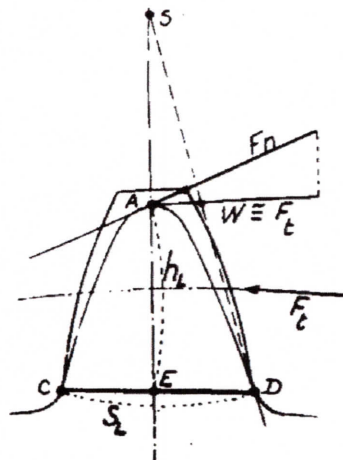


Figure 2.1 : Méthode de Lewis

- La charge normale F_n est appliquée au sommet de la dent.
- Il n'y a qu'un seul couple de dents en contact.
- La composante de flexion W est seule considérée et prise égale pour simplification à l'effort tangentiel F_t .

En réalité, $W = F_n \cos \alpha_a$

α_a étant l'angle d'incidence de la développante au sommet, ce qui donne :

$$W = F_t \cos \alpha_a / \cos \alpha_0$$

Supposons tracé le profil de raccordement de pied de la dent, qui dépend comme nous l'avons déjà vu du nombre de dents, du déport éventuel de la denture et de l'outil de génération, traçons la parabole de sommet A, point d'application de la charge sur l'axe de la dent, et inscrite à l'intérieur de la dent : c'est la "parabole d'égale résistance" qui permet de situer la section d'encastrement, dans laquelle la contrainte de flexion est maximum.

Posons : $S_L = CD$

$h_L = AE$ (l'indice L rappelle Lewis)

b : largeur de denture

La propriété de la sous-tangente à la parabole permet d'écrire :

$$SA = AE$$

La contrainte de flexion maximale à la racine de la dent d'après Lewis est donnée par :

$$\sigma_0 = 6F_t \cdot h_L / b \cdot S_L^2$$

$$\sigma_0 = \frac{F_t}{b \cdot m_0 \cdot Y}$$

Y : facteur de forme. (Voir l'annexe 1)

La force tangentielle nominale F_t , tangente au cylindre primitif de référence, est définie dans le plan normal à l'axe, à partir du couple nominal ou de la puissance transmise.

T_1 et T_2 : couples sur le pignon et la roue (en mN).

d_1 et d_2 : diamètres primitif de référence du pignon et de la roue (en mm).

P : puissance transmise (en KW).

Donc :

$$F_t = \frac{2000T_{1,2}}{d_{1,2}} = \frac{19098 \times 1000P}{d_{1,2} \times n_{1,2}}$$

Inconvénients de la méthode de Lewis : La méthode de Lewis est une méthode majorant, supposant une seule dent en prise ; ne tient pas compte du phénomène de concentration de contraintes au pied de la dent (rayon r_f) et néglige les conditions de service (chocs, fatigue...).

II.1.2. La méthode AGMA [5]

L'American Gear Manufacturer Association (AGMA) utilise pour le calcul des contraintes en tension dans les engrenages la formule proposée par Dolan et Broghamer en 1942. Après des études photo élastiques similaires à celles de Timoshenko et Baud, elle trouve que le facteur de concentration de contraintes (K_c), qui multiplie la formule de Lewis modifiée (flexion/compression), est aussi lié à la position de la force sur la dent. Suite à cela, les chercheurs introduisent une formule empirique pour calculer le facteur de concentration de contraintes en fonction de la section critique, de la hauteur de la charge, du rayon de courbure au pied de la dent et de coefficients mesurés par photoélasticité (ceux-ci varient avec l'angle de pression de la dent).

L'approche américaine proposée par l'AGMA repose sur la formule de Lewis écrite en fonction du

pas diamétral $P_d = \frac{1}{m_o}$

$$\sigma_0 = \frac{F_t P_d}{b J} K_m$$

Ou

$$\sigma_0 = \frac{F_t}{b m_o J} K_m$$

j : Facteur de forme (annexe 2).

K_m : Facteur de la répartition des charges (annexe 8).

Pour estimer la contrainte maximale de dimensionnement, la méthode AGMA prend en considération d'autres facteurs tels que :

K_v : Facteur dynamique (annexe 3).

K_a : Facteur d'application de la charge (annexe 4).

K_s : Facteur d'échelle (annexe 5).

K_B : Facteur d'épaisseur de jante (annexe 6).

K_I : Facteur de roue folle (annexe 7).

La contrainte maximale est donnée par :

$$\sigma_{max} = \sigma_0 \frac{K_a}{K_v} k_s k_B K_I$$

II.1.3. La Méthode ISO [3]

La section d'encastrement est définie par les points C et D où deux tangentes à 30° touchent le profil de raccordement de pied.

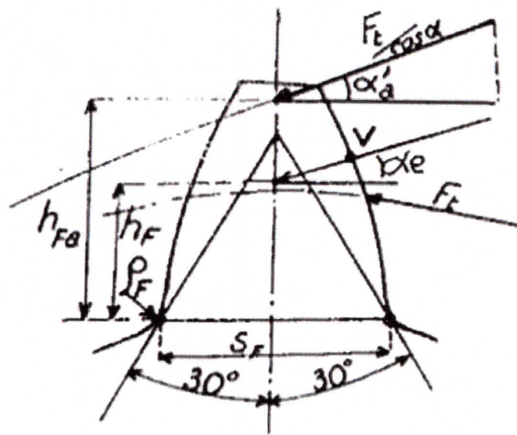


Figure 2.2 : Hypothèse simplificatrice ISO

- Calcul des paramètres h_{Fa} , s_F , α'_a :

La figure 2.3 donne les caractéristiques de la crémaillère génératrice dans le cas général.

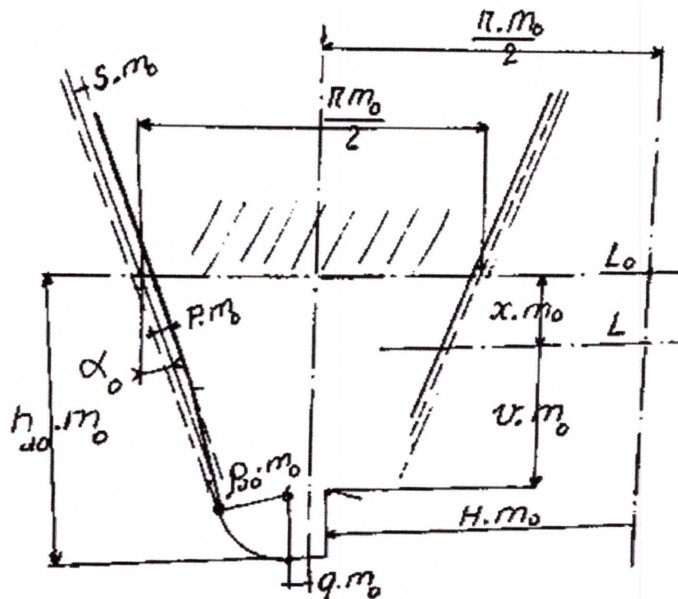


Figure 2.3 : Dent de crémaillère génératrice

$\frac{\pi m_0}{2}$: Épaisseur de référence sur ligne de référence.

$s.m_0$: Surépaisseur.

α_0 : Angle de pression.

$P.m_0$: Protubérance.

$h_{a0} \cdot m_0$: Saillie nominale.

$\rho_{a0} \cdot m_0$: Rayon au sommet.

Pour l'outil de finition normal de taillage, nous avons : $S = P = 0$

x : Coefficient de déport de la denture taillée.

Z : Nombre de dents de la roue taillée.

Le calcul se conduit comme suit :

$$v = h_{a0} - x - \rho_{a0}$$

$$q = \frac{\pi}{4} - h_{a0} \cdot \tan \alpha_0 + \frac{P - S}{\cos \alpha_0} - \rho_{a0} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_0}{2} \right)$$

$$H = \frac{\pi}{2} - q$$

Ω : angle des tangentes pour définition de la section d'encastrement est égale à 30°

Détermination de l'angle γ tel que, (Figure 2.4)

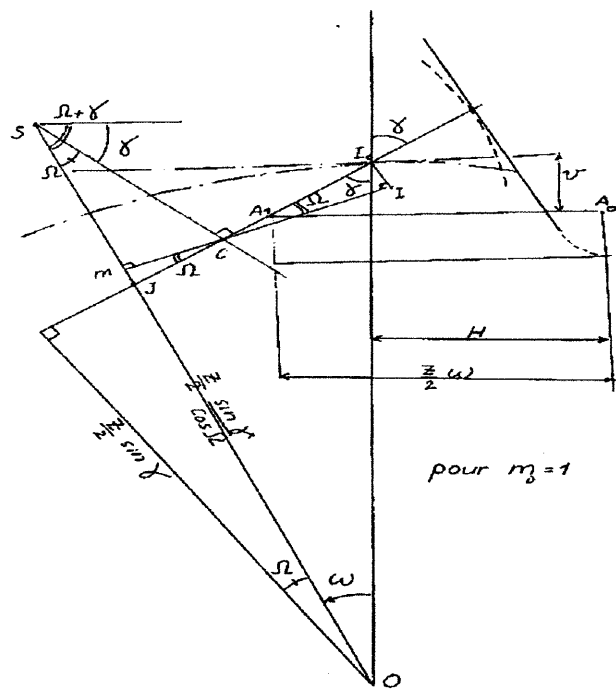


Figure 2.4 : détermination de l'angle γ

$$\gamma + \frac{v}{r} \tan \gamma = \frac{\pi}{2} - \Omega = \frac{H}{r}$$

Cet angle ne peut être déterminé que par itération. . Polder a donné une très bonne valeur approximative donnée par :

$$G = x + \rho_{a0} - h_{a0}$$

$$H = \frac{\frac{\pi}{2} + 2h_{a0} \cdot \tan \alpha_0 + 2\rho_{a0}(1 - \sin \alpha_0)}{\cos \alpha_0 \cdot Z}$$

$$\gamma = \frac{2G(\gamma_{old} - \sin \gamma_{old} \cdot \cos \gamma_{old}) + Z \cdot H \cdot \cos^2 \gamma_{old}}{2G - Z \cdot \cos^2 \gamma_{old}}$$

Avec $\gamma_{old} = 0.9 \text{ radian} = 51^\circ, 56$

$$\text{Et : } \omega = \frac{\pi}{2} - \Omega - \gamma$$

Donc :

$$S_f = 2 \left[r \cdot \sin \omega - \left(\frac{v}{\cos \gamma} + \rho_{a0} \right) \cos \omega \right]$$

$$h_F = r \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'_a} - \cos \omega \right) + \left(\frac{v}{\cos \gamma} + \rho_{a0} \right) \sin \Omega$$

- Angle α'_a :

$$\cos \alpha_a = \frac{r_b}{r_a}$$

Avec :

$$r_b = r \cos \alpha_0$$

$$r_a = r + \text{saillie}$$

$$S = \frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_0$$

Donc :

$$\alpha'_a = \tan \alpha_a - \frac{S}{2r} - \operatorname{inv} \alpha_0$$

Donc la contrainte de base à la rupture ou contrainte nominale, est donnée par :

$$\sigma_0 = \frac{F_t}{b \cdot m_0} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_{fa} \cdot Y_c \cdot Y_\beta = \frac{F_t}{b \cdot m_0} \cdot Y_f \cdot Y_c \cdot Y_\beta$$

Où :

- Y_ε : Facteur de conduite $Y_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$
- $Y_f = Y_\varepsilon \cdot Y_{fa}$: Facteur de forme (voir abaques Annexe 10).
- Y_c : Facteur de concentration de contraintes (voir abaques Annexe 11).
- Y_β : Facteur d'inclinaison des dentures ($Y_\beta = 1$ en denture droite).
- F_t : Effort tangentiel exercé sur la denture.
- b : largeur de denture ($k \cdot m_0$).

Pour le dimensionnement final on doit tenir compte d'autres facteurs :

- K_v : Facteur de vitesse
- K_{bl} : Facteur de durée
- K_M : Facteur de portée
- K_a : Facteur de service

La contrainte totale est alors donnée par la relation :

$$\sigma_{max} = \sigma_0 \cdot \frac{1}{K_v \cdot K_{bl} \cdot K_M \cdot K_a}$$

**Chapitre III : Analyse statique comparative :
Modèles Eléments finis-Méthodes semi-empiriques
des contraintes sur la denture droite d'un pignon**

Introduction

La Méthode des Eléments Finis est une méthode très efficace pour l'analyse du milieu continu quel que soit sa complexité. L'application de cette méthode permet de modéliser et d'analyser un engrenage de façon plus adéquate. En effet, l'analyse est plus réaliste vu qu'un modèle 3D est facile à mettre en œuvre par un code FEA.

Ce chapitre porte sur l'analyse statique par EF de la répartition des contraintes sur la denture d'un engrenage d'un pignon du premier étage d'engrenages d'un réducteur de vitesses à axes parallèles, d'une puissance de 20KW. L'analyse est menée par le code CATIA v5 dans le but de modéliser le pignon sous la charge tangentielle F_t transmise et déterminer la répartition des contraintes de Von Mises sur la dent et en déduire la contrainte maximale au pied de la dent. Par suite cette contrainte est comparée aux contraintes nominales σ_0 obtenues par les méthodes semi-empiriques citées au chapitre deux.

III.1. Paramètres d'engrenage, dimensions du pignon, matériau :

Le pignon est à denture cylindrique droite de paramètres et dimensions donnés par le Tableau3.1

Tableau 3.1 Paramètres et dimensions du pignon.

Module	m	3
Nombre de dent	Z	20
angle de pression	α	20°
rayon primitif	r	30
rayon de tête	r_a	33
rayon de pied	r_f	26,25
rayon de base	r_b	28,19
saillie	h_a	3
creux	h_f	3.75
Hauteur de la dent	h	6.75
Largeur de la dent	b	24
Pas	p	9.42
Rayon de raccord.	$\rho=0.38*m$	1.44

III.2. Conception du pignon par CATIA v5

III.2.1. Dessin de développante de cercle

Le dessin du pignon commence par l'établissement des diamètres caractéristiques (d , d_b , d_a et d_f), suivit par l'étape qui consiste à créer la développante de cercle dont les équations paramétriques sont données par :

Équations de la développante

Soit $Q(r, 0)$ le point de départ de la courbe, correspondant à l'angle nul, et T le point de contact d'une droite qui roule sans glisser sur le cercle. Notons t la mesure en radians de l'angle \widehat{QOT} et calculons les coordonnées cartésiennes d'un point P quelconque de la développante (figure 3).

Le point P est déterminé par l'équation vectorielle $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP}$. La longueur du segment $[PT]$ est égale à la longueur de l'arc \widehat{OT} dont la mesure est rt .

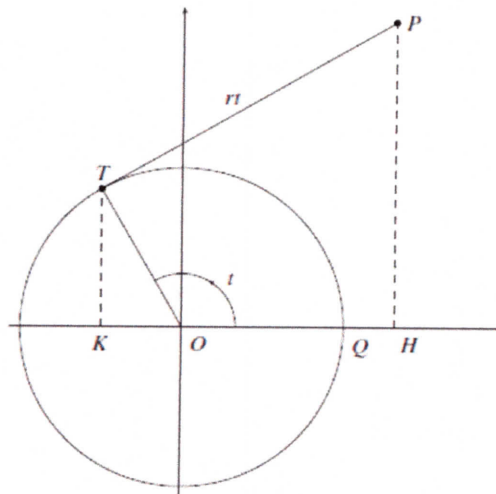


Figure 3. Détermination de l'équation de la développante

On trouve pour que le vecteur \overrightarrow{OT}

$$\overrightarrow{OT} = r \cos t \cdot \vec{e}_1 + r \sin t \cdot \vec{e}_2$$

Avec : r : rayon de base

Et pour le vecteur \overrightarrow{TP}

$$\overrightarrow{TP} = rt \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \vec{e}_1 + rt \sin \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{TP} = rt \sin t \cdot \vec{e}_1 - rt \cos t \cdot \vec{e}_2$$

En effectuant la somme de ces deux vecteurs et en séparant les composantes, on obtient les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = r \cos(t) + rt \cdot \sin(t) \\ y = r \sin(t) - rt \cdot \cos(t) \end{cases}$$

Où t est un angle qui varie dans l'intervalle $[t_1, t_2]$. Il permet de faire varier la longueur de courbe.

Pour résoudre ces équations, nous utilisons le programme Excel, ce qui nous donne le profil de la développante de cercle par les étapes suivants :

- Etablir un programme qui résoudra les équations paramétrique x(t) et y(t).
- Copy les valeurs de x et y à C:\Program Files\Dassault Systèmes\B21 \Intel a\code\command\GSD_PointSplineLoftFromExcel. dans la partie sélectionnée.

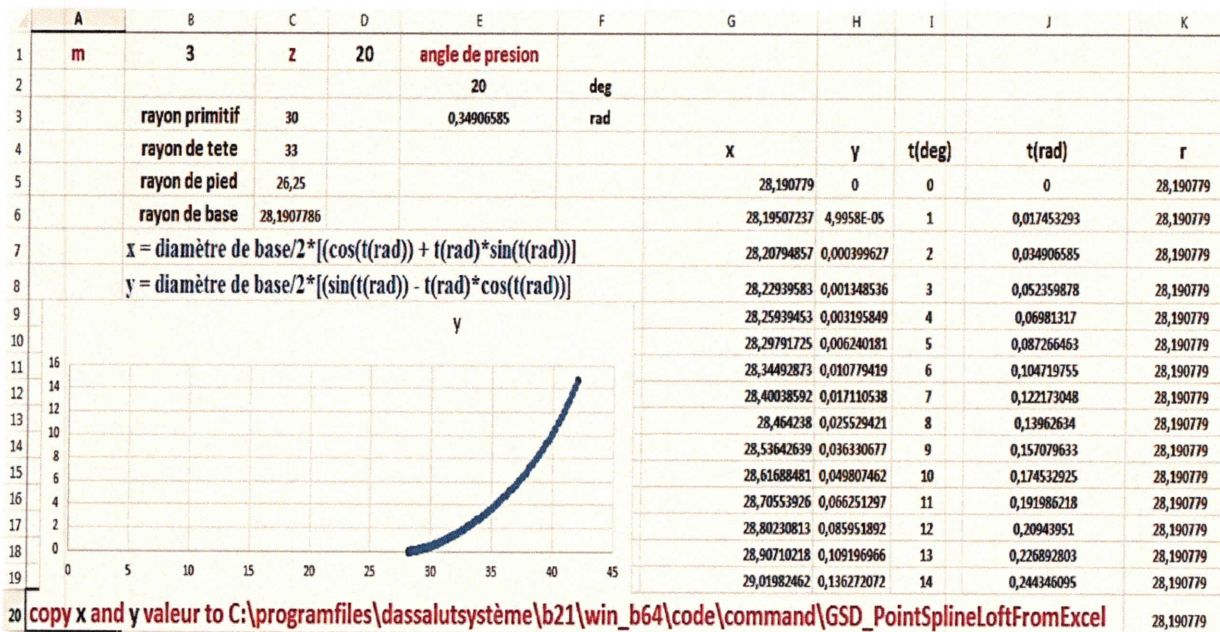


Figure 3.1 Données paramétriques de développante de cercle

	A	B	C	D
1				
2	StartCurve			
3	28,190779	0	0	
4	28,19507237	4,9958E-05	0	
5	28,20794857	0,000399627	0	
6	28,22939583	0,001348536	0	
7	28,25939453	0,003195849	0	
8	28,29791725	0,006240181	0	
9	28,34492873	0,010779419	0	
10	28,40038592	0,017110538	0	
11	28,464238	0,025529421	0	
12	EndCurve			
13	EndLoft			
14	End			
15				
16				

Figure3.2 Command\GSD_PointSplineLoftFromExcel

- Ouvrir Catia V5 dans la part design.
 - Dans le command affichage de la barre d'outils d'Excel afficher les macros.
- Enfin, nous obtenons la développante de cercle sur Catia.

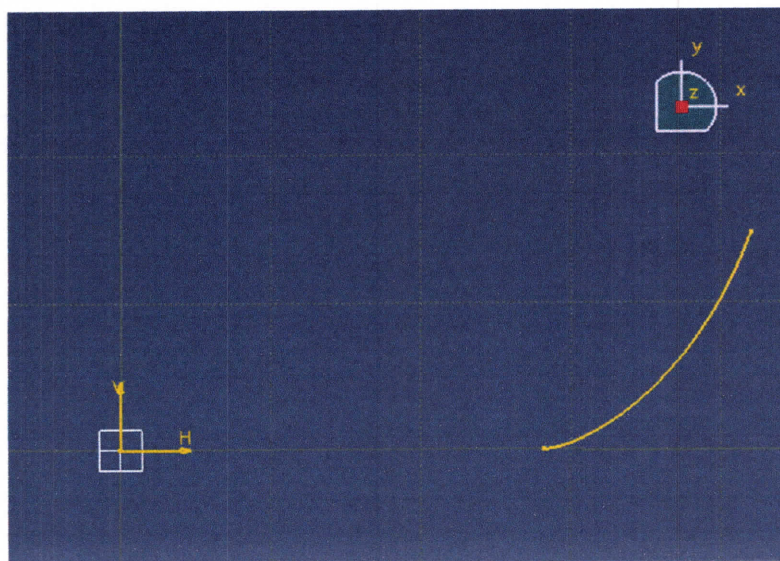


Figure 3.3 Développante de cercle sur Catia V5

III.2.2. Dessin de la dent

Une fois que la développante de cercle est définie, il ne reste plus qu'à reporter tous les diamètres respectifs ainsi qu'à appliquer les opérations successives de transformation de l'esquisse de base (Figure3.4).

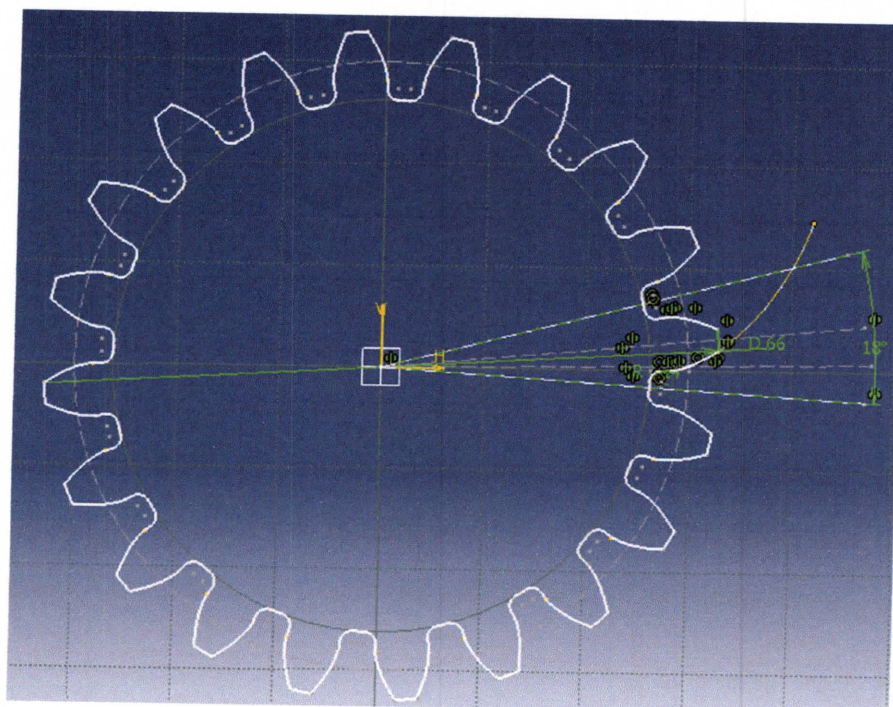


Figure 3.4 L'esquisse finale avant l'extrusion

Après extrusion on obtient un pignon de largeur $b = 24 \text{ mm}$

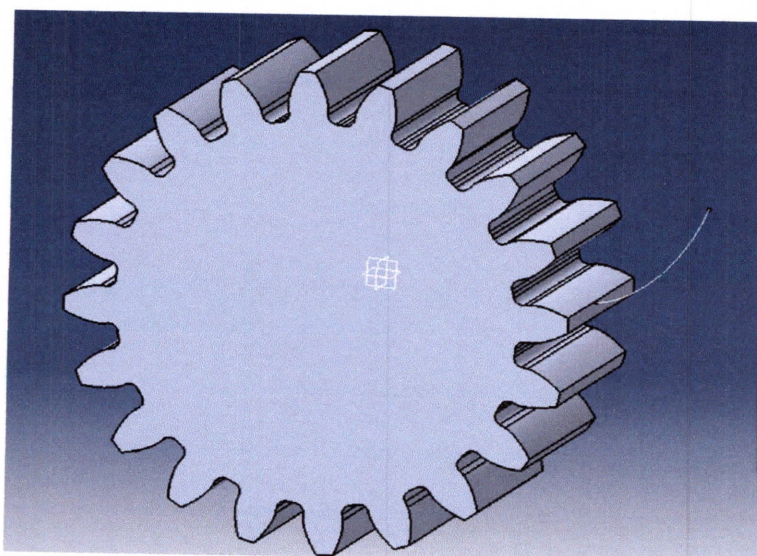


Figure 3.5 Pignon a denture cylindrique droite

A l'issue de ce processus de conception, les deux modèles final (figure 3.6 et 3.7) est prêt pour le calcul par Elément Finis.

III.2.3. Choix du matériau

Le matériau choisi pour la pièce est un acier allié de caractéristiques suivantes :

Tableau 3.2 Caractéristique du matériau

Propriétés structurales	symbole	valeurs	unités
La masse volumique	ρ	7870	Kg/m ³
Module de Young	E	206	GPa
Coefficient de Poisson	ν	0.32	/
Limite élastique	R_p	637	MPa

III.3. Analyse statique du pignon par les EF

III.3.1. Modèles

L'analyse statique du pignon par EF est faite suivant deux modèles. Un premier modèle de trois dents (3D) (Figure 3.6), où la charge F_t est appliquée au sommet de la dent intermédiaire. Dans le deuxième modèle pignon (3D)(Figure 3.7), on considère le pignon entier où la charge F_t est appliquée au sommet d'une dent.

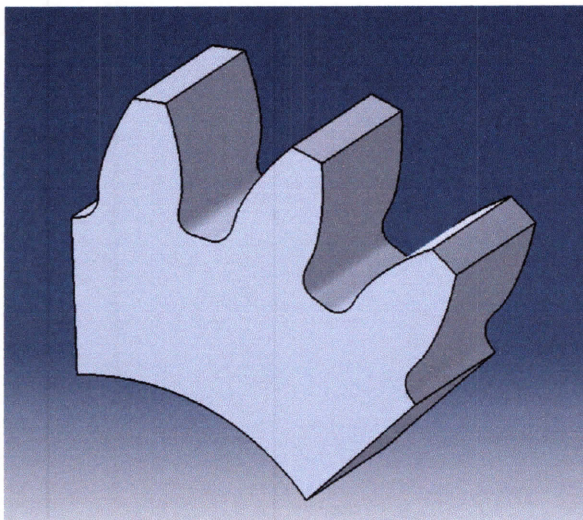


Figure 3.6 Modèle 3 dents (3D)

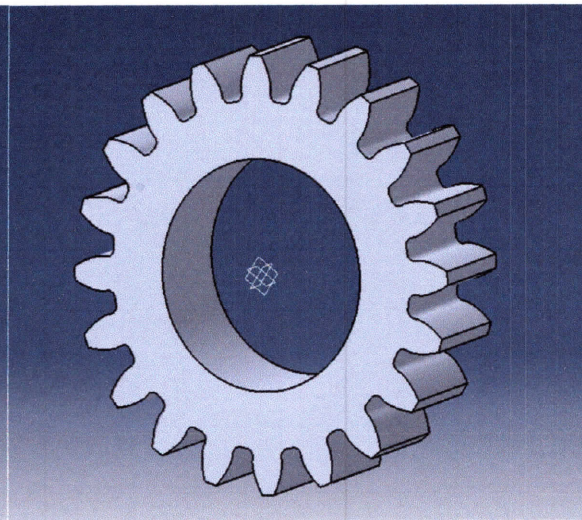


Figure 3.7 Modèle pignon (3D)

III.3.3. Maillage

Pour les deux modèles, le maillage est uniforme, fait par un Octree 3D de taille 1mm (Figure 3.8) et de type parabolique. L'évolution de la contrainte au pied de la dent a été contrôlée par raffinement de la taille du maillage.



Figure 3.8 Taille de maillage.

III.3.4 Conditions aux limites

Le modèle pignon (3D) est pris encastré, aux points situés à deux tiers du rayon du cercle de pied à partir de l'axe. Le modèle 3dents (3D) est pris encastré aux points situés à deux tiers du rayon du cercle de pied en plus de glissement surfacique sur les surfaces radiales comme le montre la figure 3.9.

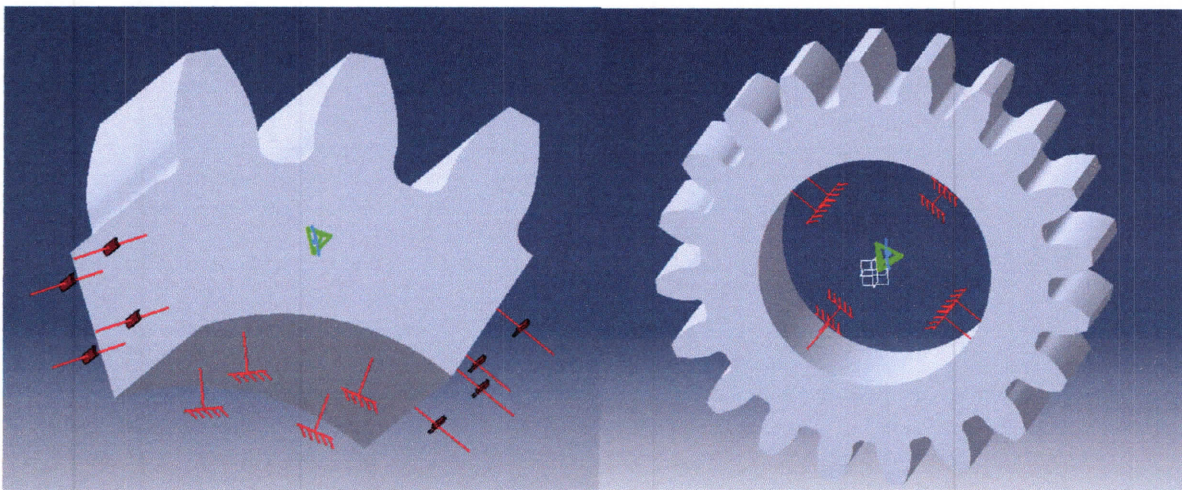


Figure 3.9 Application des conditions aux limites

III.3.5. Charge appliquée

La charge appliquée représente l'effort tangentiel F_t appliqué à la tête de la dent. F_t est calculé à partir de la puissance donnée au niveau de l'arbre principal et il est donné par :

$$F_t = \frac{19098 \times 1000P}{d \times n}$$

Avec :

$$P = 20KW ,$$

$$n = 1500 \text{ tr/min}$$

$$d = m \times Z = 60$$

Donc :

$$F_t = 4244 \text{ N.}$$

F_t est réparti uniformément sur la largeur de la dent b . D'où une charge par unité de longueur

$$q = F_t/b$$

$$q = 176833 \text{ N/mm}$$

III.4. Résultats de l'analyse par EF des deux modèles

Les résultats de l'analyse par EF, tableau 3.3, montre que les valeurs maximales en termes, de déplacements à la tête de la dent, et de contraintes de Von Mises à son pied sont maximales pour le modèle pignon (3D). Cependant en termes de contraintes l'erreur relative entre les deux modèles est de l'ordre de 8%. Cela justifie l'analyse EF du pignon par un modèles à trois dent (3D). Les déplacements à la racine de la dent de l'ordre de $1.7 \mu\text{m}$ et cela justifié l'encastrement à 2 tiers du rayon de cercle de pied. Les figures (3.10- 3.11), donnent les répartitions des contraintes de Von Mises et des déplacements pour les deux modèles.

Tableau 3.3 Contraintes de Von Mises et des déplacements pour les deux modèles.

Modèles	3 dents (3D)	Pignon (3D)	Err (%)
σ_0 (MPa)	283	308	8
Déplacements (mm)	0.0175	0.0167	

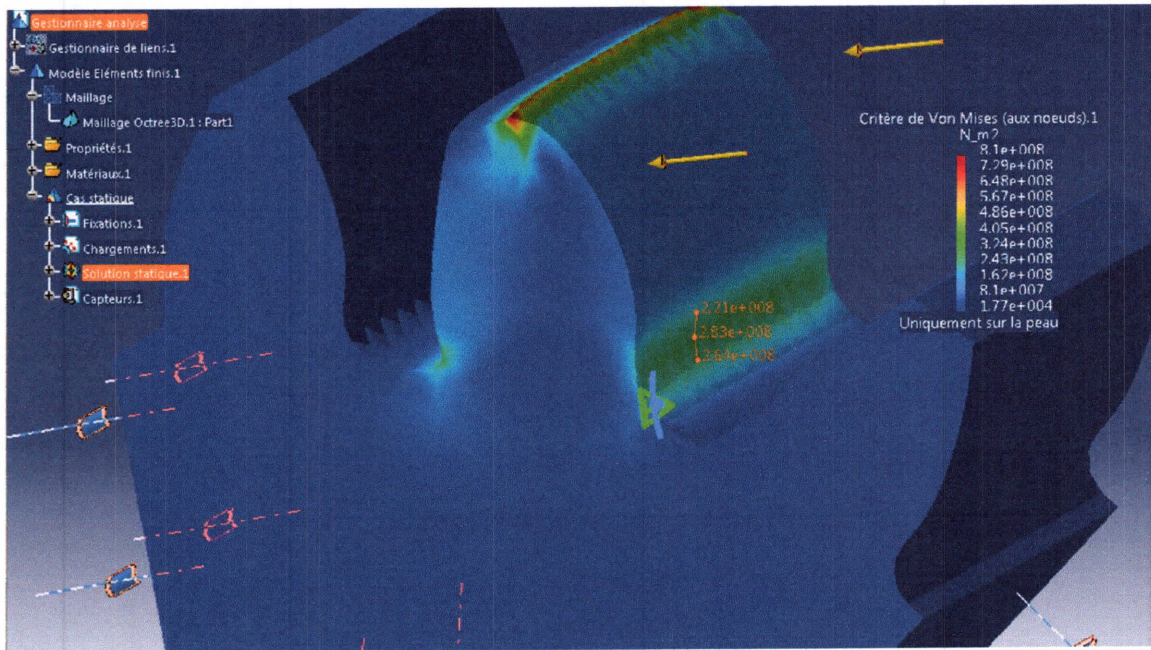


Figure 3.10a Model 3dents (3D), Contrainte équivalente de Von Mises

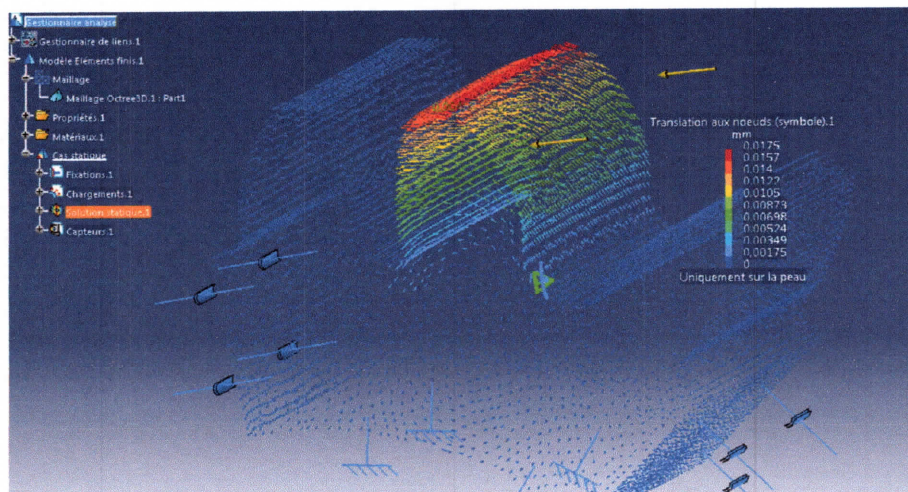


Figure 3.10b Modèle 3dents (3D), répartition des déplacements



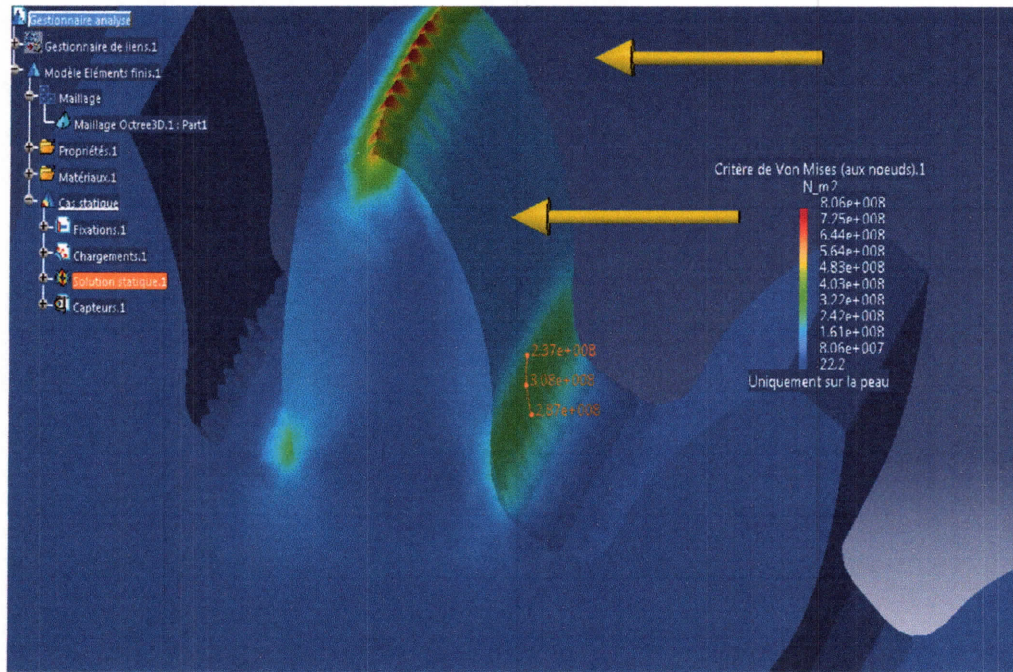


Figure 3.11a Modèle pignon (3D), répartition de contraintes de Von Mises

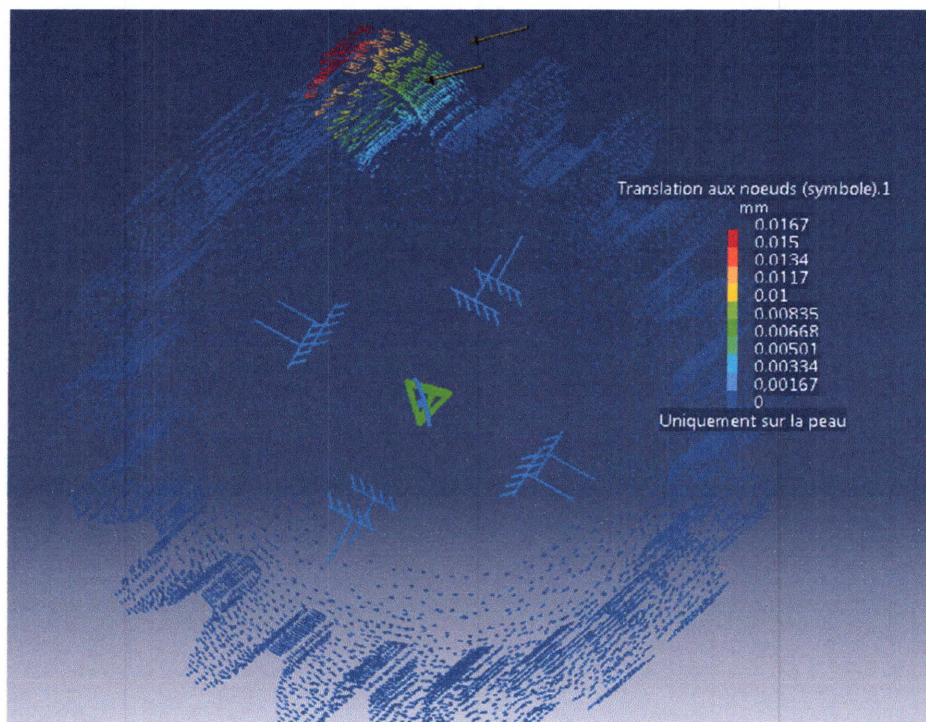


Figure 3.11b Modèle pignon (3D), répartition des déplacements

III.5. Calcul des contraintes par méthodes semi-empiriques

Dans les systèmes d'engrenages, la rupture par flexion est dominante. En effet, lorsque les dents sont soumises à un chargement afin de transmettre l'effort, il y a automatiquement apparition de

contraintes de flexion à la base de la dent. Dépasser la contrainte limite peut provoquer la plasticité voire la rupture. Donc pour calculer la valeur approximative de cette contrainte on a trois (3) méthodes :

III.5.1. Méthode de Lewis

$$\sigma_0 = \frac{F_t}{b \cdot m_0 \cdot Y} = \frac{4244}{24 \times 3 \times 0.32}$$

$$\sigma_0 = 178.62 \text{ MPA}$$

Avec : $Y = 0.32$ (voir annexe 1).

III.5.2. Méthode ISO

$$\sigma = \frac{F_t}{b \cdot m_0} \cdot Y_f \cdot Y_c = \frac{4244}{24 \times 3} \times 2.85 \times 1.63$$

$$\sigma_0 = 273.82 \text{ MPA}$$

Avec :

$$Y_f = 2.85 \text{ (Voir annexe 10)}$$

$$Y_c = 1.63 \text{ (Voir annexe 11)}$$

III.5.3. Méthode AGMA

$$\sigma_0 = \frac{F_t}{b \cdot m_0 \cdot J} K_m$$

$$\sigma_0 = \frac{4244}{24 \times 3 \times 0.24} \times 1.2$$

$$\sigma_0 = 294.72 \text{ MPA}$$

Avec :

$$J = 0.24 \text{ (Voir annexe 2).}$$

$$K_m = 1.2 \text{ (Voir annexe 8).}$$

III.6. Comparaison des résultats

Le tableau 3.3 donne les valeurs de la contrainte nominale déterminée par les méthodes semi-empiriques et l'analyse par EF (3D) du pignon en entier. Les erreurs relatives calculées sur la contrainte nominale σ_0 par rapport à celle déterminée par EF montrent que le calcul de la résistance de la dent selon la méthode de Lewis est loin d'une estimation de la contrainte nominale vu l'erreur qui est de 41%. Pour les méthodes AGMA et ISO les erreurs respectives sont de 4% et 11%. Cela montre que la contrainte nominale calculée par ces méthodes est bien estimée d'autant plus par la

méthode AGMA. Mais il reste à signaler que le calcul selon la méthode ISO est d'autant plus claire est facile à diriger.

Tableau 3.4 Différences entre la méthode des EF et les méthodes semi-empiriques

Méthodes	Lewis	ISO	AGMA	EF (pignon 3D)
σ_0 (MPA)	179	274	295	308
Err. (%)	41	11	4	

**Chapitre IV : Contraintes superficielles :
comparaison entre modèle E.F et modèle
analytique**

Introduction :

De nombreux contacts intervenant dans les ensembles mécaniques correspondent à un contact suivant un point ou une ligne si l'on idéalise les pièces en présence en les supposant rigides ; ce type de contact constitue la famille des contacts hertziens pour lesquels les premiers éléments de solution ont été proposés par Heinrich Hertz entre 1881 et 1895.

En pratique, sous l'effet d'une force normale au plan tangent commun aux deux pièces, une surface de contact se crée à travers laquelle les efforts sont transmis d'une pièce à l'autre. Ces efforts surfaciques génèrent une répartition spécifique de contraintes (efforts de cohésion) dans la région du contact qui peut entraîner des déformations permanentes ou des endommagements ; il est important de pouvoir les prévoir.

IV.1. L'application de la théorie d'Hertz : [6]

À ce contact permet de prévoir la forme et les dimensions de la surface de contact, la répartition d'effort sur cette surface, puis la répartition des contraintes ou efforts de cohésion en sous-couche au voisinage du contact ; on peut ainsi déterminer dans chacun des éléments en contact la zone la plus sollicitée et choisir le matériau ou les techniques de renforcement adaptés.

Les informations à rassembler pour l'étude sont les géométries des deux pièces au voisinage du contact, leur positionnement relatif, le torseur de liaison entre ces deux corps et en particulier la composante normale de sa résultante, les propriétés d'élasticité (module de Young et coefficient de Poisson) des matériaux en contact. Pour le dimensionnement, les limites d'élasticité, de rupture ou de fatigue pourront être nécessaires.

IV.2. Contrainte de contact (Hertz) : [7]

Lorsque deux surfaces courbes entrent en contact (Fig4.1), une contrainte provoque une déformation de la surface commune suite aux charges en présences. La contrainte en question est appelée contrainte superficielle de Hertz σ_H . Elle est fonction des rayons de courbure (ρ_1 et ρ_2), de la charge appliquée (F_t) ainsi que des caractéristiques élastiques des matériaux (E_1, E_2, ν_1, ν_2).

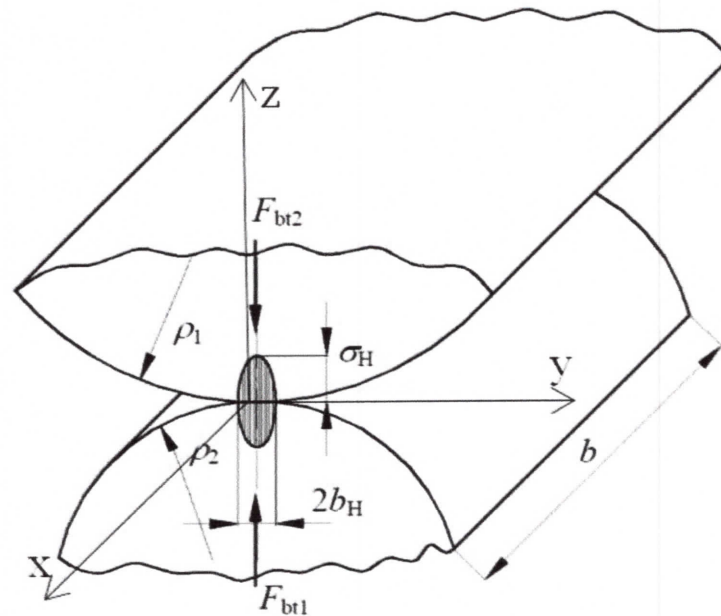


Figure 4.1 Contrainte de contact entre deux cylindres

IV.3. Pression d’Hertz nominale de l’engrenage :

de courbure
 Deux galets de rayons ρ_1 et ρ_2 sont pressés l’un contre l’autre avec un effort normal unitaire F_{nu} (N/mm) (Figure 4.2).

Ils subissent un aplatissement :

$$2a = 0,0063\sqrt{F_{nu} \rho_r} \text{ (mm)}$$

ρ_r = rayon de courbure relatif :

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

La variation de la pression superficielle indique un maximum σ_H au point géométrique de contact O (formule d’Hertz) :

$$\sigma_H = 193 \sqrt{F_{nu} \frac{1}{\rho_r}} \text{ (N/mm}^2\text{) pour les aciers.}$$

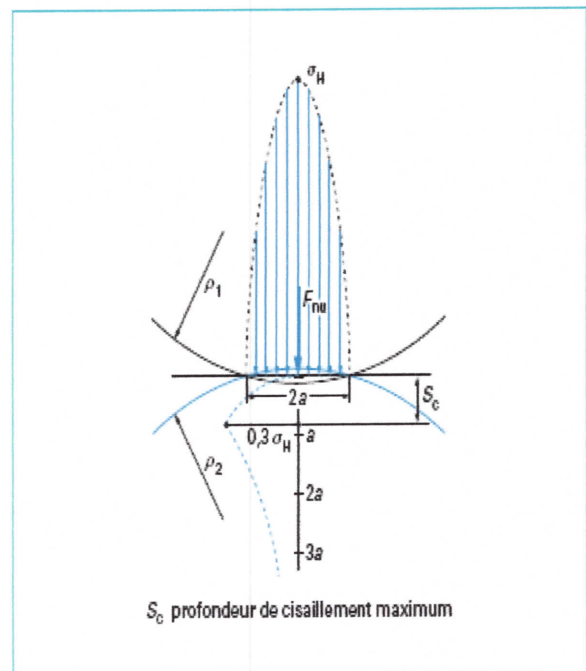


Figure 4.2 pression d’hertz

En un point quelconque M, on peut remplacer les deux dentures conjuguées par deux galets cylindriques, de rayons ρ_1 et ρ_2 (rayons de courbure des développantes) (Figure 4.3).

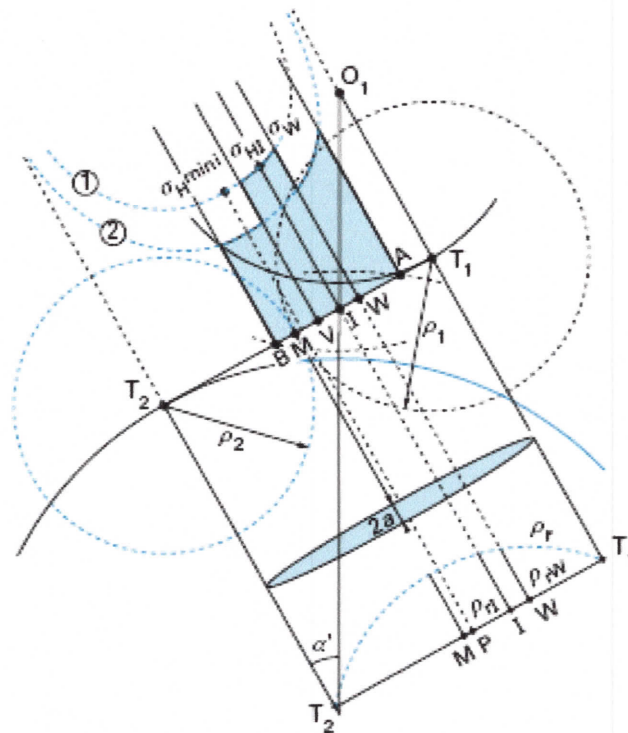


Figure 4.3 Engrenage parallèle extérieur à denture droite

En (T1 ou T2) :

$$\rho_1 \text{ Ou } \rho_2 = 0$$

$$2a = 0$$

$$\sigma_H = \text{infini}$$

En P, milieu de T1 T2 :

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{T_1 T_2}{2}$$

$$2a = \text{maximum}$$

$$\sigma_H = \text{minimum}$$

$$F_n = \text{effort normal total}$$

Reportons-nous à la (figure 4.3). Entre V et W :

$$F_{nu} = \frac{F_n}{b}$$

Entre BV et AW :

$$F_{nu} = \frac{F_n}{2b}$$

La pression d'Hertz au point primitif est :

$$\sigma_{HI} = 193 \sqrt{\frac{2}{\cos \alpha \sin \alpha}} \sqrt{K}$$

$$K = \frac{F_t}{b d_1} \frac{u + 1}{u} \left(\frac{N}{\text{mm}^2} \right)$$

IV.4. Pression d'Hertz de base (Pression nominale) :

Des équations précédentes, nous pouvons déduire la formule générale suivante :

Tableau 4.1 Valeurs des facteurs intervenant dans la formule de calcul de σ_{H0}

Symbole	Description
σ_{H0}	Contrainte de contact nominal (MPa)
Z_H	Facteur géométrique
Z_E	Facteur d'élasticité (du matériau)
Z_ε	Facteur de conduite
Z_β	Facteur empirique d'inclinaison de la denture
F_t	Force tangentielle
d	Diamètre du pignon
b	La largeur de la face de contact
u	Rapport de réduction

$$\sigma_{H0} = Z_H Z_E Z_B Z_\varepsilon \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot d} \frac{u + 1}{u}}$$

Facteur d'élasticité Z_E :

$$Z_E = 193 \text{ pour les aciers}$$

Facteur de conduite Z_ε :

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}}$$

Remarque : pour la denture droite, la pression d'Hertz est voisine de celle donnée, par avec un seul couple en contact. Cependant, pour faire intervenir l'effet bienfaisant du rapport de conduite, il est introduit également un « facteur de conduite » de valeur empirique :

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3}}$$

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - 1.67}{3}}$$

$$Z_\varepsilon = 0.89$$

Facteur géométrique Z_H :

$$Z_H = \sqrt{\frac{1}{\sin \alpha_0 \cdot \cos \alpha_0}}$$

$$Z_H = \sqrt{\frac{1}{\cos 20 \sin 20}}$$

$$Z_H = 1.76$$

Facteur d'inclinaison Z_β :

$$Z_\beta = \sqrt{\cos \beta}$$

Et dans le cas de denture droite :

$$Z_\beta = 1.$$

$$\sigma_{H0} = Z_H Z_E Z_B Z_\varepsilon \sqrt{\frac{F_t}{d_1 b} \frac{\mu+1}{\mu}}$$

$$\sigma_{H0} = 1.76 * 193 * 0.89 * 1 \sqrt{\frac{4244}{24*60} \frac{1.5+1}{1.5}}$$

$$\sigma_{H0} = 670.024 \text{ MPa}$$

IV.5 Pression de contact (pression nominale) : Modèle EF

Pour déterminer la pression de contact par EF, nous avons considéré le modèle 3 dents (3D) avec le même maillage et les mêmes conditions aux limites du cas pour la détermination de la contrainte σ_0 nominale. Dans ce cas la charge F_t est appliquée au point de contact des cercles primitives. Les résultats obtenus en termes de contraintes de Von-Mises donne une pression nominale sur la ligne de contact de 680 MPa. En comparaison avec le modèle analytique, l'erreur relative est 1.47%, par suite on peut conclure que par l'analyse EF la pression nominale est bien estimée.

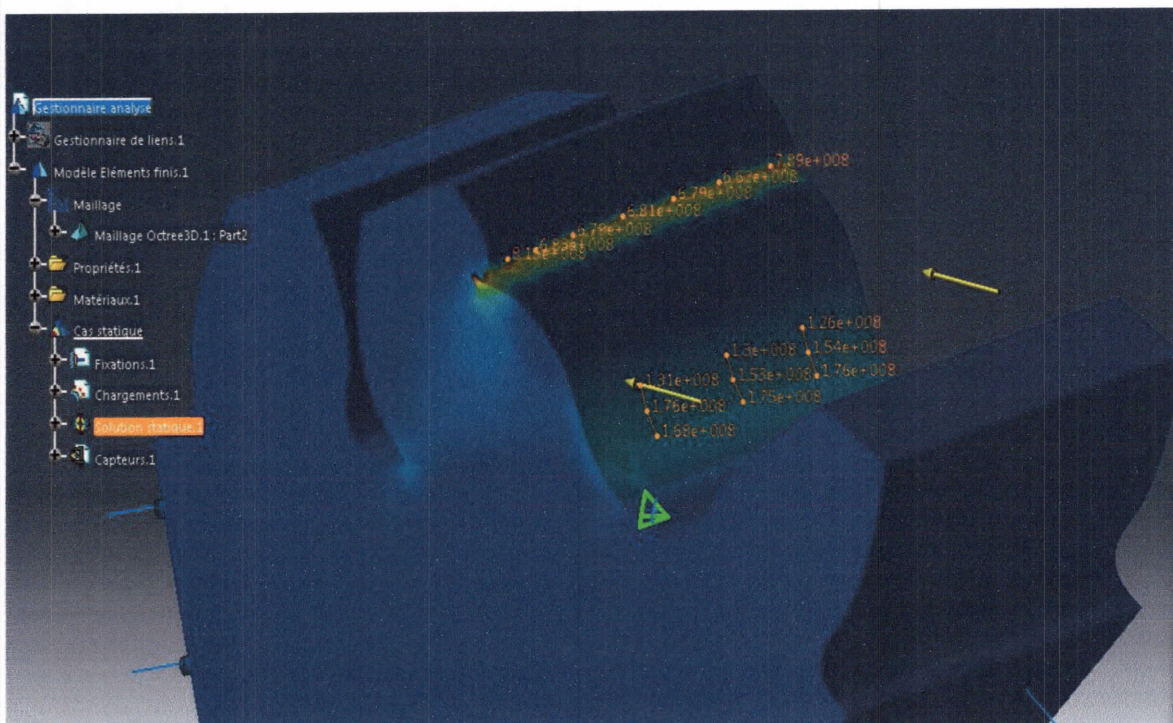


Figure 4.4 Contraintes de Von Mises à la région de contact

Conclusion générale

Par le biais de ce mémoire, nous avons approfondi nos connaissances sur les engrenages à denture droite, en particulier en matière de :

- Conception d'un engrenage cylindrique qui a permis de comprendre le phénomène l'interférence d'une denture, le procédé pour dessiner une dent en développante de cercle, par le code Catia v5 et la simulation de son engrènement.
- Calcul de la contrainte nominale au pied d'une dent du pignon par les méthodes de Lewis, ISO et AGMA et calcul de la pression nominale de contact par la méthode d'Hertz.
- Analyse par la méthode des éléments finis en modèles (3D), dont les résultats sont rigoureux, en comparaison avec les résultats déterminés par les modèles analytiques ou semi-empiriques.

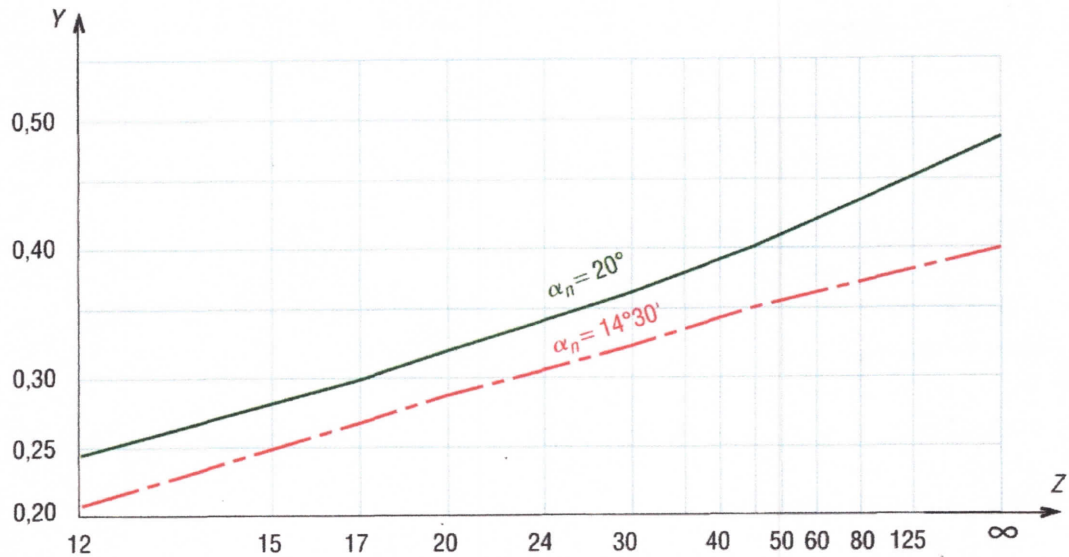
En fin, on peut conclure qu'à nos, avec la disposition des codes EF sophistiqués, réussir la conception.

Annexes :



Annexe 1 : Facteur de forme Y

La valeur de Y dépend de l'angle de pression α et du nombre de dents Z.



Pour l'engrenage de caractéristique : $m=3$; $Z=20$; $\alpha=20^\circ$

Donc la valeur de facteur de forme Y ou le coefficient de Lewis est égale :

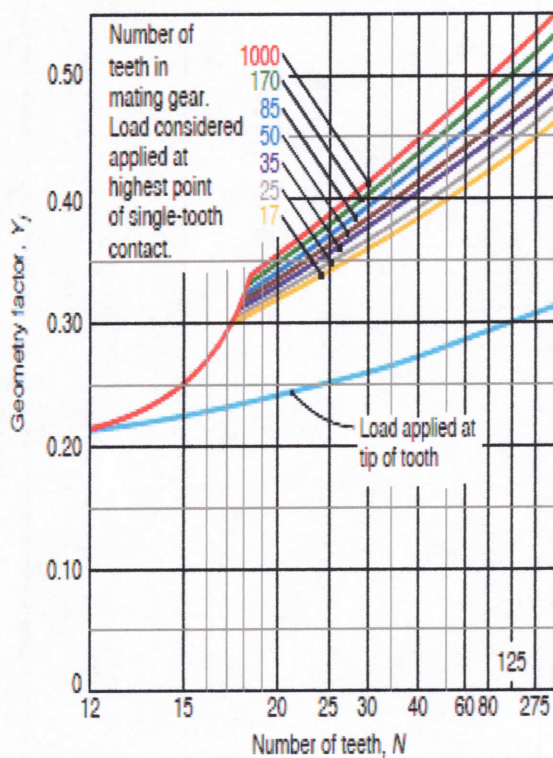
$$Y=0.34$$

Annexe 2 : Facteur de forme j

Le facteur J remplace le coefficient de Lewis. Il tient compte de l'effet de géométrie de la dent. Il est déterminé suivant un algorithme complexe défini par la norme AGMA 908-B89.

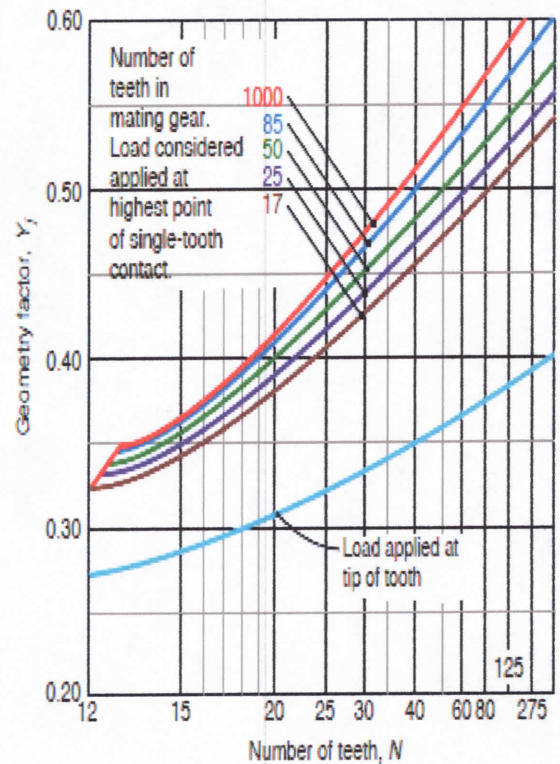
Remarquons que les facteurs J sont différents pour les pignons et pour les roues.

Le facteur J dépend en particulier de la géométrie du pied de la dent et du nombre de dents Z.



(a)

(a) : pour $\alpha=20^\circ$



(b)

(b) : pour $\alpha=25^\circ$

Pour l'engrenage de caractéristique : $m=3$; $Z=20$; $\alpha=20^\circ$

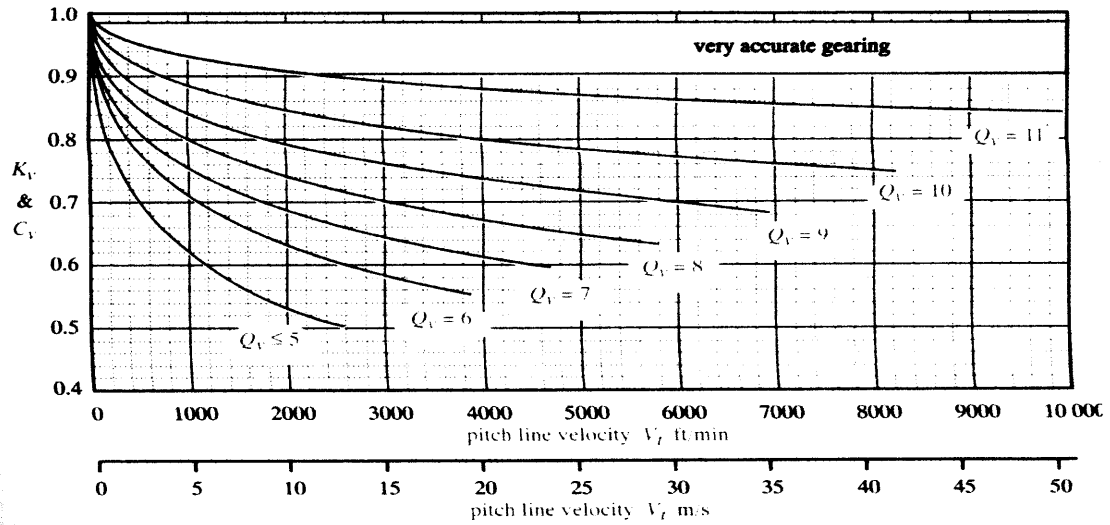
La valeur de facteur géométrie est égale :

$$j = 0.24$$

Annexe 3 : Facteur dynamique K_v

Le facteur K_v , ou facteur dynamique tient compte des charges dynamiques et des vibrations induites par les impacts dent contre dent.

Les charges vibratoires sont appelées **erreurs de transmission** et sont plus pénalisantes avec les engrenages de moindre précision.



En l'absence de données, on peut approcher K_v par les courbes suivantes :

$$K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{200V_t}} \right)^B$$

Où V_t est la vitesse tangentielle au diamètre primitif en m/s . Les facteurs A et B sont définis par :

$$A = 50 + 56(1 - B)$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} \quad \text{for } 6 \leq Q_v \leq 11$$

Ces courbes sont valides en dessous de la vitesse tangentielle maximale :

$$V_{t \max} = \frac{[A + (Q_v - 3)]^2}{200}$$

- Pour des engrenages de qualité $Q < 5$,

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{200V_t}}$$

Annexe 4 : Facteur d'application de la charge K_A :

L'effort F_n n'est pas appliqué progressivement mais produit un effet de choc. La fluctuation des contraintes dans la dent provient de la variabilité de la charge.

$$F'_t = F_t K_A \quad K_A > 1$$

Le tableau suivant donne le facteur K_A pour différentes sources de puissance et différents récepteurs

Tableau : facteur d'application K_A

Machine entraînée machine d'entraînement	Uniforme	choc modéré	chocs violents
	Uniforme (Moteurs électriques. Turbine)	1.00	1.25
léger choc (Moteur multicylindre).	1.25	1.50	< 2.00
choc moyen (moteur monocylindre)	1.50	1.75	< 2.25

Annexe 5 : Facteur d'échelle K_s :

Le facteur de taille K_s est similaire au facteur de taille introduit pour la résistance à la fatigue. Les engrenages de grande taille ont une moindre résistance.

Annexe 6 : Facteur d'épaisseur de jante K_b :

Le facteur d'épaisseur de jante K_b a été récemment introduit par l'AGMA pour tenir compte de situations dans lesquelles un engrenage de grand diamètre, fait d'une jante et de rayons plutôt que d'un tambour solide a une faible épaisseur de jante. Ceux-ci peuvent périr à cause des contraintes radiales dans la jante avant rupture de la dent.

FIGURE 9-20 Rim thickness factor, K_B (Extracted from AGMA 2001-C95 Standard, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, with permission of the publisher, American Gear Manufacturers Association, 1500 King Street, Suite 201, Alexandria, VA 22314)

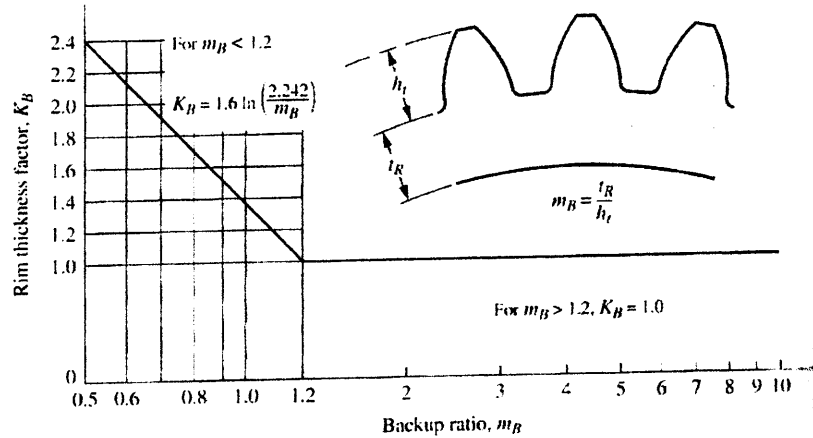


Figure : Facteur d'épaisseur de jante K_b

Annexe 7 : Facteur de roue folle K_I :

Le facteur K_I doit refléter le fait que les engrenages sur roue folle sont soumis à plus de cycles par unité de temps et plus de charges alternées de hautes amplitudes que leur homologues Montés fixes.

$K_I = 1,25$ pour les roues folles

$K_I = 1,00$ pour les roues fixes.

Annexe 8 : facteur de répartition des charges K_m :

Facteur de la répartition des charges qui explique la diffusion non-uniforme de la charge à travers la largeur de visage. Il dépend de l'exactitude du support, des roulements, du débattement d'axe et de l'exactitude des vitesses. (Tableau suivante).

Tableau : Facteur de répartition des charges K_m

Caractéristiques d'appui	Largeur de visage (millimètre) ¶			
	0-50	150	225	400 up
Les supports précis, petits dégagements de roulement, débattement minimum, précision embraye	1.3	1.4	1.5	1.8
Supports moins rigides, vitesses moins précises, contact à travers le plein visage	1.6	1.7	1.8	2.2
Exactitude et support tels que moins que le contact de plein-visage existe	¶Plus de 2.2	¶Plus de 2.2	¶Plus de 2.2	¶Plus de 2.2

Annexe 9 : facteur de conduite Y_ϵ :

L'ISO admet la relation très acceptable suivante :

$$Y_\epsilon = 0.25 + \frac{0.75}{\epsilon_\alpha}$$

Permettant de trouver très rapidement la valeur du rapport de conduite ϵ_α graphiquement.

Le rapport de conduite peut être calculé à partir de la relation empirique suivante :

$$\epsilon_\alpha = y_1 U_1 + y_2 U_2$$

Pour le pignon de caractéristiques : $m = 3$; $Z_1 = 20$; $\alpha = 20^\circ$

et du roue de : $m = 3$; $Z_2 = 30$; $\alpha = 20^\circ$

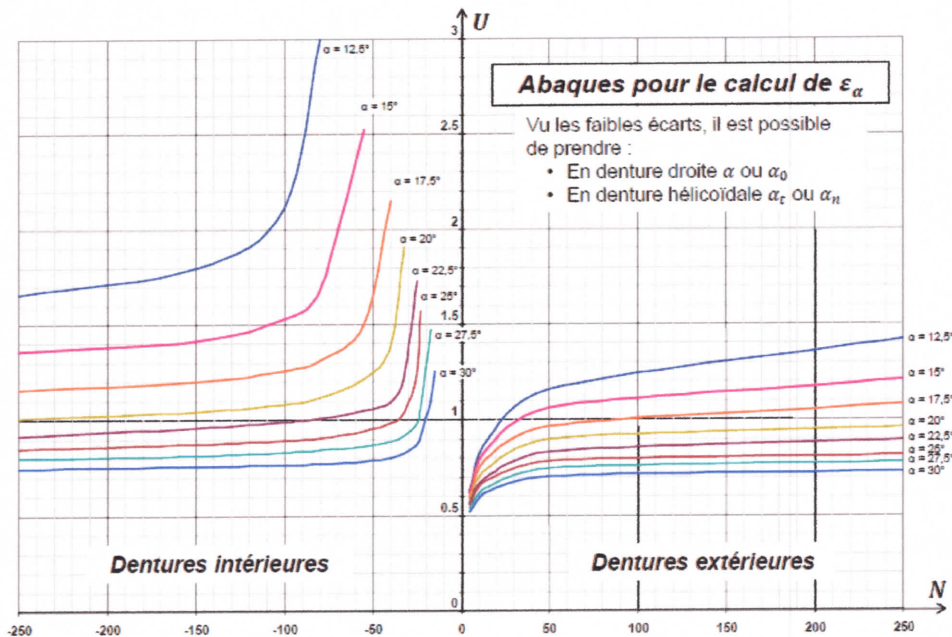
Où :

- $y_i = \frac{h_{a_i}}{m}$ $y_1 = \frac{h_{a_1}}{m} = 1$ $y_2 = \frac{h_{a_2}}{m} = 1$
- $N_i = \frac{Z_i}{y_i}$ $N_1 = Z_1 = 20$ $N_2 = Z_2 = 30$
- U_i est fonction de N_i

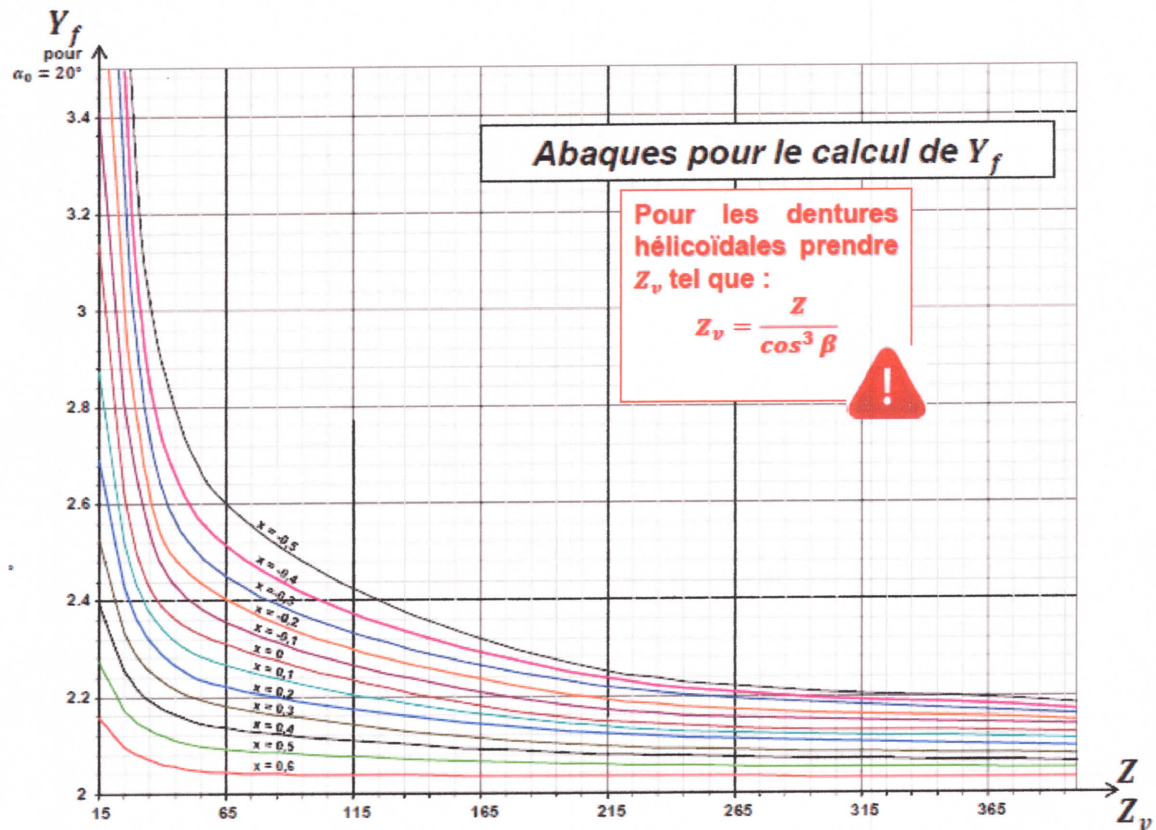
$$\epsilon_\alpha = 0.8 + 0.86 = 1.66$$

Ou :

$$\epsilon_\alpha = \frac{\sqrt{\left(\frac{d_{a_1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b_1}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{d_{a_2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b_2}}{2}\right)^2} - \left(\frac{d_{b_1}}{2} + \frac{d_{b_2}}{2}\right) \cdot \tan \alpha}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha} = 1.67$$



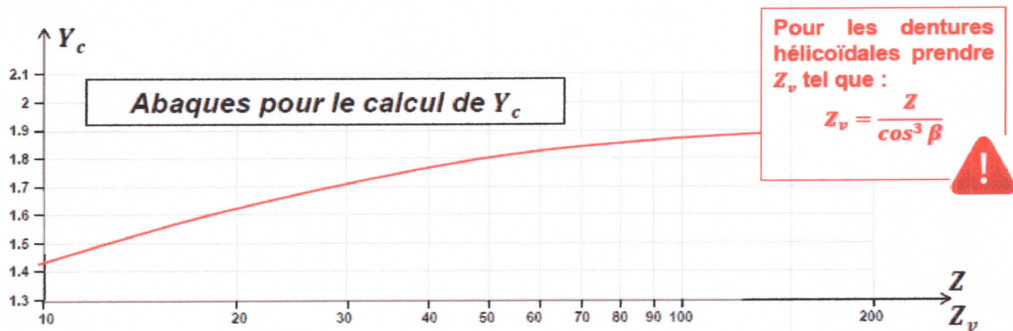
Annexe 10 : facteur de forme Y_f :



Pour l'engrenage de caractéristique : $m = 3$; $Z = 20$; $\alpha = 20^\circ$; $x = 0$

La valeur de facteur de forme est égal : $Y_f = 2.85$

Annexe 11 : facteur de concentration de contrainte Y_c :



Pour l'engrenage de caractéristique : $m = 3$; $Z = 20$; $\alpha = 20^\circ$

La valeur de facteur de concentration de contrainte est égale :

$$Y_c = 1.63$$

[1] **Technique de l'ingénieur**(B636-637-638-639) 1998/1999.

[2] **Engrenage** : conception-fabrication et mise en œuvre, par George Henriot -7^{ème} édition (DUNOD 1999).

[3]**Engrenage** : conception-fabrication et mise en œuvre, par George Henriot -8^{ème} édition (DUNOD).

[4] **conception de transmissions de puissance M3103b** -les engrenages- Mathieu Rossat-www.mathieurossat.fr.

[5] **Introduction aux engrenages a denture droites et hélicoïdales (partie 2)** –Pierre Duysinx-LTAS-ingénierie de véhicules terrestres- département Aérospatiales et mécanique –université de liège –année académique 2014-2015.

[6] **MARKOVIC, K. FRANULOVIC, M**, Contact stresses in teeth due to tip relief profile modification Journal of Engineering Review, Vol.31, 2011, pp. 19-26.

[7] **OYAGUE F**, Gearbox Reliability Collaborative (GRC) Description and Loading NREL, 2011.

