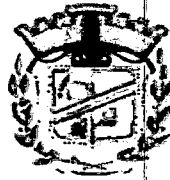
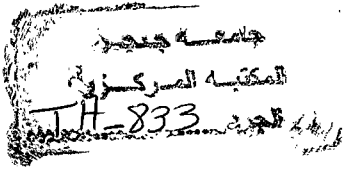


REPUBLIQUE ALGEREINNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



531/2

Université de Jijel  
Faculté des Sciences Exactes  
Des Sciences de la Nature et de la Vie  
Département de Physique

N° d'ordre : .....  
Série : .....

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

OPTION

Physique Théorique

Par

MEDJEMEM FATIMA

THEME

L'univers ellipsoïdale dans le scenario branaire

Soutenu le : ... / ... / 2013

Devant le jury :

Président :	A. Bouda	Prof.	Univ. Bejaia
Rapporteur :	K. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
Examineurs :	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel
	A. Benslama	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Invité :	S. Haouat	M.C.A.	Univ. Jijel

## Remerciements

Ce travail a été effectué au laboratoire de Physique Théorique de l'université de Jijel.

Je tiens à remercier profondément Monsieur Khireddine Nouicer Professeur à l'université de Jijel qui m'a fait l'honneur d'avoir accepté de diriger ce travail.

J'adresse mes respectueux remerciement à Monsieur A. Bouda, Professeur à l'université de Bejaia, d'avoir accepté la présidence du de notre jury.

Mes remerciement également à Monsieur A. Benslama Professeur à l'université Mentouri de Constantine, et à Melle Z. Belghobsi Professeur à l'université de Jije, et Monsieur A. Bounames Professeur à l'université de Jijel, pour l'honneur qu'ils me fait en acceptant d'examiner mon travail.

Mes remerciements les plus distingués vont aussi à mes enseignants tout le long de ma formation, et en particulier à Monsieur T. Boudjedaa Professeurs à l'université de Jijel.

Mes vifs remerciements à tous les membres LPT<sub>h</sub>, en particulier aux amis de la promotion pour tous les moments agréables.

Je remercie enfin, très chaleureusement, toute personne ayant contribué à la réalisation de ce travail de près ou loin.

A tous ceux qui surent me faire aimer la Physique.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduction de la cosmologie</b>	<b>5</b>
2.1	Cosmologie relativiste . . . . .	5
2.1.1	Métrique d'un espace-temps . . . . .	5
2.1.2	Géodésiques de l'espace-temps . . . . .	6
2.1.3	Équations du champ de gravitation . . . . .	8
2.1.3.1	Action de courbure et sa variation . . . . .	8
2.1.3.2	Action de matière et sa variation . . . . .	10
2.2	Équations fondamentales de la cosmologie relativiste . . . . .	10
2.2.1	Métrique de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	11
2.2.2	Paramètres cosmologiques . . . . .	12
2.2.3	Equation de conservation de l'énergie . . . . .	14
2.3	Appendice . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Univers ellipsoïdal à quatre dimensions</b>	<b>16</b>
3.1	Introduction . . . . .	16
3.1.1	Équations d'Einstein . . . . .	17
3.2	Équations de conservation de l'énergie . . . . .	19
3.2.1	Entropie à l'équilibre . . . . .	19
3.2.2	Excentricité d'un univers ellipsoïdal à quatre dimensions . . . . .	20

<b>4</b>	<b>Univers ellipsoïdal à cinq dimensions</b>	<b>22</b>
4.1	Introduction . . . . .	22
4.2	Excentricité d'un univers ellipsoïdal à cinq dimensions . . . . .	26
4.3	Appendice : les fonctions $F$ et $L$ . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Univers ellipsoïdal dans le modèle branaire de Dvali-Gabadadze-Poratti avec gravité modifiée</b>	<b>33</b>
5.1	Univers ellipsoïdal dans le modèle branaire de Dvali-Gabadadze-Poratti (DGP) . . . . .	33
5.1.1	Équations d'Einstein . . . . .	34
5.1.2	Excentricité . . . . .	37
5.2	Univers ellipsoïdal dans le modèle branaire de Dvali-Gabadadze-Poratti avec $f(R)$ -gravité . . . . .	41
5.2.1	Equations d'Einstein . . . . .	41
5.2.2	Excentricité . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Conditions de jonction d'Israël</b>	<b>52</b>
6.1	Première condition de jonction . . . . .	53
6.2	Deuxième condition de jonction . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>59</b>


# Introduction générale

# Chapter 1

## Introduction générale

En 1915, Einstein découvrit une nouvelle théorie de la gravitation qui apporte un changement à notre conception de l'espace et du temps et qui constitue actuellement la théorie de la relativité générale (RG). Cette théorie a déclenché une véritable révolution au sein des scientifiques puisqu'elle décrit la gravitation en termes uniquement géométriques. Aujourd'hui pour nous, l'univers est homogène et isotrope, et ces hypothèses constituent le principe cosmologique qui décrit la nature spatio-temporelle de l'univers. Il n'y a que trois types de géométries pour la partie spatiale de l'espace-temps qui soient compatibles avec les hypothèses de ce principe: La géométrie sphérique qui correspond à un univers fermé et fini, la géométrie hyperbolique décrivant un univers ouvert et infini, et enfin la géométrie euclidienne décrivant un univers plat. Ces trois géométries correspondent en fait à une courbure globale de l'univers; cette courbure est positive pour un univers ellipsoïdal, négative pour un hyperbolique et nulle pour un univers plat [1, 2]. Les observations de supernova de type Ia, les données des observations BAO (Oscillations Acoustiques Baryoniques), et le fond diffus cosmologique CMB (Cosmic Microwave Background)...indiquent que l'univers est entré tardivement dans une nouvelle phase d'expansion accélérée. Ce phénomène induit naturellement que l'univers a été dense et plus chaud par le passé, c'est là l'idée fondatrice de Big-bang [3, 6]. Pour décrire la dynamique de l'univers le modèle standard de la cosmologie est basé sur le concept de l'expansion et repose sur l'utilisation de la relativité générale. De l'explication de l'expansion on peut obtenir une forme d'énergie de nature inconnue, et il est considéré que l'univers est formé de 70% d'énergie sombre de nature inconnue, et 30% de matière sans pression. En effet les modèles  $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter) sont consistants avec les tests-observationnels, et permettent brillamment de donner une description effective de l'évolution de l'univers, mais ces modèles

souffrent des problèmes de coïncidence et d'ajustement fin de la constante cosmologique [7, 8]. Afin de résoudre ces problèmes et d'apporter une explication au mystère de l'accélération tardive de l'univers, d'autres théories de la gravitation ont été introduites, parmi lesquelles on peut citer les modèles de la gravité modifiée qui consistent à modifier à la base la théorie de la gravitation d'Einstein, mais qui doivent reproduire le comportement de la relativité générale à courtes échelles. Certains de ces modèles sont inspirés du modèle à dimensions supplémentaires comme le modèle DGP (Dvali, Gabadadze et Porrati), qui décrit une théorie de la gravité dans un espace-temps à cinq dimensions (5D)[9, 10]. Et pour savoir comment ces nouvelles théories pouvaient différer de la relativité générale, Starobinski a étudié dans le contexte de l'inflation un autre modèle appelé la théorie de la  $f(R)$ -gravité. Cette nouvelle théorie consiste à généraliser l'action d'Einstein en remplaçant le scalaire de Ricci  $R$  par une fonction arbitraire de ce dernier. Ce travail peut se faire pour le modèle d'un univers ellipsoïdal, où on va donner sa structure générale et quelques notions de sa dynamique. Nouveau paragraphe le but consacré par ce mémoire de magister est de calculer l'excentricité de l'univers. Sachant que la théorie de la  $f(R)$ -gravité ait été introduite principalement dans un espace-temps (4D), comment peut-on calculer l'excentricité d'un univers ellipsoïdal dans le scénario branaire à dimensions supplémentaires? Ce scénario branaire implique une utilisation prudente de la  $f(R)$ -gravité. L'organisation de ce mémoire est constituée d'une introduction générale avec une conclusion générale et quatre chapitres. Ainsi, on va aborder au 2ème chapitre un rappel de la relativité générale et de la cosmologie relativiste. Le 3ème chapitre est consacré au calcul de l'évolution de l'excentricité d'un univers ellipsoïdal à (4D). Dans le 4ème chapitre on étend notre étude à un univers ellipsoïdal à (5D) dans le cadre du scénario branaire de DGP et la  $f(R)$ -gravité, où on obtient l'évolution avec le temps de l'excentricité de l'univers.



Introduction  
de la cosmologie



# Chapter 2

## Introduction de la cosmologie

### 2.1 Cosmologie relativiste

Dans ce chapitre nous allons présenter les principes fondamentaux de la cosmologie relativiste, ainsi que les prédictions concernant l'évolution de l'univers. La description de la dynamique de l'univers nécessite une théorie relativiste de la gravitation qui est une propriété géométrique de l'espace-temps. Elle est donc basée sur la connaissance des composantes du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ . Ceci constitue la base de la relativité générale et de la cosmologie. Ainsi, le but principal de la cosmologie relativiste est de donner une description valide de la distribution de matière et d'énergie dans ce cadre géométrique de l'espace-temps.

#### 2.1.1 Métrique d'un espace-temps

La relativité restreinte considère un espace-temps de Minkowski à 4 dimensions décrit par un tenseur métrique de composantes  $\eta_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$ . Le carré de l'intervalle infinitésimal séparant 2 événements voisins s'écrit [1] :

$$dS^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

Cet intervalle est invariant sous les transformations de Lorentz associées aux changements de référentiels. Cet intervalle est dit de genre espace si  $dS^2 > 0$ , de genre lumière si  $dS^2 = 0$  et de genre temps si  $dS^2 < 0$ .

En relativité générale la métrique conserve la forme canonique caractéristique des espaces de Riemann, et est généralement écrite sous la forme suivante:

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

où  $g_{\mu\nu}$  est le tenseur métrique. Pour la suite, nous adopterons les unités naturelles  $\hbar = c = 1$ , par ailleurs; les indices tensoriels seront en lettres latines ( $i, j, \kappa, \dots$ ) pour les coordonnées spatiales, et en lettres grecques ( $\mu, \nu, \rho, \dots$ ) pour des coordonnées spatio-temporelles.

On peut généraliser les notions de tenseur et de vecteur qui sont définis comme suit: un objet mathématique  $A^{\mu\nu}$  est appelé tenseur sous les transformations des coordonnées  $x^\mu \rightarrow x'^\alpha$ , il se transforme selon les relations:

$$A^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A'^{\alpha\beta}(x), \quad (2.3)$$

$$A_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} A'_{\alpha\beta}(x), \quad (2.4)$$

Un objet  $A^\mu$  est appelé vecteur si dans un changement des coordonnées, il se transforme selon les relations:

$$A^\mu(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} A^\lambda(x'), \text{ pour un champ des vecteurs contravariants.}$$

$$A_\mu(x) = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} A_\lambda(x'), \text{ pour un champ des vecteurs covariants.} \quad (2.5)$$

## 2.1.2 Géodésiques de l'espace-temps

Pour décrire les équations du mouvement d'une particule dans un champ de gravitation en un point de l'espace-temps, il est nécessaire d'introduire la notion de dérivée covariante (en relativité générale, ceci conduit au principe de covariance) qui consiste à remplacer  $\eta_{\mu\nu}$  par  $g_{\mu\nu}$  et toutes les dérivées habituelles  $\partial_\mu$  par des dérivées covariantes  $D_\mu$ . En effet, pour un vecteur contravariant de composantes  $A^\mu$  on a [1]:

$$dA^\mu(x) = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (2.6)$$

alors la dérivée covariante  $DA^\mu$  est donnée par la relation suivante:

$$DA^\mu = \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu \right) dx^\lambda, \quad (2.7)$$

où  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$  sont les coefficients de connexion, ou symboles de Christoffel pour une variété différentielle Riemannienne.

En relativité restreinte, pour une particule libre on a l'équation du mouvement:

$$du^{\mu} = 0, \quad (2.8)$$

où  $u^{\mu}$  est la 4-vitesse définie par  $u^{\mu} = dx^{\mu}/ds$ . L'équation du mouvement décrivant les géodésiques de la particule en relativité générale est alors exprimée par:

$$Du^{\mu} = 0, \quad (2.9)$$

et en utilisant (2.7) on obtient:

$$du^{\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} u^{\nu} dx^{\lambda} = 0. \quad (2.10)$$

Enfin en divisant par  $ds$ , on obtient les équations du mouvement:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} = 0, \quad (2.11)$$

où les symboles de Christoffel pouvant être obtenus à partir du tenseur métrique et sont données par la relation:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (g_{\gamma\nu,\lambda} + g_{\gamma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\gamma}). \quad (2.12)$$

Introduisons maintenant la quantité  $R_{\mu\alpha\beta}^{\nu}$ , qui est un tenseur mixte de quatrième ordre, appelé le tenseur de courbure ou tenseur de Riemann, défini par:

$$R_{\mu\alpha\beta}^{\nu} = \partial_{\beta} \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} - \partial_{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\alpha}^{\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda}. \quad (2.13)$$

Nous pouvons aussi, définir par contraction du tenseur de Riemann, un nouveau tenseur symétrique de second ordre  $R_{\nu\beta}$  appelé tenseur de Ricci:

$$R_{\nu\beta} = R_{\nu\alpha\beta}^{\alpha} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.14)$$

et qui peut s'écrire en fonction des symboles de Christoffel comme:

$$R_{\nu\beta} = \partial_{\beta} \Gamma_{\nu\lambda}^{\lambda} - \partial_{\lambda} \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma}, \quad (2.15)$$

Si à présent nous contractons le tenseur de Ricci, nous obtenons le scalaire de Ricci:

$$R = g^{\nu\beta} R_{\nu\beta}, \quad (2.16)$$

et qu'on l'appelle aussi la courbure scalaire de l'espace-temps.

### 2.1.3 Équations du champ de gravitation

Les équations d'Einstein relient la géométrie de l'espace-temps au contenu en matière et en énergie de l'univers. Afin d'arriver à une telle description, nous définissons l'action totale en relativité générale comme étant la somme de deux contributions :

$$S_{\text{total}} = S_g + S_m, \quad (2.17)$$

où  $S_g$  représente l'action du champ de gravitation et  $S_m$  représente l'action de la matière.

#### 2.1.3.1 Action de courbure et sa variation

L'action de courbure, appelée action d'Einstein est de la forme:

$$S_g = \frac{-1}{2\mu^2} \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.18)$$

où  $\mu^2 = 8\pi G$ ,  $G$  est la constante gravitationnelle de Newton, et  $g$  est le déterminant du tenseur métrique.

La variation de l'action  $S_g$  par rapport à  $g_{\mu\nu}$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \frac{-1}{2\mu^2} \int \delta (\sqrt{-g} R) d^4x \\ &= \frac{-1}{2\mu^2} \int \delta (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \frac{-1}{2\mu^2} \int (R \delta \sqrt{-g} + R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta R_{\alpha\beta}) d^4x. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Afin d'aller plus loin dans nos calculs, nous allons utiliser quelques propriétés. En effet on a la relation:

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha},$$

à partir de laquelle on montre que:

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

De même on montre que:

$$\delta \ln |g| = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

En utilisant (2.20) et (2.21) le premier terme de l'équation (2.19) devient:

$$R \delta \sqrt{-g} = -\frac{R}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (2.22)$$

Pour le troisième terme, on utilise la relation définissant le tenseur de Ricci (2.13). On sait que  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  n'est pas un tenseur, mais  $\delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  est un tenseur, et la variation  $\delta R_{\alpha\beta}$  s'écrit alors:

$$\begin{aligned}\delta R_{\alpha\beta} &= -\delta\partial_\mu\Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \delta\partial_\beta\Gamma_{\alpha\mu}^\mu \\ &= -\partial_\mu\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \partial_\beta\delta\Gamma_{\alpha\mu}^\mu \\ &= -D_\mu(\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu) + D_\beta(\delta\Gamma_{\alpha\mu}^\mu).\end{aligned}\quad (2.23)$$

En utilisant la propriété de métrique compatible,  $D_\alpha g^{\beta\gamma}=0$ , on obtient:

$$\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \sqrt{-g}(-D_\mu(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu) + D_\beta(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^\mu)).\quad (2.24)$$

En permutant les indices  $\mu$  et  $\beta$  dans le dernier terme on obtient:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} &= \sqrt{-g}D_\mu(-g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu + g^{\alpha\mu}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\beta) \\ &= \sqrt{-g}D_\mu A^\mu.\end{aligned}\quad (2.25)$$

où

$$A^\mu = -g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu + g^{\alpha\mu}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\beta.\quad (2.26)$$

En utilisant maintenant le théorème d'Ostogradsky, et que les champs s'annulent sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$ , on montre que:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}d^4x &= \int_\Omega \sqrt{-g}D_\mu A^\mu d^4x \\ &= \oint_{\partial\Omega} \sqrt{-g}A^l ds_l \\ &= 0.\end{aligned}\quad (2.27)$$

En substituant tous les termes dans la variation de l'action gravitationnelle (2.19) on a alors:

$$\begin{aligned}\delta S_g &= \frac{-1}{2\mu^2} \int \left( R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \frac{-1}{2\mu^2} \int G_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x,\end{aligned}\quad (2.28)$$

où

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}.\quad (2.29)$$

est le tenseur d'Einstein. C'est un tenseur symétrique qui obéit à l'identité de Bianchi:

$$D_\nu G^{\mu\nu} = 0.\quad (2.30)$$

### 2.1.3.2 Action de matière et sa variation

L'action de matière est donnée par:

$$S_m = \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.31)$$

où  $\mathcal{L}_m$  est la densité lagrangienne qui décrit la matière dans l'espace-temps. En variant cette action par rapport au tenseur métrique on obtient:

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int \left( \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \mathcal{L}_m \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) d^4x \\ &= \frac{1}{2} \int \left( 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \end{aligned} \quad (2.32)$$

En introduisant le tenseur énergie-impulsion:

$$T_{\mu\nu} = \left( 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right), \quad (2.33)$$

la variation de l'action du champ de matière s'écrit alors:

$$\delta S_m = \int \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.34)$$

A partir du principe de moindre action:

$$\delta S_{\text{total}} = \delta S_g + \delta S_m = 0, \quad (2.35)$$

on obtient la relation:

$$\int \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x - \mu^2 \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \quad (2.36)$$

à partir de laquelle on déduit les équations d'Einstein du champ de la relativité générale:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

qui montrent le lien en la géométrie et la matière dans l'espace-temps.

## 2.2 Équations fondamentales de la cosmologie relativiste

D'abord il est important de rappeler le principe cosmologique : " *L'univers est homogène (identique à lui-même en tout point) et isotrope (identique à lui-même dans toutes les directions)* ".

Dans la structure de l'univers, on admet que les lois de la relativité générale d'Einstein liant la courbure de l'espace-temps à la présence de la matière, sont celles qui peuvent le mieux décrire la dynamique de notre univers.

## 2.2.1 Métrique de Friedmann-Robertson-Walker

Une conséquence mathématique du principe cosmologique est l'existence d'un système de coordonnées comobiles dans lequel la métrique à quatre dimensions de l'espace-temps homogène et isotrope qui décrit un univers en expansion prend la forme obtenue par Friedmann et Robertson-Walker (FRW)[1] :

$$dS^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\sigma^2, \quad (2.38)$$

où  $d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$  est la métrique spatiale,  $t$ ,  $r$ ,  $\theta$ , et  $\varphi$  les coordonnées par rapport à un observateur local, et  $r$  la coordonnée comobile entre deux points, à multiplier par le facteur d'échelle  $a(t)$ , et  $\kappa$  est une constante (variable discrète) caractérisant la courbure de l'univers. Le facteur d'échelle  $a(t)$  caractérise l'expansion de l'univers. Les composantes du tenseur métrique s'écrivent alors:

$$g_{\alpha\beta} = (1, -a^2 \frac{1}{1-\kappa r^2}, -a^2 r^2, -a^2 r^2 \sin^2 \theta). \quad (2.39)$$

Maintenant, on déduit les symboles de Christoffel non nuls:

$$\Gamma_{ij}^t = a\dot{a}\tilde{g}_{ij}, \quad \Gamma_{jt}^i = \Gamma_{jt}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}, \quad (2.40)$$

où  $\tilde{g}_{ij} = (\frac{1}{1-\kappa r^2}, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ . A partir des symboles de Christoffel, on déduit les composantes du tenseur de Ricci:

$$R_{tt} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ti} = 0, \quad R_{ij} = -(2\dot{a}^2 + \ddot{a}a + 2\kappa)\tilde{g}_{ij}, \quad (2.41)$$

et le scalaire de Ricci ( $R = G_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ) est donné par:

$$R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right). \quad (2.42)$$

Pour un fluide parfait dont le tenseur énergie-impulsion est donnée par  $T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}p$ , où  $\rho$  et  $p$  sont respectivement sa densité d'énergie et sa pression, et en remplaçant dans la composante (0,0) des équations de mouvement d'Einstein (2.37), on obtient alors la première équation de Friedmann:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.43)$$

où  $\kappa = 0, +1, -1$  respectivement pour un univers FRW plat, fermé et ouvert. En effet l'évolution de l'univers est différente selon les valeurs de  $\kappa$  [8].

A partir des composantes  $(i, j)$  des équations d'Einstein (2.37), on obtient la deuxième équation de Friedmann donnant le taux d'accélération de l'expansion de l'univers:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G (\rho + 3p). \quad (2.44)$$

En effet, l'univers est en expansion accélérée si  $\ddot{a} > 0$  correspondant  $\rho + 3p < 0$ . Cette dernière condition viole la condition d'énergie forte (SEC).

Les équations fondamentales de la cosmologie sont donc constituées des deux équations de Friedmann (2.43) et (2.44), avec une équation d'état  $p = f(\rho)$  à spécifier.

## 2.2.2 Paramètres cosmologiques

On peut définir les paramètres cosmologiques essentiels du modèle cosmologique de Friedmann-Robertson-Walker qui décrivent le contenu et la structure de l'univers.

- *Constante de Hubble*

Les paramètres réduits permettent de définir une équation encore plus simple. On d'abord définit le paramètre de Hubble:

$$H(t) \equiv \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt}, \quad (2.45)$$

et pour aujourd'hui ( $t = t_0$ ), on a la constante de Hubble:

$$H_0 \equiv \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} \Big|_{t_0}. \quad (2.46)$$

- D'après le modèle cosmologique standard, l'expansion de l'univers, dans le passé lointain, est dominée par la matière relativiste d'équation d'état  $p = \frac{\rho}{3}$  et un facteur d'échelle  $a(t) \sim t^{1/2}$ .

- Dans le passé proche, l'expansion est par la matière non relativiste d'équation d'état  $p = 0$  et de facteur d'échelle dominée  $a(t) \sim t^{2/3}$ .



- Paramètre de densité

En général, l'évolution du facteur d'échelle est déterminée par l'équation de Friedmann (2.43) :

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho(t), \quad (2.47)$$

où  $\rho(t)$  la densité d'énergie est la somme de plusieurs composantes qui varient différemment avec  $t$ . On peut définir les paramètres cosmologiques décrivant le contenu et la structure de l'univers qui sont respectivement la densité d'énergie de matière, de rayonnement et de l'énergie du vide [1, 11] :

$$\Omega_m^{(0)} \equiv \frac{\rho_m^{(0)}}{\rho_{cr}^{(0)}} \equiv \frac{8\pi G}{3 H_0^2} \rho_m^{(0)}, \quad (2.48)$$

$$\Omega_r^{(0)} \equiv \frac{\rho_r^{(0)}}{\rho_{cr}^{(0)}} \equiv \frac{8\pi G}{3 H_0^2} \rho_r^{(0)}, \quad (2.49)$$

$$\Omega_\Lambda^{(0)} \equiv \frac{\rho_\Lambda^{(0)}}{\rho_{cr}^{(0)}} \equiv \frac{\Lambda}{3 H_0^2}, \quad (2.50)$$

où la densité d'énergie critique est définie par:

$$\rho_{cr}^{(0)} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

- Tenseur d'énergie-impulsion

La forme générale du tenseur des contraintes d'un fluide parfait isotropique de densité d'énergie  $\rho$  et de pression  $p$  est donné par:

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho) U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} p, \quad (2.51)$$

où  $U_\mu$  est la quadri-vitesse du fluide. Les composantes du tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait sont données alors par:

$$T_\nu^\mu = \text{diag} (+\rho, -p, -p, -p). \quad (2.52)$$

En se rappelant que  $U^\mu U_\mu = -1$  et  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$ , est facile de montrer que:

$$\begin{aligned} T &= g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ &= -\rho + 3p. \end{aligned} \quad (2.53)$$

### 2.2.3 Equation de conservation de l'énergie

Sachant que le tenseur d'Einstein vérifie l'identité de Bianchi on déduit alors:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0, \quad (2.54)$$

qui exprime la loi de conservation du tenseur énergie-impulsion. On peut expliciter cette loi comme suit:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\mu} T^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\mu 0} T^0_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu 0} T^{\mu}_{\lambda},$$

qui pour  $\mu = 0$  et en utilisant les expressions des coefficients de Christoffel, on obtient:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (2.55)$$

que l'on écrit aussi sous la forme:

$$a^{-3} \frac{\partial(\rho a^3)}{\partial t} = -3 \frac{\dot{a}}{a} p, \quad (2.56)$$

et qui exprime l'équation de conservation de la densité d'énergie de l'univers.

#### - Équations d'état

Tous les fluides parfaits utilisés en cosmologie conduisent à une équation d'état très simple entre la densité d'énergie et la pression, de la forme  $p = \omega \rho$  où  $\omega$  est le paramètre d'état.

En utilisant la forme (2.55), on obtient:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.57)$$

en intégrant par rapport à  $t$  on a la loi:

$$\rho \propto a^{-3(\omega+1)}. \quad (2.58)$$

Cette équation détermine l'évolution de la densité d'énergie avec le facteur d'échelle.

Par exemple si  $\omega = 0$  (matière non relativiste) la variation est  $a^{-3}$ , si  $\omega = \frac{1}{3}$  (matière relativiste) la variation est  $a^{-4}$ , et enfin pour un univers est dominé par l'énergie du vide on a  $\omega = -1$  et par conséquent  $\rho = \text{const.}$

## 2.3 Appendice

La variation  $\delta(\sqrt{-g})$  est donnée par:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \delta\left([-\det g_{\mu\nu}]^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \frac{\delta[-\det g_{\mu\nu}]}{\sqrt{-g}}. \quad (2.59)$$

Pour calculer la différentielle du déterminant on utilise la relation suivante:

$$\delta[-\det A] = -D(\det A) \delta A = \text{Tr}(-\tilde{A}^T \delta A). \quad (2.60)$$

Si  $A$  est inversible  $\tilde{A}^T = \det A A^{-1}$  on a:

$$\delta[-\det A] = \text{Tr}(-\det A A^{-1} \delta A), \quad (2.61)$$

avec  $A = g_{\mu\nu}$  et  $A^{-1} = g^{\mu\nu}$  on obtient:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.62)$$



Univers ellipsoïdal  
à quatre dimensions

## Chapter 3

# Univers ellipsoïdal à quatre dimensions

### 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'exposer brièvement la dynamique d'un univers ellipsoïdal à quatre dimensions. On va donner sa structure générale, et le calcul de l'excentricité de cet univers.

La métrique de l'espace-temps d'un univers ellipsoïdal s'écrit sous la forme de (FRW) [12, 3, 4, 5] :

$$dS^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2) - c^2(t) dz^2, \quad (3.1)$$

où on a introduit deux facteurs d'échelle  $a(t)$  et  $c(t)$  qui sont des fonctions du temps cosmique  $t$ , et où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées du plan symétrique. L'excentricité de l'univers est alors donnée par [13] :

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}. \quad (3.2)$$

En récrivant explicitement la métrique en fonction de l'excentricité on a :

$$dS^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2) - (1 - e^2(t)) a^2(t) dz^2. \quad (3.3)$$

On observe que l'univers est oblate quand  $a \geq c$ , ou prolata quand  $a \leq c$ . L'excentricité pour une sphère prolata ( $a \leq c$ ) est donnée par une autre relation [13] :

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2}. \quad (3.4)$$

En faisant l'hypothèse d'un fluide parfait, la forme du tenseur d'énergie-impulsion de l'univers peut être en général donnée par:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p_{\parallel}, -p_{\parallel}, -p_{\perp}), \quad (3.5)$$

où  $p_{\parallel}$  est la composante tangentielle et  $p_{\perp}$  la composante perpendiculaire de la pression par rapport au plan de symétrie  $(x, y)$ .

### 3.1.1 Équations d'Einstein

Dans qui suit nous allons déduire les équations de mouvement d'Einstein, en utilisant la méthode basée sur les équations d'Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (3.6)$$

La densité Lagrangienne associée à la métrique (3.1) est donnée par:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \dot{t}^2 - a^2(t) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - c^2(t) \dot{z}^2 \right). \quad (3.7)$$

On montre que pour la coordonnée  $t$ , les équations d'Euler-Lagrange conduisent à:

$$\ddot{t} + aa (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + cc \dot{z}^2 = 0. \quad (3.8)$$

Sachant aussi qu'à partir des équations des géodésiques on a l'équation:

$$\ddot{t} + \Gamma_{\alpha\beta}^t \dot{x}_{\alpha} \dot{x}_{\beta} = 0, \quad (3.9)$$

qui explicitement s'écrit sous la forme:

$$\ddot{t} + \Gamma_{00}^0 \dot{t}^2 + \Gamma_{11}^0 \dot{x}^2 + \Gamma_{22}^0 \dot{y}^2 + \Gamma_{33}^0 \dot{z}^2 = 0. \quad (3.10)$$

En comparant cette équation avec (3.8), on déduit les symboles de Christoffel non nuls:

$$\Gamma_{11}^0 = aa, \quad \Gamma_{22}^0 = aa, \quad \Gamma_{33}^0 = cc, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{c}}{c}, \quad (3.12)$$

et que les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont alors données par:

$$R_{00} = - \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} \right), \quad (3.13)$$

$$R_{11} = \dot{a}^2 + \ddot{a} a + \frac{\dot{c}}{c} \dot{a} a, \quad (3.14)$$

$$R_{22} = \dot{a}^2 + \ddot{a} a + \frac{\dot{c}}{c} \dot{a} a, \quad (3.15)$$

$$R_{33} = \dot{c} c + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{c} c. \quad (3.16)$$

La courbure scalaire s'exprime alors comme:

$$R = -4 \frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\ddot{c}}{c} - 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 4 \frac{\dot{c} \dot{a}}{c a}. \quad (3.17)$$

En introduisant l'excentricité à travers la relation  $c^2 = (1 - e^2) a^2$ , on obtient:

$$R = -6 \frac{\ddot{a}}{a} - 6 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 8 \frac{\dot{a}}{a} \frac{e \dot{e}}{(1 - e^2)} + \frac{2 e \ddot{e}}{(1 - e^2)} + \frac{2 \dot{e}^2}{(1 - e^2)} + \frac{2 e^2 \dot{e}^2}{(1 - e^2)^2}. \quad (3.18)$$

En remplaçant dans les équations de mouvement d'Einstein on a les équations suivantes:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\dot{a}}{a} \frac{e \dot{e}}{(1 - e^2)} = \frac{8\pi}{3} G \rho, \quad (3.19)$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{e \dot{e}}{(1 - e^2)} - \frac{e \ddot{e}}{(1 - e^2)} - \frac{\dot{e}^2}{(1 - e^2)^2} = -8\pi G p_{\parallel}, \quad (3.20)$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G p_{\perp}, \quad (3.21)$$

qui généralisent les équations de Friedmann (2.43 - 2.44).

En utilisant maintenant la conservation du tenseur d'énergie-impulsion, on montre que la loi de conservation de la densité d'énergie est maintenant donnée par:

$$\dot{\rho} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) (\rho + p_{\parallel}) + \left( \frac{\dot{a}}{a} - 2 \frac{e \dot{e}}{(1 - e^2)} \right) (\rho + p_{\perp}) = 0. \quad (3.22)$$

Si on pose  $e = 0$ , on a  $p_{\parallel} = p_{\perp} = p$  et alors:

$$\dot{\rho} + 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) (\rho + p) = 0,$$

qui est la conservation du tenseur d'énergie-impulsion pour un univers FRW isotrope et homogène.

## 3.2 Équations de conservation de l'énergie

### 3.2.1 Entropie à l'équilibre

En principe, le tenseur d'énergie-impulsion total  $T_{\nu}^{\mu}$  peut être séparé en deux parties [13] :

- une contribution Anisotrope

$$(T_A)_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho^A, -p_{\parallel}^A, -p_{\parallel}^A, -p_{\perp}^A). \quad (3.23)$$

- une contribution Isotrope

$$(T_I)_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho^I, -p_{\parallel}^I, -p_{\parallel}^I, -p_{\perp}^I). \quad (3.24)$$

Introduisons maintenant l'entropie de l'univers. Ecrivons d'abord l'équation de définition  $dS = d\left((\rho + p) \frac{V}{T}\right)$ , où  $T$ ,  $p$  et  $V$  sont respectivement la température, la pression et le volume du système considéré. Cette équation permet de déduire que l'entropie s'écrit comme:

$$S = (\rho + p) \frac{V}{T}. \quad (3.25)$$

Il est alors facile de déduire les relations suivantes:

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\rho + p}{T}, \quad (3.26)$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT}, \quad (3.27)$$

qui conduisent à la relation donnant la variation de la pression du fluide cosmique en fonction de la température:

$$T \frac{dp(T)}{dT} = \rho(T) + p(T). \quad (3.28)$$



### 3.2.2 Excentricité d'un univers ellipsoïdal à quatre dimensions

On a d'abord la relation:

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{\rho}}{\rho + p} + \frac{\dot{V}}{V}. \quad (3.29)$$

Or, en utilisant la relation (le facteur de proportionnalité n'est pas essentiel):

$$V \sim \sqrt{1 - e^2} a^3, \quad (3.30)$$

on obtient:

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{\rho}}{\rho + p} + 3 \frac{\dot{a}}{a} - 2 \frac{e \dot{e}}{1 - e^2}. \quad (3.31)$$

En considérant que l'expansion de l'univers est adiabatique ( $\dot{S} = 0$ ), on obtient finalement l'équation de conservation pour la partie isotrope:

$$\dot{\rho}^I + 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) (\rho^I + p^I) - 2 \frac{e \dot{e}}{(1 - e^2)} (\rho^I + p^I) = 0, \quad (3.32)$$

et en utilisant l'équation d'état du type  $p^I = \omega \rho^I$  on a:

$$\dot{\rho}^I + 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) (1 + \omega) \rho^I - 2 \frac{e \dot{e}}{(1 - e^2)} (1 + \omega) \rho^I = 0. \quad (3.33)$$

En intégrant cette équation on montre que:

$$\rho^I \propto (1 - e^2)^{-(\omega+1)} a^{-3(\omega+1)}. \quad (3.34)$$

Pour un univers dominé par la matière non-relativiste où  $p^I = 0$ , la densité d'énergie suit alors la loi

$$\rho^I \propto (1 - e^2)^{-1} a^{-3}. \quad (3.35)$$

Pour un univers dominé par le rayonnement où  $p^I = \rho^I / 3$ , on a la loi:

$$\rho^I \propto (1 - e^2)^{-\frac{4}{3}} a^{-4}. \quad (3.36)$$

De la même manière, on montre que l'équation de conservation pour la partie anisotrope est donnée par [13, 14]:

$$\dot{\rho}^A + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) (\rho^A + p_{\parallel}^A) + \left( \frac{\dot{a}}{a} - 2 \frac{e \dot{e}}{(1 - e^2)} \right) (\rho^A + p_{\perp}^A) = 0. \quad (3.37)$$

Les équations de mouvement (3.20), (3.21) et (3.37) s'écrivent comme:

$$\frac{d}{dt} (\dot{e}e) + 3H \dot{e}e = 16\pi G \rho^A, \quad (3.38)$$

$$H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \rho^A, \quad (3.39)$$

$$\dot{\rho}^A + 4H \rho^A = 0, \quad (3.40)$$

la dernière équation admet la solution suivante:

$$\rho^A \propto a^{-4}. \quad (3.41)$$

Pour un passé proche on a  $(a(t) \sim t^{2/3}$  et  $H = (2/3)t$ ). En utilisant les paramètres:

$$\Omega_{(0)}^A = \frac{\rho^A(t_0)}{\rho_{cr}^{(0)}}, \quad (3.42)$$

$$\rho_{cr}^{(0)} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (3.43)$$

la solution de l'équation (3.38) est donnée par:

$$e^2 = 8 \Omega_{(0)}^A \left( 1 - 3a^{-1} + 2 a^{-\frac{3}{2}} \right), \quad (3.44)$$

avec

$$a(t) < a_0(t) = 1. \quad (3.45)$$

En ne gardant que le terme dominant, l'excentricité d'un univers dominé par la matière non relativiste est alors donnée par:

$$e^2 \sim 16 \Omega_{(0)}^A a^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.46)$$



Univers ellipsoïdal  
à cinq dimensions

## Chapter 4

# Univers ellipsoïdal à cinq dimensions

### 4.1 Introduction

Considérons un espace-temps à cinq dimensions décrit par la métrique [13, 14] :

$$dS^2 = \tilde{g}_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - b^2 dy^2. \quad (4.1)$$

Les indices  $\mu, \nu$  varient de 0 à 3; les indices A et B varient de 0 à 4;  $x^0$  est la coordonnée temporelle et  $x^1, x^2, x^3$  les coordonnées spatiales, et  $y$  est la coordonnée supplémentaire. On peut expliciter l'intervalle d'espace-temps  $dS^2$  comme suit:

$$dS^2 = n^2(\tau, y) d\tau^2 - a^2(\tau, y) (dx_1^2 + dx_2^2) - (1 - e^2(\tau, y)) a^2(\tau, y) dx_3^2 - b^2(\tau, y) dy^2. \quad (4.2)$$

Les équations d'Einstein prennent la forme habituelle:

$$\tilde{G}_{AB} \equiv \tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2} \tilde{R} \tilde{g}_{AB} \equiv k^2 \tilde{T}_{AB}, \quad (4.3)$$

où  $\tilde{R}_{AB}$  est le tenseur de Ricci en cinq dimensions, et la courbure scalaire est donnée par:

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{AB} \tilde{R}_{AB}. \quad (4.4)$$

La constante  $k$  est relié à la constante de Newton à cinq dimensions:

$$k^2 = 8\pi G_{(5)} = M_{(5)}^{-3}, \quad (4.5)$$

où  $M_{(5)}$  est la masse de Planck réduite à cinq dimensions.

Le tenseur d'énergie-impulsion peut être décomposé en deux parties:

$$\tilde{T}_B^A = \tilde{T}_B^A|_{\text{bulk}} + T_B^A|_{\text{brane}}, \quad (4.6)$$

où  $\tilde{T}_B^A|_{\text{bulk}}$  est le tenseur d'énergie-impulsion de la matière dans le volume à 5D, qu'on peut aussi décomposer en deux parties :

une contribution Isotrope donnée par

$$(\tilde{T}_I)_B^A|_{\text{bulk}} = \rho_B^I \text{diag}(+1, -1, -1, -1, -1), \quad (4.7)$$

une contribution Anisotrope donnée par

$$(\tilde{T}_A)_B^A|_{\text{bulk}} = \text{diag}(\rho_B^A, -p_B^A_{\parallel}, -p_B^A_{\parallel}, -p_B^A_{\perp}, -p_B^A_{\perp}), \quad (4.8)$$

où la densité d'énergie et les pressions dans le volume sont indépendantes de la cinquième dimension  $y$ .

Le second terme  $T_B^A|_{\text{brane}}$  est le tenseur d'énergie-impulsion de la matière confinée dans la brane (par exemple, l'hypersurface située à  $y = 0$ )

$$T_B^A|_{\text{brane}} = \frac{\delta(y)}{b} \text{diag}(\rho, -p_{\parallel}, -p_{\parallel}, -p_{\perp}, 0). \quad (4.9)$$

En utilisant l'équation (3.1) on montre que les éléments non nuls du tenseur d'Einstein  $\tilde{G}_B^A$  sont donnés par:

$$\tilde{G}_{I0}^0 = \frac{3}{b^2} \left( -\frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'b'}{ab} + \frac{ea'e'}{a(1-e^2)} - \frac{a''}{a} \right) + 3 \frac{\dot{a}}{an^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{ee\dot{a}}{an^2(1-e^2)}, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{I1}^1 = \tilde{G}_{I2}^2 &= \frac{1}{b^2} \left( -\frac{a'^2}{a^2} + \frac{2a'b'}{ab} + \frac{2ea'e'}{a(1-e^2)} - 2\frac{a'n'}{an} + \frac{b'n'}{bn} - 2\frac{a''}{a} - \frac{n''}{n} \right) \\ &+ \frac{1}{n^2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{2ee\dot{a}}{a(1-e^2)} - 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} + \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\tilde{G}_{I3}^3 = \frac{1}{b^2} \left( -\frac{a'^2}{a^2} + \frac{2a'b'}{ab} - 2\frac{a'n'}{an} + \frac{b'n'}{bn} - 2\frac{a''}{a} - \frac{n''}{n} \right), \quad (4.12)$$

$$\tilde{G}_{I5}^0 = \frac{1}{n^2} \left( \frac{3n'\dot{a}}{an} + \frac{3a'\dot{b}}{ab} - \frac{ea'\dot{e}}{a(1-e^2)} + \frac{3ee'\dot{a}}{a(1-e^2)} - \frac{3\dot{a}'}{a} \right), \quad (4.13)$$

$$\tilde{G}_{I0}^5 = \frac{1}{b^2} \left( -\frac{3n'\dot{a}}{an} - \frac{3a'\dot{b}}{ab} + \frac{ea'\dot{e}}{a(1-e^2)} - \frac{3ee'\dot{a}}{a(1-e^2)} + \frac{3\dot{a}'}{a} \right), \quad (4.14)$$

$$\tilde{G}_{I5}^5 = \frac{1}{n^2} \left( \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3e\dot{e}\dot{a}}{a(1-e^2)} - \frac{3\dot{a}\dot{n}}{an} + \frac{3\ddot{a}}{a} \right) + \frac{1}{b^2} \left( -\frac{3a'^2}{a^2} + \frac{ea'e'}{a(1-e^2)} - \frac{3a'n'}{an} \right), \quad (4.15)$$

En supposant qu'il n'y a pas de flux de matière de long de la cinquième dimension. On a la condition:

$$(\tilde{T}_I)_{05} = 0, \quad (4.16)$$

et on déduit, à partir des équations d'Einstein, que:

$$\tilde{G}_{I5}^0 = \tilde{G}_{I0}^5 = 0. \quad (4.17)$$

Ensuite, les composantes (0,0) et (5,5) des équations d'Einstein dans le bulk peuvent être réécrites sous la forme simple:

$$F' = \frac{dF}{dy} \simeq \frac{2a'a^3}{3} (1-e^2) k^2 \tilde{T}_{I0}^0, \quad (4.18)$$

$$\dot{F} = \frac{dF}{d\tau} \simeq \frac{2\dot{a}a^3}{3} (1-e^2) k^2 \tilde{T}_{I5}^5, \quad (4.19)$$

où F est une fonction de  $\tau$  et y définie par:

$$F = (1-e^2) \left[ \left( \frac{\dot{a}a}{n} \right)^2 - \left( \frac{a'a}{n} \right)^2 \right]. \quad (4.20)$$

En utilisant la forme (4.20) et intégration de l'équation (4.18) on obtient la relation

$$\left( \frac{\dot{a}}{an} \right)^2 = \left( \frac{a'}{ab} \right)^2 + \frac{k^2 \tilde{T}_{I0}^0}{6} - \frac{k^2 \int a^4 d(1-e^2)}{6a^4(1-e^2)} \tilde{T}_{I0}^0 + \frac{C_1}{a^4(1-e^2)}, \quad (4.21)$$

où  $C_1$  est une constante d'intégration.

Nous allons maintenant considérer la contribution anisotrope du tenseur énergie-impulsion. La partie anisotrope du tenseur d'Einstein est donnée par les composantes suivantes:

$$\tilde{G}_{A0}^0 = \frac{1}{b^2(1-e^2)} \left( ee'' + \frac{e'^2}{(1-e^2)} - \frac{eb'e'}{b} + \frac{ea'e'}{a} \right) - \frac{1}{n^2(1-e^2)} \left( \frac{e\dot{e}\dot{a}}{a} + \frac{e\dot{b}\dot{e}}{b} \right), \quad (4.22)$$

$$\tilde{G}_{A1}^1 = \tilde{G}_{A2}^2 = \frac{1}{b^2(1-e^2)} \left( \frac{ea'e'}{a} - \frac{eb'e'}{b} + \frac{e'^2}{(1-e^2)} - \frac{a'n'}{an} + ee'n' + ee'' \right) - \frac{1}{n^2(1-e^2)} \left( \frac{ea\dot{e}}{a} + \frac{eb\dot{e}}{b} + \frac{\dot{e}^2}{(1-e^2)} - \frac{e\dot{e}n}{n} + e\ddot{e} \right), \quad (4.23)$$

$$\tilde{G}_{A3}^3 = 0, \quad (4.24)$$

$$\tilde{G}_{A5}^0 = \frac{1}{n^2(1-e^2)} \left( \frac{ee'\dot{a}}{a} - \frac{ee'\dot{b}}{b} + \frac{ea'\dot{e}}{a} + \frac{e'\dot{e}}{(1-e^2)} - \frac{en'\dot{e}}{n} + ee' \right), \quad (4.25)$$

$$\tilde{G}_{A0}^5 = \frac{1}{b^2(1-e^2)} \left( \frac{ee'\dot{a}}{a} + \frac{ee'\dot{b}}{b} - \frac{ea'\dot{e}}{a} - \frac{e'\dot{e}}{(1-e^2)} + \frac{en'\dot{e}}{n} - ee' \right), \quad (4.26)$$

$$\tilde{G}_{A5}^5 = \frac{1}{(1-e^2)} \left( \frac{ea'e'}{ab^2} + \frac{ee'n'}{b^2} - \frac{ea\dot{e}}{an^2} - \frac{\dot{e}^2}{n^2} + \frac{e\dot{e}n}{n^3} - \frac{e\ddot{e}}{n^2} \right). \quad (4.27)$$

On suppose également que le long de la cinquième dimension on a la condition:

$$(\tilde{T}_{\mathcal{A}})_{05} = 0, \quad (4.28)$$

et par conséquent:

$$\tilde{G}_{A5}^0 = \tilde{G}_{A0}^5 = 0. \quad (4.29)$$

En utilisant l'équation (4.22) et (4.27) on obtient:

$$L' = \frac{dL}{dy} \simeq 2ee' (1-e^2) a^2 k^2 \tilde{T}_{A0}^0, \quad (4.30)$$

$$\dot{L} = \frac{dL}{d\tau} \simeq 2e\dot{e} (1-e^2) a^2 k^2 \tilde{T}_{A5}^5, \quad (4.31)$$

où L est une fonction de  $\tau$  et y donnée par:

$$L = \left( \frac{aee'}{b} \right)^2 - \left( \frac{ae\dot{e}}{n} \right)^2, \quad (4.32)$$

En utilisant (4.32) et l'intégration de (4.30) on arrive à la relation:

$$\left( \frac{e\dot{e}}{(1-e^2)n} \right)^2 = \left( \frac{ee'}{(1-e^2)b} \right)^2 + \frac{1}{2} k^2 \tilde{T}_{A0}^0 - k^2 \int \frac{(1-e^2) da^2}{a^2 (1-e^2)^2} \tilde{T}_{A0}^0 + \frac{C_2}{a^2 (1-e^2)}. \quad (4.33)$$

où  $C_2$  est une autre constante d'intégration.



## 4.2 Excentricité d'un univers ellipsoïdal à cinq dimensions

Nous allons maintenant prendre en considération la position des branes dans le volume à l'aide des conditions de jonction d'Israël. Le tenseur de courbure extrinsèque d'une hypersurface (par exemple celle définie en  $y = 0$ ) est défini par la relation:

$$K_{\mu\nu} = \partial_y g_{\mu\nu} / 2. \quad (4.34)$$

La condition de jonction d'Israël en  $y = 0$  exprime que [15, 10]:

$$[K_{\mu\nu} - K g_{\mu\nu}]_y = -\frac{k^2}{2} T_{\mu\nu}, \quad (4.35)$$

où  $K$  est le scalaire de courbure extrinsèque:

$$K = K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}, \quad (4.36)$$

et  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur d'énergie-impulsion sur les branes. Ce qui donne:

$$[Q] = Q(0^+) - Q(0^-), \quad (4.37)$$

où  $Q$  est une fonction, d'où à partir de la surface ( $y = 0$ ) on a:

$$Q(0^+) = -Q(0^-), \quad (4.38)$$

donc

$$[Q] = 2Q(0^+) = 2Q(0^-), \quad (4.39)$$

de l'équation (4.39) on déduit:

$$[K_{\mu\nu}] = 2K_{\mu\nu}(0^+) |_{y \rightarrow 0^+} = 2K_{\mu\nu}(0^-) |_{y \rightarrow 0^-}, \quad (4.40)$$

d'où les relations:

$$\begin{cases} [a'] = 2a'(0^+) |_{y \rightarrow 0^+} \\ [n'] = 2n'(0^+) |_{y \rightarrow 0^+} \\ [e'] = 2e'(0^+) |_{y \rightarrow 0^+} \end{cases} \quad (4.41)$$

On a

$$[K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^-] = -k^2 \left( T_{\mu\nu}^{\text{brane}} - \frac{T}{3} g_{\mu\nu} \right), \quad (4.42)$$

d'où à partir de l'équation (4.40):

$$K_{\mu\nu} = -\frac{k^2}{2} \left( T_{\mu\nu}^{\text{brane}} - \frac{T}{3} g_{\mu\nu} \right), \quad (4.43)$$



avec

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} P, \quad (4.44)$$

$$T_\nu^\mu = \text{diag} (\rho, -p, -p, -p), \quad (4.45)$$

où  $U^\mu U_\mu = +1$ , il est facile de montrer que:

$$T_\mu^\mu = T = \rho - 3p. \quad (4.46)$$

où

$$p = -2 p_{\parallel} - p_{\perp}. \quad (4.47)$$

D'un autre coté on a:

$$K_\nu^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \partial_y g_{\mu\nu}, \quad (4.48)$$

et

$$K_\nu^\alpha = g^{\alpha\mu} K_{\mu\nu} = \frac{-k^2}{2} \left( T_\nu^\alpha - \frac{T}{3} \delta_\nu^\alpha \right). \quad (4.49)$$

En utilisant l'équation (4.48) on obtient:

$$K_\nu^\alpha = \left( \frac{n'}{b_0 n_0}, \frac{a'}{b_0 a_0}, \frac{a'}{b_0 a_0}, \left( \frac{-e_0 e'}{b_0 (1 - e_0^2)} + \frac{a'}{b_0 a_0} \right), 0 \right). \quad (4.50)$$

Et grâce à l'équation (4.49) on arrive à la relation:

$$K_\nu^\alpha = \left( \frac{-k^2}{2} \left[ \frac{2}{3} \rho + \frac{1}{3} (2p_{\parallel} + p_{\perp}) \right], \frac{k^2}{2} \left[ \frac{1}{3} \rho + \frac{1}{3} (p_{\parallel} - p_{\perp}) \right], \right. \\ \left. \frac{k^2}{2} \left[ \frac{1}{3} \rho + \frac{1}{3} (p_{\parallel} - p_{\perp}) \right], \frac{k^2}{2} \left[ \frac{1}{3} \rho + \frac{2}{3} (-p_{\parallel} + p_{\perp}) \right], 0 \right). \quad (4.51)$$

En utilisant l'équation (4.41) on obtient finalement les conditions de Jonction d'Israël:

$$\frac{[a']}{a_0 b_0} = \frac{k^2}{3} \rho + \frac{k^2}{3} (p_{\parallel} - p_{\perp}), \quad (4.52)$$

$$\frac{e_0 [e']}{b_0 (1 - e_0^2)} = k^2 (p_{\parallel} - p_{\perp}), \quad (4.53)$$

$$\frac{[n']}{n_0 b_0} = -\frac{k^2}{3} (2\rho + 2p_{\parallel} + p_{\perp}), \quad (4.54)$$

où l'indice 0 pour a, b et n signifie qu'elles sont prises à  $y = 0$ .

Si on porte (4.52) et (4.53) dans (4.21) et (4.33), on obtient l'équation suivante (avec  $n_0 = 1$  et  $b_0 = 1$ ):

$$\left( \frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = \frac{k^2 \rho_B^I}{6} + \frac{k^4 \rho^2}{36} + \frac{k^4}{36} (p_{\parallel} - p_{\perp})^2 - \frac{k^2 \int a^4 d(1 - e^2)}{6 a_0^4 (1 - e_0^2)} \rho_B^I + \frac{C_1}{a_0^4 (1 - e_0^2)}, \quad (4.55)$$

et

$$\left( \frac{e_0 \dot{e}}{(1-e_0^2)} \right)^2 = \frac{k^4}{4} (p_{\parallel} - p_{\perp})^2 + \frac{k^2}{2} \rho_B^A - \frac{k^2}{a_0^2} \frac{\int (1-e^2) da^2}{(1-e_0^2)^2} \rho_B^A + \frac{C_2}{a_0^2 (1-e_0^2)^2}. \quad (4.56)$$

De l'équation (4.55) nous pouvons voir que pour  $p_{\parallel} = p_{\perp}$ , l'équation de Friedmann se réduit exactement à celle trouvée dans les réfs [16, 19] :

$$\left( \frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = \frac{k^2 \rho_B^I}{6} + \frac{k^4 \rho^2}{36} + \frac{C_1}{a_0^4}.$$

L'équation (4.56) décrit l'évolution de l'excentricité dans un monde branaire. Elle montre que l'évolution de l'excentricité dépend de la pression anisotrope et de la densité d'énergie anisotrope.

En remarquant que l'équation de conservation de l'énergie sur la brane (ce qui a été obtenue en (3.32)) et:

$$\dot{\rho} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) (\rho + p_{\parallel}) + \left( \frac{\dot{a}}{a} - 2 \frac{e \dot{e}}{(1-e^2)} \right) (\rho + p_{\perp}) = 0, \quad (4.57)$$

et en supposant une faible excentricité,  $(1-e^2) \sim 1$ , on a la solution suivante:

$$\rho \sim (1-e^2)^{-(\omega+1)} a^{-3(\omega+1)} \approx a^{-3(\omega+1)} \approx a^{-q}, \quad (4.58)$$

où  $q = 3(\omega + 1)$ .

Pour  $p_{\parallel} = p_{\perp}$  nous allons résoudre l'équation (4.56) en considérant que le premier terme est négligeable.

Le tenseur d'énergie-impulsion est  $(T_A)_{\nu}^{\mu} = \rho^A \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  et on a aussi  $\rho^A \sim a^{-4}$ .

Si on porte  $(a(t) \sim t^{\frac{1}{q}}, H = \frac{1}{qt}$  et  $\rho^A = \rho_0^A a^{-4}$ ) dans l'équation (4.56) l'excentricité est exprimée par la relation [13] :

$$e^2 = \frac{2 k^2 \rho_0^A t^{1-\frac{4}{q}}}{q-4} + C_3 \quad (4.59)$$

où  $C_3$  est une constante d'intégration.

De même, pour  $(a(t) \sim t^{\frac{2}{q}}, H = \frac{2}{qt}$  et  $\rho^A = \rho_0^A a^{-4}$ ) l'excentricité est donnée par:

$$e^2 = \frac{2 k^2 \rho_0^A t^{1-\frac{8}{q}}}{q-8} + C_4, \quad (4.60)$$

où  $C_4$  est une autre constante d'intégration.

Dans le passé proche on sait que:

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}, \quad q = 3, \quad (4.61)$$

et nous constatons que l'évolution de l'excentricité en cinq dimensions varie avec le facteur d'échelle suivant la loi:

$$e^2 \sim a^{-5/2}, \quad (4.62)$$

alors que dans un univers à quatre dimensions cette évolution était décrite par la loi

$$e^2 \sim a^{-1}. \quad (4.63)$$

On déduit alors que l'excentricité d'un univers à cinq dimensions est plus forte que celle d'un univers à quatre dimensions.

### 4.3 Appendice : les fonctions $F$ et $L$

La fonction  $F(\tau, y)$  est définie par la relation:

$$F = (1 - e^2) \left[ \left( \frac{\dot{a}a}{n} \right)^2 - \left( \frac{a'a}{n} \right)^2 \right]. \quad (4.64)$$

En dérivant par rapport à  $y$  on obtient:

$$\begin{aligned} F' = \frac{dF}{dy} = & -2ee' \left( \frac{a\dot{a}}{n} \right)^2 + 2(1 - e^2) \frac{\dot{a}\dot{a}'a^2}{n^2} + 2(1 - e^2) \frac{\dot{a}^2 a'a}{n^2} \\ & - 2(1 - e^2) \left( \frac{n'}{n} \right) \frac{\dot{a}^2 a^2}{n^2} + 2(1 - e^2) \left( \frac{a'a}{b} \right)^2 ee' - 2(1 - e^2) \frac{a^2 a' a''}{b^2} \\ & - 2(1 - e^2) \frac{a^2 a' a}{b^2} + 2(1 - e^2) \frac{b' a^2 a'^2}{b^3}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

A partir de  $G_{15}^0 = G_{10}^5 = 0$ , on a la relation:

$$\frac{1}{b^2} \left( -\frac{3n'\dot{a}}{an} - \frac{3a'\dot{b}}{ab} + \frac{ea'e}{a(1 - e^2)} - \frac{3ee'\dot{a}}{a(1 - e^2)} + \frac{3\dot{a}'}{a} \right) = 0, \quad (4.66)$$

et de l'équation (4.66) on déduit que:

$$\left(\frac{n'}{n}\right) = -\frac{a'\dot{b}}{\dot{a}b} + \frac{e a'\dot{e}}{3\dot{a}(1-e^2)} - \frac{e e'}{(1-e^2)} + \frac{\dot{a}'}{\dot{a}} \quad (4.67)$$

En portant (4.67) dans (4.65) on obtient:

$$F' = \frac{2 a' a^3}{3} (1-e^2) \left[ \frac{3}{b^2} \left( -\frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'b'}{a b} + \frac{e a' e'}{a (1-e^2)} - \frac{a''}{a} \right) + 3 \frac{\dot{a}}{a n^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{e \dot{e} \dot{a}}{a n^2 (1-e^2)} \right], \quad (4.68)$$

qu'on met sous la forme simple suivante:

$$F' = \frac{2 a' a^3}{3} (1-e^2) \tilde{G}_{10}^0 = \frac{2 a' a^3}{3} (1-e^2) k^2 \tilde{T}_{10}^0. \quad (4.69)$$

En intégrant cette équation par parties:

$$F = \frac{1}{6} k^2 \tilde{T}_{10}^0 (1-e^2) a^4 - \frac{1}{6} k^2 \tilde{T}_{10}^0 \int a^4 d(1-e^2) + C_1, \quad (4.70)$$

il en résulte alors que:

$$(1-e^2) \left[ \left( \frac{\dot{a} \dot{a}}{n} \right)^2 - \left( \frac{a' \dot{a}}{n} \right)^2 \right] = \frac{1}{6} k^2 \tilde{T}_{10}^0 (1-e^2) a^4 - \frac{1}{6} k^2 \tilde{T}_{10}^0 \int a^4 d(1-e^2) + C_1, \quad (4.71)$$

à partir de laquelle on déduit:

$$\left( \frac{\dot{a}}{an} \right)^2 = \left( \frac{a'}{ab} \right)^2 + \frac{k^2 \tilde{T}_{10}^0}{6} - \frac{k^2 \int a^4 d(1-e^2)}{6 a^4 (1-e^2)} \tilde{T}_{10}^0 + \frac{C_1}{a^4 (1-e^2)}. \quad (4.72)$$

Calculons maintenant la dérivée de  $F$  par rapport  $\tau$  on a:

$$F' = \frac{dF}{d\tau} = -2e\dot{e} \left( \frac{a\dot{a}}{n} \right)^2 + 2e\dot{e} \left( \frac{aa'}{b} \right)^2 + 2(1-e^2) \frac{\ddot{a}a^2\dot{a}}{n^2} + 2(1-e^2) \frac{\dot{a}^2\dot{a}\dot{a}}{n^2} - 2(1-e^2) \frac{a^2\dot{a}^2\dot{n}}{n^3} - 2(1-e^2) \frac{\dot{a}'a^2\dot{a}}{b^2} - 2(1-e^2) \frac{aaa'^2}{b^2} + 2(1-e^2) \frac{a^2a'^2}{b^2} \left( \frac{\dot{b}}{b} \right), \quad (4.73)$$

et on utilisant (4.66) on a:

$$\left(\frac{\dot{b}}{b}\right) = \left(-\frac{n'\dot{a}}{n a'} + \frac{e\dot{e}}{(1-e^2)} - \frac{\dot{a}ee'}{3a'(1-e^2)} + \frac{\dot{a}}{a'}\right), \quad (4.74)$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{F} = & \frac{2\dot{a}a^3}{3} (1-e^2) \left[ \frac{1}{n^2} \left( \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3e\dot{e}\dot{a}}{a(1-e^2)} - \frac{3\dot{a}n}{a n} + \frac{3\ddot{a}}{a} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{b^2} \left( -\frac{3a'^2}{a^2} + \frac{ea'e'}{a(1-e^2)} - \frac{3a'n'}{an} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.75)$$

qu'on peut mettre sous la forme:

$$\dot{F} = \frac{2\dot{a}'a^3}{3} (1-e^2) \tilde{G}_{15}^5 = \frac{2\dot{a}a^3}{3} (1-e^2) k^2 \tilde{T}_{15}^5. \quad (4.76)$$

Considérons maintenant la fonction de  $\tau$  et  $y$  définie par la relation:

$$L = \left(\frac{ae'e'}{b}\right)^2 - \left(\frac{ae\dot{e}}{n}\right)^2. \quad (4.77)$$

En dérivant  $L$  par rapport  $y$  on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dy} = & 2\frac{aa'e^2e'^2}{b^2} + 2\frac{ea^2e'^3}{b^2} + 2\frac{e'e''e^2a^2}{b^2} - 2\frac{b'e'^2e^2a^2}{b^3} \\ & - 2\frac{e^2a'a\dot{e}^2}{n^2} + 2\frac{a^2e^2\dot{e}^2}{n^2} \left(\frac{n'}{n}\right), \end{aligned} \quad (4.78)$$

a partir la condition  $\tilde{G}_{A5}^0 = \tilde{G}_{A0}^5 = 0$ , on a la relation:

$$\left(\frac{n'}{n}\right) = \left(\frac{\dot{e}'}{\dot{e}} + \frac{e'}{e(1-e^2)} + \frac{a'}{a} - \frac{e'\dot{b}}{b\dot{e}} - \frac{e'\dot{a}}{a\dot{e}}\right). \quad (4.79)$$

Portant (4.79) dans (4.78) pour déduire que:

$$\begin{aligned} L' \simeq & 2ee'(1-e^2)a^2 \left[ \frac{1}{b^2(1-e^2)} \left( ee'' + \frac{e'^2}{(1-e^2)} - \frac{eb'e'}{b} + \frac{ea'e'}{a} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{n^2(1-e^2)} \left( \frac{ea\dot{e}}{a} + \frac{eb\dot{e}}{b} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.80)$$

ou bien

$$L' \simeq 2ee'(1-e^2)a^2 \tilde{G}_{A0}^0 \simeq 2ee'(1-e^2)a^2 k^2 \tilde{T}_{A0}^0. \quad (4.81)$$

En intégrant cette relation on obtient:

$$L = -\frac{1}{2}k^2 \tilde{T}_{A0}^0 \int a^2 d(1-e^2)^2, \quad (4.82)$$

ou bien

$$L = -\frac{1}{2}k^2 \tilde{T}_{A0}^0 a^2 (1-e^2)^2 + \frac{1}{2}k^2 \int (1-e^2) da^2 \tilde{T}_{A0}^0 + C_2, \quad (4.83)$$

En utilisant la définition de  $L$ , il en résulte que:

$$\left(\frac{ae'e'}{b}\right)^2 - \left(\frac{ae\dot{e}}{n}\right)^2 = -\frac{1}{2}k^2 \tilde{T}_{A0}^0 a^2 (1-e^2)^2 + \frac{1}{2}k^2 (1-e^2) da^2 \tilde{T}_{A0}^0 + C_2, \quad (4.84)$$

et donc

$$\left(\frac{e\dot{e}}{(1-e^2)n}\right)^2 = \left(\frac{ee'}{(1-e^2)b}\right)^2 + \frac{1}{2}k^2 \tilde{T}_{A0}^0 - k^2 \frac{\int (1-e^2) da^2}{a^2 (1-e^2)^2} \tilde{T}_{A0}^0 + \frac{C_2}{a^2 (1-e^2)}. \quad (4.85)$$

Dérivons maintenant  $L$  par rapport  $\tau$  on a:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\tau} = & 2 \frac{a\dot{a}\dot{e}e^2e'^2}{b^2} + 2 \frac{a^2e\dot{e}\dot{e}'^2}{b^2} + 2 \frac{e'a^2e^2\dot{e}'}{b^2} - 2 \frac{e'^2e^2a^2}{b^2} \left(\frac{\dot{b}}{b}\right) \\ & - 2 \frac{a\dot{a}\dot{e}^2\dot{e}^2}{n^2} - 2 \frac{a^2e\dot{e}\dot{e}^2}{n^2} - 2 \frac{a^2e^2\dot{e}\ddot{e}}{n^2} + 2 \frac{a^2e^2\dot{e}^2\dot{n}}{n^3}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

En utilisant à nouveau  $\tilde{G}_{A5}^0 = \tilde{G}_{A0}^5 = 0$  on obtient:

$$\left(\frac{\dot{b}}{b}\right) = \left(\frac{\dot{e}'}{e'} + \frac{\dot{e}}{e(1-e^2)} - \frac{\dot{a}}{a} + \frac{a'\dot{e}}{ae'} - \frac{n'\dot{e}}{ne'}\right), \quad (4.87)$$

et donc

$$\dot{L} \simeq 2e\dot{e}(1-e^2)a^2 \left[ \frac{1}{(1-e^2)} \left( \frac{ea'e'}{ab^2} + \frac{ee'n'}{b^2} - \frac{e\dot{a}\dot{e}}{an^2} - \frac{\dot{e}^2}{n^2} + \frac{e\dot{e}\dot{n}}{n^3} - \frac{e\ddot{e}}{n^2} \right) \right], \quad (4.88)$$

ou bien

$$\dot{L} \simeq 2e\dot{e}(1-e^2)a^2 \tilde{G}_{A5}^5 \simeq 2e\dot{e}(1-e^2)a^2 k^2 \tilde{T}_{A5}^5. \quad (4.89)$$

Univers ellipsoïdal  
dans le modèle branaire  
DGP avec  $f(R)$ -gravité

## Chapter 5

# Univers ellipsoïdal dans le modèle branaire de Dvali-Gabadadze-Poratti avec gravité modifiée

### 5.1 Univers ellipsoïdal dans le modèle branaire de Dvali-Gabadadze-Poratti (DGP)

Dans ce chapitre, nous explorons l'univers ellipsoïdal dans un autre scénario. Ce scénario est basé sur le modèle de Gia Dvali-Gregory Gabadadze-Massimo Poratti (DGP) avec gravité modifiée [20, 21].

Les équations de mouvement régissant ce modèle sont obtenues en utilisant l'action d'une brane dans un espace-temps à cinq dimensions. L'action que nous allons considérer est donnée par:

$$S_{(5)} = -\frac{1}{2k^2} \int_{bulk} d^5x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + \int_{bulk} d^5x \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_m - \frac{1}{2\mu^2} \int_{brane} d^4x \sqrt{-g} R, \quad (5.1)$$

Le premier terme correspond à l'action d'Einstein-Hilbert à cinq dimensions, où la métrique du volume est  $\tilde{g}_{AB}$ , et où  $\tilde{R}$  est la courbure scalaire à cinq dimensions. Le deuxième terme est l'action de matière dans le volume, alors que le dernier terme est l'action de courbure induite sur la brane à 3-dimensions.

Les équations d'Einstein à cinq dimensions sont données par:

$$\tilde{G}_{AB} \equiv \tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2} \tilde{R} \tilde{g}_{AB} \equiv k^2 \tilde{S}_{AB}, \quad (5.2)$$



où le tenseur  $\tilde{S}_{AB}$  est la somme des tenseurs d'énergie-impulsion  $\tilde{T}_{AB}$  dans le volume, et de la contribution provenant de la courbure scalaire des branes, on note cette dernière contribution  $\tilde{U}_{AB}$ , alors on a:

$$\tilde{S}_{AB} = \tilde{T}_{AB} + \tilde{U}_{AB}. \quad (5.3)$$

Les conditions de jonction d'Israël dans le modèle de la gravité des branes est maintenant remplacée par:

$$\{K_{\mu\nu} - K g_{\mu\nu}\}_q = -(k^2 / 2) S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{\mu^2} U_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

où la constante  $\mu$  est donnée par:

$$\mu^2 = 8\pi G_{(4)} = M_{(4)}^{-2}. \quad (5.5)$$

### 5.1.1 Équations d'Einstein

Commençons par le calcul de la variation de l'action totale  $S_{(5)}$ , on a:

$$\delta S_{(5)} = -\frac{1}{2k^2} \int_{vol} d^5x \delta(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R}) + \int_{vol} d^5x \delta(\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_m) - \frac{1}{2\mu^2} \int_{brane} d^4x \delta(\sqrt{-g} R), \quad (5.6)$$

pour le troisième terme on peut écrire:

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \frac{-1}{2\mu^2} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) \\ &= \frac{-1}{2\mu^2} \int d^4x \delta_A^\mu \delta_B^\nu G_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \delta(y) |_{y \rightarrow 0^+}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Pour le premier et le deuxième terme on a respectivement:

$$\begin{aligned} \delta S_{\tilde{g}} &= -\frac{1}{2k^2} \int d^5x \delta(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R}) \\ &= -\frac{1}{2k^2} \int d^5x \delta_A^\mu \delta_B^\nu G_{\mu\nu} \sqrt{-\tilde{g}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

et

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int d^5x \delta(\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_m) \\ &= \int d^4x dy \delta_A^\mu \delta_B^\nu T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

où

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^A \delta_{\nu}^B \bar{g}_{AB}. \quad (5.10)$$

Comme

$$\delta S_{\bar{g}} + \delta S_m + \delta S_G = 0, \quad (5.11)$$

on obtient:

$$-\frac{1}{2k^2} \delta_A^{\mu} \delta_B^{\nu} G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \delta_A^{\mu} \delta_B^{\nu} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\mu^2} \delta_A^{\mu} \delta_B^{\nu} G_{\mu\nu} \delta(y) |_{y \rightarrow 0^+} = 0, \quad (5.12)$$

et finalement

$$\frac{1}{k^2} \bar{G}_{AB} = \bar{T}_{AB} - \frac{1}{\mu^2} \delta_A^{\mu} \delta_B^{\nu} G_{\mu\nu} \delta(y) |_{y \rightarrow 0^+}, \quad (5.13)$$

qu'on met sous la forme canonique:

$$\bar{G}_{AB} = k^2 \bar{S}_{AB}, \quad (5.14)$$

avec

$$\bar{S}_{AB} = \bar{T}_{AB} - \frac{1}{\mu^2} \delta_A^{\mu} \delta_B^{\nu} G_{\mu\nu} \delta(y) |_{y \rightarrow 0^+}. \quad (5.15)$$

on note que

$$U_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \delta(y) |_{y \rightarrow 0^+}, \quad (5.16)$$

et donc

$$\bar{S}_{AB} = \bar{T}_{AB} - \frac{1}{\mu^2} \delta_A^{\mu} \delta_B^{\nu} U_{\mu\nu} = \bar{T}_{AB} - \frac{1}{\mu^2} \bar{U}_{AB}, \quad (5.17)$$

avec

$$U_{AB} |_{\text{brane}} = \delta(y) |_{y \rightarrow 0^+} (G_{00}, G_{11}, G_{22}, G_{33}, 0), \quad (5.18)$$

En contractant sur les indices on obtient le scalaire:

$$S = T - \frac{1}{\mu^2} U \quad (5.19)$$

où

$$U_{\mu\nu} = (U_I + U_A)_{\mu\nu}, \quad (5.20)$$

$$U = U_{\mu}^{\mu} = (G_0^0 + G_j^j)_I + (G_0^0 + G_j^j)_A, \quad (5.21)$$

où  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Il est alors facile de montrer que:

$$U_0^0 = \frac{1}{n^2} \left( \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2e\ddot{a}\dot{e}}{a(1-e^2)} \right), \quad (5.22)$$

$$U_1^1 = U_2^2 = \frac{1}{n^2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3e\ddot{a}\dot{e}}{a(1-e^2)} - 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + 2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{e}^2}{(1-e^2)^2} + \frac{e\ddot{e}\dot{n}}{n(1-e^2)} - \frac{\ddot{e}e}{(1-e^2)} \right), \quad (5.23)$$

$$U_3^3 = \frac{1}{n^2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + 2\frac{\ddot{a}}{a} \right), \quad (5.24)$$

$$U = \frac{1}{n^2} \left( 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 8\frac{e\ddot{a}\dot{e}}{a(1-e^2)} - 6\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + 6\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{e\ddot{e}\dot{n}}{n(1-e^2)} - 2\frac{\ddot{e}e}{(1-e^2)} - 2\frac{\dot{e}^2}{(1-e^2)^2} \right). \quad (5.25)$$

Pour le tenseur de courbure extrinsèque on obtient

$$K_\nu^\alpha = g^{\alpha\mu} K_{\mu\nu} = \frac{-k^2}{2} \left( S_\nu^\alpha - \frac{S}{3} \delta_\nu^\alpha \right), \quad (5.26)$$

$$K_\nu^\alpha = \frac{-k^2}{2} \left( T_\nu^\alpha - \frac{T}{3} \delta_\nu^\alpha \right) + \frac{k^2}{2\mu^2} \left( U_\nu^\alpha - \frac{U}{3} \delta_\nu^\alpha \right). \quad (5.27)$$

En utilisant les équations (4.41) et (4.50) on a finalement:

$$K_\nu^\alpha = \left( \frac{[n']}{2b_0n_0}, \frac{[a']}{2b_0a_0}, \frac{a'}{b_0a_0}, \left( \frac{-e_0[e']}{2b_0(1-e_0^2)} + \frac{[a']}{2b_0a_0} \right), 0 \right). \quad (5.28)$$

En utilisant les relations donnant  $U_0^0, U_1^1, U_2^2, U_3^3$ , et les équations (5.25), (5.27), (5.28) avec les équations (4.52), (4.53), (4.54) on obtient les conditions de jonction d'Israël:

$$\begin{aligned} \frac{[a']}{a_0b_0} &= \frac{k^2}{3}\rho + \frac{k^2}{3}(p_{\parallel} + p_{\perp}) \\ &- \frac{k^2}{3\mu_0^2 n_0^2} \left( 3\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} + \frac{e_0\ddot{a}\dot{e}}{a_0(1-e_0^2)} + \frac{e_0\ddot{e}}{(1-e_0^2)} - \frac{e_0\dot{e}\dot{n}}{n_0(1-e_0^2)} + \frac{\dot{e}^2}{(1-e_0^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\frac{e_0 [e']}{b_0 (1 - e_0^2)} = k^2 (p_{\parallel} - p_{\perp}) - \frac{k^2}{\mu^2 n_0^2} \left( \frac{3e_0 \dot{a} \ddot{e}}{a_0 (1 - e_0^2)} + \frac{e_0 \ddot{e}}{1 - e_0^2} - \frac{e_0 \dot{e} \ddot{n}}{n_0 (1 - e_0^2)} + \frac{\dot{e}^2}{(1 - e_0^2)^2} \right), \quad (5.30)$$

$$\frac{[n']}{n_0 b_0} = -\frac{k^2}{3} (2\rho + 2p_{\parallel} + p_{\perp}) + \frac{k^2}{\mu^2 n_0^2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a_0^2} + 2 \frac{\dot{a} \dot{n}}{a_0 n_0} - 2 \frac{\ddot{a}}{a_0} \right) + \frac{2k^2}{3\mu^2 n_0^2} \left( \frac{e_0 \dot{a} \ddot{e}}{a_0 (1 - e_0^2)} + \frac{e_0 \ddot{e}}{1 - e_0^2} - \frac{e_0 \dot{e} \ddot{n}}{n_0 (1 - e_0^2)} + \frac{\dot{e}^2}{(1 - e_0^2)^2} \right). \quad (5.31)$$

### 5.1.2 Excentricité

En utilisant les équations (4.21) et (4.33) et supposant que  $\rho_B^I$ ,  $\rho_B^A$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont d'ordre 0, on obtient:

$$\left( \frac{\dot{a}}{an} \right)^2 = \left( \frac{a'}{ab} \right)^2, \quad (5.32)$$

et

$$\left( \frac{e \dot{e}}{(1 - e^2)n} \right)^2 = \left( \frac{e e'}{(1 - e^2)b} \right)^2. \quad (5.33)$$

En considérant les équations (5.29) et (5.32) on obtient:

$$\frac{\mu^2}{3} \rho + \frac{\mu^2}{3} (p_{\parallel} + p_{\perp}) = 2H \left( \epsilon \frac{\mu^2}{k^2} \right) + H^2 + \frac{1}{3} \frac{e \ddot{e}}{1 - e^2} - \frac{1}{3} \frac{e \dot{e} \ddot{n}}{1 - e^2} + \frac{1}{3} \frac{\dot{e}^2}{(1 - e^2)^2}, \quad (5.34)$$

et grâce aux équations (5.30) et (5.33) on a:

$$\frac{\mu^2}{3} (p_{\parallel} - p_{\perp}) = \frac{2}{3} \frac{e \dot{e}}{1 - e^2} \left( \epsilon \frac{\mu^2}{k^2} \right) + \frac{e \dot{e}}{1 - e^2} H + \frac{1}{3} \frac{e \ddot{e}}{1 - e^2} - \frac{1}{3} \frac{e \dot{e} \ddot{n}}{1 - e^2} + \frac{1}{3} \frac{\dot{e}^2}{(1 - e^2)^2}, \quad (5.35)$$

où  $\epsilon = \pm 1$  est le signe de  $[a']$  et où on a posé  $n_0 = 1$  et  $b_0 = 1$ .

En faisant la soustraction des équations (5.34) et (5.35) on obtient la relation:

$$\left(H - \epsilon \frac{\mu^2}{k^2}\right)^2 - \frac{2}{3} \frac{e\dot{e}}{1-e^2} \left(H - \epsilon \frac{\mu^2}{k^2}\right) \simeq \frac{\mu^2}{3} \rho + \left(\epsilon \frac{\mu^2}{k^2}\right)^2, \quad (5.36)$$

qui est l'équation modifiée de Friedmann pour un univers ellipsoïdal dans le scénario branaire de DGP.

Pour  $\mu^2/k^2 \ll H$ , il est facile de voir qu'on récupère l'univers ellipsoïdal à 4D.

L'équation (5.35) a la forme:

$$\left(\frac{e\ddot{e}}{1-e^2} + \frac{\dot{e}^2}{(1-e^2)^2}\right) + \frac{e\dot{e}}{(1-e^2)} \left(3\frac{\dot{a}}{a} + 2\epsilon \frac{\mu^2}{k^2}\right) = \mu^2 (p_{\parallel} - p_{\perp}). \quad (5.37)$$

Pour un univers dominé par la matière non relativiste (poussière) on a:

$$a \sim t^{\frac{2}{3}}, \quad H = \frac{2}{3}t, \quad (5.38)$$

dans l'approximation de l'excentricité on a:

$$(1 - e^2) \sim 1, \quad (5.39)$$

et

$$(T_A)^\mu_\nu = \rho^A \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (5.40)$$

et on peut alors écrire:

$$\left(e\ddot{e} + \dot{e}^2\right) + e\dot{e} \left(\frac{2}{t} + 2\epsilon \frac{\mu^2}{k^2}\right) = 2\mu^2 \rho^A. \quad (5.41)$$

D'où à partir de (5.38), (5.39) et (5.40), la solution de l'équation (5.41) peut être écrite comme:

$$e^2(t) \sim \int_t^{t_0} 4\pi\rho_0^A e^{-2\epsilon \frac{\mu^2}{k^2} t'} t'^{-2} dt' \\ \simeq 4\pi\rho_0^A \left[ 2\epsilon \frac{\mu^2}{k^2} \text{Ei}\left(1, 2\epsilon \frac{\mu^2}{k^2} t'\right) - \frac{e^{-2\epsilon \frac{\mu^2}{k^2} t'}}{t'} \right]_t^{t_0}, \quad (5.42)$$

où  $\text{Ei}(a, x)$  est l'intégral exponentielle définie pour  $\Re(x) > 0$ , et qui peut être étendue analytiquement à tout le plan complexe.

A ce stade il est intéressant d'introduire l'échelle de croisement, définie par

$$r_c = \frac{k^2}{2\mu^2} = \frac{M_{(4)}^2}{M_{(5)}^3}. \quad (5.43)$$

C'est une échelle propre au modèle branaire de DGP, et qui exprime le rapport des échelles de Planck à 4-D et 5-D [20, 19]. Pour  $r_c \rightarrow \infty$ , on retrouve la gravité d'Einstein. En utilisant le développement en série de  $Ei(a, x)$

$$Ei(a, x) = -\gamma - \ln(ax) + ax - \frac{a^2 x^2}{4} + O(x^3), \quad (5.44)$$

on peut écrire:

$$e^2(t) \simeq 4\pi\rho_0^A \left[ \left( -t'^{-1} - \frac{\epsilon}{r_c} \ln t' + \frac{\epsilon^2}{2r_c^2} t' \right) \right]_t^{t_0}, \quad (5.45)$$

avec  $\epsilon = 1$  et  $a \sim t^{\frac{2}{3}}$  on obtient:

$$e^2(t) \simeq \frac{1}{3}\Omega_{(0)}^A \left( a^{-3/2} + 2\frac{\ln a}{r_c} - \frac{a^{3/2}}{r_c^2} \right), \quad (5.46)$$

Dans le cas  $r_c \rightarrow \infty$ , l'expression de l'excentricité se réduit au résultat (3.46)

$$e^2(t) \sim \Omega_{(0)}^A a^{-3/2}.$$

Dans la figure 5.1, on montre la variation de l'excentricité réduite  $3e^2/\Omega_{(0)}^A$  avec le redshift  $z$  pour différentes valeurs de l'échelle de croisement. Il est clair que pour  $z$  petit et  $r_c < 1$ , le scénario de DGP conduit à une excentricité négative aujourd'hui.

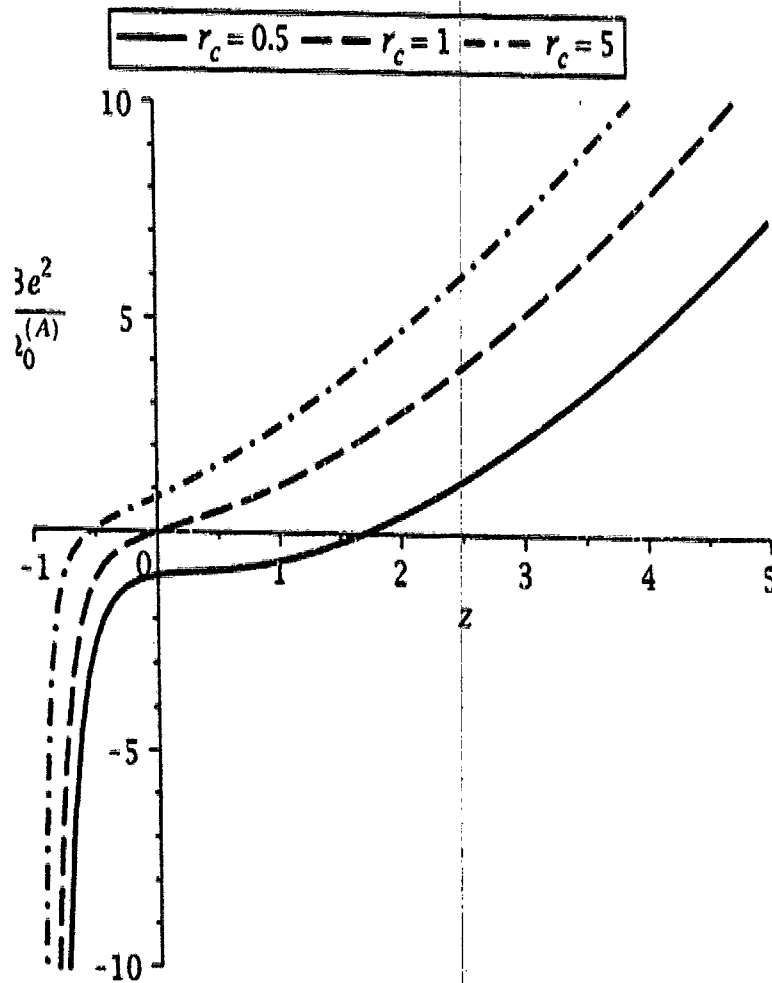


FIGURE 5.1- Variation de l'excentricité réduite  $3e^2/\Omega_{(0)}^A$  avec le redshift  $z$  pour différentes valeurs de l'échelle de croisement

## 5.2 Univers ellipsoïdal dans le modèle branaire de Dvali-Gabadadze-Poratti avec $f(R)$ -gravité

Avant d'examiner le fonctionnement réel d'un univers ellipsoïdal dans le modèle branaire DGP avec gravité modifiée, il est nécessaire de se concentrer sur la description mathématique de la gravité modifiée ou ce qu'on appelle la  $f(R)$ -gravité.

Tout d'abord, il faut abandonner l'idée que la gravitation soit décrite par des équations de mouvement de second ordre.

Tout d'abord, la question est alors de savoir qu'es sont tous les scalaires d'ordre deux non triviaux que l'on peut construire sur une variété Riemannienne.

La réponse est simple, il s'agit de la courbure scalaire  $R^2$ , on peut alors écrire la nouvelle équation sous la forme [22] :

$$\mathcal{S} = \frac{-1}{2k^2} \int \sqrt{-g} (R + f_0 R^2) d^4x + S_m. \quad (5.47)$$

où  $f_0$  est la constante du modèle.

On peut alors généraliser la densité lagrangienne gravitationnelle à une fonction quelconque de la courbure scalaire, en écrire l'action d'Einstein sous la forme:

$$S_g = \frac{-1}{2k^2} \int f(R) \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.48)$$

où  $f(R)$  est une fonction de la courbure de Ricci.

### 5.2.1 Equations d'Einstein

Considérons d'abord l'action suivante:

$$S_{(5)} = -\frac{1}{2k^2} \int d^5x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + \int d^5x \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_m - \frac{1}{2\mu^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (5.49)$$

La variation de l'action totale s'écrit:

$$\delta S_{(5)} = -\frac{1}{2k^2} \int d^5x \delta (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R}) + \int d^5x \delta (\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_m) - \frac{1}{2\mu^2} \int d^4x \delta (\sqrt{-g} f(R)). \quad (5.50)$$

La variation du terme de matière est donnée par:

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int d^5x \tilde{T}_{AB} \sqrt{-\tilde{g}} \delta \tilde{g}^{AB}, \quad (5.51)$$



alors que la variation du terme gravitationnel du volume est:

$$\delta S_G = \int d^5 x \tilde{G}_{AB} \sqrt{-\tilde{g}} \delta \tilde{g}^{AB}, \quad (5.52)$$

Considérons enfin la variation de l'action gravitationnelle modifiée sur la brane. On a:

$$\delta S_G = \frac{1}{2\mu^2} \int d^4 x \delta (\sqrt{-g} f(R)). \quad (5.53)$$

On montre que:

$$\begin{aligned} \delta (\sqrt{-g} f(R)) &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} f(R) + \sqrt{-g} f'(R) \delta R \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} f(R) + \sqrt{-g} f'(R) R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\ &\quad + \sqrt{-g} \nabla_\alpha \nabla_\beta f'(R) \delta g^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} \nabla_\mu \nabla^\mu f'(R) g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Le deuxième terme de cette équation se développe comme suit:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} f'(R) \delta R &= \sqrt{-g} f'(R) \delta (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) \\ &= \sqrt{-g} f'(R) R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} \nabla_\alpha \nabla_\beta f'(R) \delta g^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} \nabla_\mu \nabla^\mu f'(R) g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

En substituant (5.54) et (5.55) dans (5.53) on obtient:

$$\delta S_G = \int d^4 x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + f'(R) R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - \nabla_\alpha \nabla^\alpha f'(R) g_{\mu\nu} \right). \quad (5.56)$$

Le troisième et quatrième terme de cette équation peut s'écrire respectivement comme:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} f'(R)^{\alpha\beta}, \quad (5.57)$$

et

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha f'(R) = g_{\alpha\beta} f'(R)^{\alpha\beta}, \quad (5.58)$$

En substituant dans (5.56) on obtient:

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \int d^4 x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f(R) - R f'(R)) \right. \\ &\quad \left. + f'(R) G_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} f'(R)^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} f'(R)^{\alpha\beta} \right), \end{aligned} \quad (5.59)$$

Il est maintenant facile de déduire de la variation de l'action totale

$$\delta S_G + \delta S_{\tilde{g}} + \delta S_m = 0, \quad (5.60)$$

les équations d'Einstein suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \tilde{G}_{AB} = \tilde{T}_{AB} - \frac{1}{\mu^2} \delta_A^\mu \delta_B^\nu \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f(R) - R f'(R)) + f'(R) G_{\mu\nu} \right. \\ \left. + g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} f'(R)^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} f'(R)^{\alpha\beta} \right) \delta(y). \end{aligned} \quad (5.61)$$

En utilisant l'équation (5.15) on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{AB} = \tilde{T}_{AB} - \frac{1}{\mu^2} \delta_A^\mu \delta_B^\nu \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f(R) - R f'(R)) + f'(R) G_{\mu\nu} \right. \\ \left. + g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} f'(R)^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} f'(R)^{\alpha\beta} \right) \delta(y). \end{aligned} \quad (5.62)$$

On remarque que

$$\tilde{S}_{AB} = \delta_A^\mu \delta_B^\nu S_{\mu\nu}, \quad (5.63)$$

et

$$\tilde{T}_{AB} = \delta_A^\mu \delta_B^\nu T_{\mu\nu}, \quad (5.64)$$

on obtient donc le résultat:

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{\mu^2} \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f(R) - R f'(R)) + f'(R) G_{\mu\nu} \right. \\ \left. + g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} f'(R)^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} f'(R)^{\alpha\beta} \right) \delta(y), \end{aligned} \quad (5.65)$$

L'équation (5.4) définissant  $U_{\mu\nu}$  conduit à la relation:

$$U_{\mu\nu} = \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f(R) - R f'(R)) + f'(R) G_{\mu\nu} + (g_{\gamma\mu} g_{\delta\nu} - g_{\gamma\delta} g_{\mu\nu}) f'(R)^{\gamma\delta} \right] \delta(y),$$

ou bien

$$U_\nu^\alpha = \left( -\frac{1}{2} \delta_\nu^\alpha (f(R) - R f'(R)) + f'(R) G_\nu^\alpha + (\delta_\gamma^\alpha g_{\delta\nu} - g_{\gamma\delta} \delta_\nu^\alpha) f'(R)^{\gamma\delta} \right) \delta(y).$$

En posant  $\delta(y \rightarrow 0^+) = 1$  sur les branes et  $\alpha = \nu$  on obtient le scalaire:

$$U = -\frac{1}{2} \delta_\alpha^\alpha (f(R) - R f'(R)) + f'(R) G_\alpha^\alpha + (\delta_\gamma^\alpha g_{\delta\nu} - g_{\gamma\delta} \delta_\nu^\alpha) f'(R)^{\gamma\delta}.$$

En utilisant  $\delta_\alpha^\alpha = 4$  on obtient:

$$U = -2(f(R) - Rf'(R)) + f'(R)G_\alpha^\alpha - 3g_{\gamma\delta}f'(R)^{\gamma\delta}. \quad (5.66)$$

Calculons d'abord les différents termes de cette expression. En utilisant la définition de la dérivée covariante on montre que:

$$\begin{aligned} f'(R)^{\gamma\delta} &= f'(R)^{\gamma\delta} + \Gamma_\lambda^{\gamma\delta} f'(R)^{\lambda} \\ &= \frac{1}{n^2} (\ddot{R}f''(R) + \dot{R}f'''(R)) + \left(-2\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c}\right) \dot{R}f''(R), \end{aligned} \quad (5.67)$$

où  $\dot{R} = dR/dt$  et  $\ddot{R} = d^2R/dt^2$

La substitution de (5.67) dans (5.66) donne:

$$\begin{aligned} U &= -2[f(R) - Rf'(R)] + f'(R)G_\alpha^\alpha \\ &\quad - \frac{3}{n^2} \left[ (\ddot{R}f''(R) + \dot{R}f'''(R)) + \left(-2\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c}\right) \dot{R}f''(R) \right]. \end{aligned} \quad (5.68)$$

En utilisant les équations (4.41) et (4.50) on obtient le tenseur de la courbure extrinsèque sur la brane

$$K_\nu^\alpha = \left( \frac{[n']}{2b_0n_0}, \frac{[a']}{2b_0a_0}, \frac{[a']}{2b_0a_0}, \left( \frac{-e_0[e']}{2b_0(1-e_0^2)} + \frac{[a']}{2b_0a_0} \right), 0 \right), \quad (5.69)$$

En utilisant les relations (5.27), (5.68), (5.69) et (4.52), (4.53), (4.54) on montre que les conditions de jonction se réduisent aux équations suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{[a']}{a_0b_0} &= \frac{k^2}{3}\rho + \frac{k^2}{3}(p_{\parallel} + p_{\perp}) - \frac{4k^2}{3\mu^2}(f(R) - Rf'(R)) \\ &\quad - 2\frac{k^2}{\mu^2} \left( \frac{1}{n^2} (\ddot{R}f''(R) + \dot{R}f'''(R)) + \left(-2\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c}\right) \dot{R}f''(R) \right) \\ &\quad - \frac{k^2}{3\mu^2n_0^2} f'(R) \left( 3\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} + \frac{e_0\dot{a}\dot{e}}{a_0(1-e_0^2)} + \frac{e_0\ddot{e}}{(1-e_0^2)} - \frac{e_0\dot{e}\dot{n}}{n_0(1-e_0^2)} + \frac{\dot{e}^2}{(1-e_0^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{e_0[e']}{b_0(1-e_0^2)} &= k^2(p_{\parallel} - p_{\perp}) - \frac{k^2}{3\mu^2n_0^2} f'(R) \\ &\quad \left( \frac{3e_0\dot{a}\dot{e}}{a_0(1-e_0^2)} + \frac{e_0\ddot{e}}{(1-e_0^2)} - \frac{e_0\dot{e}\dot{n}}{n_0(1-e_0^2)} + \frac{\dot{e}^2}{(1-e_0^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned}
\frac{[n']}{n_0 b_0} &= -\frac{k^2}{3} (2\rho + 2p_{\parallel} + p_{\perp}) - \frac{4k^2}{3\mu^2} (f(R) - R f'(R)) \\
&\quad - 2\frac{k^2}{\mu^2} \left( \frac{1}{n^2} (\ddot{R} f''(R) + R f'''(R)) + \left( -2\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c} \right) \dot{R} f''(R) \right) \\
&\quad + \frac{k^2}{\mu^2 n_0^2} f'(R) \left( \frac{\dot{a}^2}{a_0^2} + 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{a_0 n_0} - 2\frac{\ddot{a}}{a_0} \right) \\
&\quad + \frac{2k^2}{3\mu^2 n_0^2} f'(R) \left( \frac{e_0 \dot{a}\dot{e}}{a_0 (1-e_0^2)} + \frac{e_0 \ddot{e}}{(1-e_0^2)} - \frac{e_0 \dot{e}\dot{n}}{n_0 (1-e_0^2)} + \frac{\dot{e}^2}{(1-e_0^2)^2} \right).
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Les équations (5.32) et (5.70) permettent d'écrire:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu^2}{3}\rho + \frac{\mu^2}{3}(p_{\parallel} + p_{\perp}) &= 2H\epsilon \frac{\mu^2}{k^2} - \frac{1}{6}(f(R) - R f'(R)) \\
&\quad + f'(R) \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{e\dot{e}}{(1-e^2)} - \frac{1}{3} \frac{e\dot{e}\dot{n}}{(1-e^2)} + \frac{1}{3} \frac{\dot{e}^2}{(1-e^2)^2} \right),
\end{aligned} \tag{5.73}$$

où on a posé  $n_0 = 1$  et  $b_0 = 1$ .

Les équations (5.33) et (5.71) conduisent à la relation:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu^2}{3}(p_{\parallel} - p_{\perp}) &= \frac{2}{3} \frac{e\dot{e}}{(1-e^2)} \epsilon \frac{\mu^2}{k^2} \\
&\quad + f'(R) \left( 3\frac{e\dot{e}\dot{a}}{a(1-e^2)} + \frac{e\ddot{e}}{(1-e^2)} - \frac{e\dot{e}\dot{n}}{(1-e^2)} + \frac{\dot{e}^2}{(1-e^2)^2} \right).
\end{aligned} \tag{5.74}$$

La soustraction de (5.73) et (5.74) conduit à la relation:

$$\left( H - \frac{\epsilon\mu^2}{f'(R)k^2} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{e\dot{e}}{(1-e^2)} f'(R) \left( H - \epsilon \frac{\mu^2}{k^2} \right) - \frac{1}{6} f(R) - R f'(R) = \frac{\mu^2}{3}\rho + \epsilon^2 \frac{\mu^4}{f'(R)k^4}, \tag{5.75}$$

et avec (5.74) on obtient finalement la relation suivante:

$$\left( \frac{e\ddot{e}}{1-e^2} + \frac{\dot{e}^2}{(1-e^2)^2} \right) + \frac{e\dot{e}}{(1-e^2)} \left( 3\frac{\dot{a}}{a} + 2\epsilon \frac{\mu^2}{f'(R)k^2} \right) = \frac{\mu^2}{f'(R)} (p_{\parallel} - p_{\perp}). \tag{5.76}$$

Dans l'approximation de faible excentricité  $(1 - e^2) \sim 1$  et  $(T_A)^\mu_\nu = \rho^A \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , l'équation (5.76) prend la forme simple suivante:

$$\left( e\ddot{e} + \dot{e}^2 \right) + e\dot{e} \left( 3\frac{\dot{a}}{a} + 2\epsilon \frac{\mu^2}{f'(R) k^2} \right) = \frac{2\mu^2}{f'(R)} \rho^A. \quad (5.77)$$

Pour obtenir l'excentricité d'un univers FRW ellipsoïdal dans le scénario branaire de DGP dans le cadre de la gravité modifiée, il faut d'abord spécifier la forme de la fonction  $f(R)$ . Plusieurs choix vérifiant certains critères de stabilité sont possibles.

### 5.2.2 Excentricité

Dans la suite nous prenons le modèle suivant, correspondant à une gravité quadratique

$$f(R) = R + f_0 R^2, \quad (5.78)$$

où  $f_0$  est un paramètre libre très petit.

En substituant dans l'équation (5.77) on obtient:

$$\left( e\ddot{e} + \dot{e}^2 + 3\frac{\dot{a}}{a} e\dot{e} \right) (1 + 2f_0 R) + 2e\dot{e}\epsilon \frac{\mu^2}{k^2} = 2\mu^2 \rho^A. \quad (5.79)$$

En utilisant l'équation (3.18) et  $(1 - e^2) \sim 1$ , on a:

$$1 + 2f_0 R = 1 + 2f_0 \left( 8\frac{\dot{a}}{a} e\dot{e} + 2e\ddot{e} + 2\dot{e}^2 - 6\frac{\ddot{a}}{a} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right). \quad (5.80)$$

En remplaçant dans (5.79) on obtient:

$$\begin{aligned} e\ddot{e} + \dot{e}^2 + 3\frac{\dot{a}}{a} e\dot{e} + 2f_0 \left[ -6\frac{\ddot{a}}{a} e\dot{e} - 6\frac{\ddot{a}}{a} \dot{e}^2 - 18\frac{\ddot{a}}{a} \frac{\dot{a}}{a} e\dot{e} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 e\dot{e} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \dot{e}^2 \right. \\ \left. - 18\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^3 e\dot{e} + 2e^2 \ddot{e}^2 + 2e\ddot{e}\dot{e}^2 + 6\frac{\dot{a}}{a} e^2 \ddot{e}\dot{e} + 2e\ddot{e}\dot{e}^2 + 2\dot{e}^4 + 6\frac{\dot{a}}{a} e\dot{e}^3 + 8\frac{\dot{a}}{a} e^2 \dot{e}\ddot{e} \right. \\ \left. + 8\frac{\dot{a}}{a} e\dot{e}^3 + 24\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 e^2 \dot{e}^2 \right] + 2\epsilon \frac{\mu^2}{k^2} e\dot{e} = 2\mu^2 \rho^A. \quad (5.81) \end{aligned}$$

Utilisons à nouveau l'approximation  $(1 - e^2) \sim 1$  et le facteur d'échelle  $a \sim t^{\frac{2}{3}}$ , l'équation précédente s'écrit:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{8}{3t^2}f_0\right) \left(e\ddot{e} + \dot{e}^2\right) + \left(\frac{2}{t} - \frac{16}{3t^3}f_0\right) e\dot{e} + 8f_0e\ddot{e}^2 + 4f_0 \left(e^2\ddot{e}^2 + \dot{e}^4\right) \\ & + \frac{56}{3t}f_0 \left(e^2\dot{e}\ddot{e} + e\dot{e}^3\right) + \frac{64}{3t^2}f_0e^2\dot{e}^2 + 2\epsilon\frac{\mu^2}{k^2}e\dot{e} = 2\mu^2\rho^A. \end{aligned} \quad (5.82)$$

En effectuant le changement de variable  $Y=e\dot{e}$  et en négligeant les termes en  $Y^2$  on obtient:

$$\left(1 - \frac{8}{3t^2}f_0\right) \dot{Y} + \left(\frac{2}{t} - \frac{16}{3t^3}f_0\right) Y + 4f_0\dot{Y}^2 + \frac{56}{3t}f_0\dot{Y}Y + 2\epsilon\frac{\mu^2}{k^2}Y = 2\mu^2\rho^A.$$

C'est encore une équation très compliquée à résoudre. Dans ce qui suit on fait l'ansait que la solution s'écrit comme:

$$Y(t) = Y_0(t) + f_0Y_1(t), \quad (5.83)$$

où  $Y_0(t)$  est solution de:

$$\dot{Y}_0 + \frac{2}{t}Y_0 + 2\epsilon\frac{\mu^2}{k^2}Y_0 = 2\mu^2\rho^A, \quad (5.84)$$

et  $Y_1(t)$  vérifie l'équation suivante:

$$\dot{Y}_1 + \frac{2}{t}Y_1 + \frac{56}{3t}Y_0\dot{Y}_1 = 0. \quad (5.85)$$

dont la solution est donnée par:

$$Y_1(t) = \exp \left[ -2 \int \frac{dt}{t \left(1 + \frac{56}{3t}Y_0(t)\right)} \right] + C \quad (5.86)$$

Si on utilise l'équation donnant  $e_0^2$  donnée par (5.84) on trouve que:

$$Y_0(t) = -\frac{\Omega_A^{(0)}}{6t^2} \left(1 - \frac{4t}{3r_c} + \frac{t^2}{r_c^2}\right). \quad (5.87)$$

En substituant dans (5.86) on obtient:

$$Y_1(t) = \exp \left[ - \int \frac{2}{\left(t - \frac{28}{9}\frac{\Omega_A^{(0)}}{t^2} \left(1 - \frac{4t}{3r_c} + \frac{t^2}{r_c^2}\right)\right)} dt \right] + C, \quad (5.88)$$

où  $C$  est une constante d'intégration. Ici on remarque que l'intégrale dans (5.88) demeure difficile à calculer, c'est pourquoi nous allons considérer deux régimes:

- Le régime  $r_c \ll 1$ . Dans ce régime la solution est donnée par:

$$Y_1(t) = t^{\frac{6}{7} \frac{r_c^3}{\Omega_A^{(0)}}} \exp \left[ \frac{9}{14} \frac{r_c^2}{\Omega_A^{(0)}} t \right] + C,$$

où  $C$  est une constante d'intégration.

- Le régime  $r_c \gg 1$ . Dans ce régime la solution s'exprime par la relation:

$$Y_1(t) = \exp \left[ -\frac{2}{3} \ln(t^3 - \frac{28}{9} \Omega_A^{(0)}) \right] + C,$$

Maintenant pour obtenir  $e^2(t)$  on intègre  $Y(t)$  par rapport à  $t$

$$e^2(t) = 2 \int^t Y(t) dt. \quad (5.89)$$

- Pour le régime  $r_c \ll 1$ , on montre que:

$$e^2(t) \approx \frac{\Omega_A^{(0)}}{3a^{3/2}} + \frac{2\Omega_A^{(0)}}{3r_c} \ln a - \frac{\Omega_A^{(0)}}{3r_c^2} a^{3/2} + f_0 \frac{28}{9r_c^2} e^{\frac{9r_c^2}{14\Omega_A^{(0)}} a^{3/2}}. \quad (5.90)$$

Le premier terme est le résultat de RG, alors que les termes restant sont dus à la gravité quadratique et le scénario branaire de DGP.

- Pour le régime  $r_c \gg 1$ , on obtient:

$$e^2(t) \approx \frac{\Omega_A^{(0)}}{3a^{3/2}} + \frac{2\Omega_A^{(0)}}{3r_c} \ln a + 2f_0 \left( \frac{28\Omega_A^{(0)}}{9} \right)^{1/3} \left( \frac{9t^3}{28\Omega_A^{(0)}} - 1 \right)^{1/3} {}_2F_1 \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, - \left( \frac{9t^3}{28\Omega_A^{(0)}} - 1 \right) \right). \quad (5.91)$$

Qui se réduit pour  $f_0 = 0$  à la valeur de l'excentricité à la limite de découplage pour le scénario branaire de DGP dans la gravité d'Einstein. Cependant la validité de cette relation est conditionnée par:

$$t \geq \left( \frac{28}{9} \Omega_A^{(0)} \right)^{1/3}. \quad (5.92)$$

Le comportement de l'excentricité est montré sur la figure ci-dessus pour différentes valeurs de  $f_0$  et de l'échelle de croisement  $r_c$  pour le régime  $r_c \ll 1$ . Pour le régime  $r_c \gg 1$ , le modèle DGP+f(R)-gravité ne produit pas le bon comportement à l'époque de découplage, justement à cause de la condition (5.92).

En utilisant la valeur du facteur d'échelle à la limite de découplage  $a_{dec} = \frac{1}{1+z_{dec}}$ , où  $z_{dec} = 1088$ ,  $\Omega_A^{(0)} \simeq 5 \times 10^{-8}$  et  $f_0 = 0.1$ , on obtient:

$$e_{dec} \approx \begin{cases} 2.5 \times 10^{-2}, & \text{pour } r_c = 0.1 \\ 2.4 \times 10^{-2}, & \text{pour } r_c = 0.05 \\ 3.1 \times 10^{-2}, & \text{pour } r_c = 0.005 \end{cases} \quad (5.93)$$

En résumé pour  $r_c \ll 1$ , on a une excentricité d'un univers FRW dans le scénario branaire de DGP et gravité quadratique de l'ordre de  $10^{-2}$ .

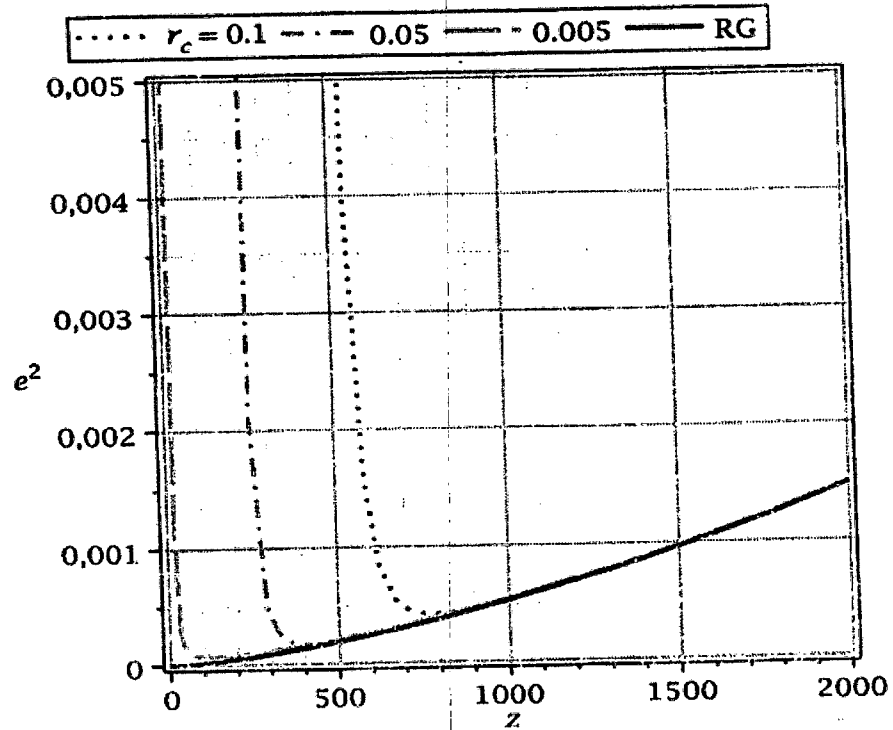


FIGURE 5.1- Evolution de l'excentricité en fonction du redshift  $z$  pour différentes valeurs de l'échelle de croisement  $r_c$  dans le régime  $r_c \ll 1$ , et  $f_0 = 0.1$



Nous allons maintenant discuter de la relation entre l'excentricité et le problème du moment quadripolaire du rayonnement du fond cosmique. Pour le traitement mathématique du problème nous allons suivre Campanelli et al [3, 4, 5].

Pour  $e \ll 1$ , on peut écrire la métrique à 5-dimensions sous forme suivante:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t, y)(\delta_{ij} - h_{ij})dx^i dx^j - b^2(t, y)dy^2, \quad (5.93)$$

où  $h_{ij}$  est une perturbation de la métrique, donnée par:

$$h_{ij} = e^2 \delta_{i3} \delta_{j3}. \quad (5.94)$$

On considère maintenant un photon émis à l'époque de découplage à  $t = t_{dec}$  à partir de la surface de dernière diffusion, qui voyage le long d'une géodésique de genre lumière et atteint aujourd'hui un observateur à l'instant  $t = t_0$ . Si on place l'observateur à l'origine, les rayons lumineux vus par l'observateur sont donnés par l'équation:

$$x^i(t) = n^i \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (5.95)$$

où  $n^i$  est le vecteur unité le long de la trajectoire de genre lumière et dirigé de l'observateur vers la surface de dernière diffusion.

La déviation de géodésique entre un observateur à  $x^i$  et un autre à  $x^i + \delta x^i$  le long du rayon à un instant  $t$  est donnée, au premier ordre de la perturbation de la métrique, par:

$$\delta l = -g_{ij} \delta x^i x^j \sim a \left( 1 - \frac{h_{ij} n^i n^j}{2} \right). \quad (5.96)$$

En définissant la vitesse propre d'un observateur par rapport un autre  $v = \frac{d(\delta l)}{dt}$ , et le redshift de la fréquence physique du photon  $\frac{\delta \omega_p}{\omega_p} = -v$ , on montre que le redshift de la fréquence comobile du photon est donnée par:

$$\frac{\delta \omega_c}{\omega_c} = \frac{\delta(\omega_p a)}{\omega_p a} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} n^i n^j \delta t. \quad (5.97)$$

Or la température du rayonnement fossile par rapport à un observateur comobile est donnée par  $\delta T \sim \omega_c$ , on obtient:

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} n^i n^j \delta t = \frac{1}{2} \int \frac{\partial e^2}{\partial t} \delta_{i3} \delta_{j3} n^i n^j \delta t = \frac{1}{2} e_{dec}^2 n_3^2, \quad (5.98)$$

où

$$n_3(\theta, \phi) = \cos \theta \cos \vartheta - \sin \theta \sin \vartheta \cos(\phi - \varphi), \quad (5.99)$$

et  $\vartheta$  et  $\varphi$  sont les angles entre les coordonnées sphériques galactique et l'axe  $c$  et l'axe  $a$ , respectivement.

D'un autre côté, l'anisotropie de température relative  $\frac{\delta T(\theta, \phi)}{T_0}$  donne le spectre de puissance

$$\frac{\delta T_l}{\langle T \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{l(l+1)}{2j+1}} \sum_m |a_{lm}|^2, \quad (5.100)$$

où  $\langle T \rangle = 2.726 \pm 0.010 K$  est la valeur moyenne de la température du rayonnement du fond cosmique fossile mesurée actuellement, et les  $a_{lm}$  sont les coefficients des harmoniques sphériques  $Y_{lm}$ . Pour  $l = 2$ , on obtient l'anisotropie quadripolaire. Récemment les observations de la mission WMAP (Wilkinson Map Anisotropy Probe) a révélé une déviation des valeurs observées par rapport aux valeurs prédites, appelée anomalie quadripolaire.

Cette anomalie se révèle à de grandes échelles pour lesquelles  $\theta > 60^\circ$ . En effet on a

$$(\delta T_2)_{obs}^2 \simeq 236 \mu K^2, \quad (\delta T_2)_{pred}^2 \simeq 1252 \mu K^2. \quad (5.101)$$

D'un autre côté, comme on l'a déjà signalé dans l'introduction, des analyses plus précises des données WMAP ont montré un alignement des quadripôles  $C_2$  et des octupoles  $C_3$  et sont concentrés dans un plan incliné de  $30^\circ$  par rapport au plan galactique. C'est ce résultat qui a motivé l'introduction d'un univers ellipsoïdal où une direction est en expansion différemment des directions transverses du plan équatorial [14].

Récemment Campanelli et al [3, 4, 5] ont montré que pour une excentricité de l'ordre  $10^{-2}$  les valeurs prédites pour l'anisotropie quadripolaire sont alors dans l'intervalle  $42.2 \mu K^2 \leq (\delta T_2)_{pred}^2 \leq 1001.6 \mu K^2$ , ce qui est en concordance avec les données observées. Ainsi, si on se réfère à nos résultats donnés par (5.92) on constate qu'un univers ellipsoïdal dans le modèle branaire de DGP et gravité quadratique résout l'anomalie quadripolaire du rayonnement du fond cosmique fossile.

## Chapter 6

### Conditions de jonction d'Israël

Pour décrire les conditions de jonction d'Israël-Darmois sur l'hypersurface  $\Sigma$  non-nulle, on utilise le principe de continuité de la géodésique à travers l'hypersurface, d'après l'équation géodésique implique dans la dérivée de premier ordre.

On divise l'espace-temps en deux régions  $v^+$  et  $v^-$  par une hypersurface  $\Sigma$ , où la région  $v^+$  est décrite par les coordonnées  $x_+^\alpha$  et la métrique  $g_{\alpha\beta}^+(x_+^\alpha)$ , alors que la région  $v^-$  est décrite par les coordonnées  $x_-^\alpha$  et la métrique  $g_{\alpha\beta}^-(x_-^\alpha)$  avec  $x_+^\alpha \neq x_-^\alpha$ . Soit le vecteur normal unité  $n^\alpha$  à l'hypersurface  $\Sigma$ , définit par [23, 24, 25] :

$$n^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dl}, \quad n_\alpha n^\alpha = \varepsilon, \quad (6.1)$$

où  $dl$  est un élément de longueur. On considère que l'hypersurface  $\Sigma$  est traversée orthogonalement par une congruence de géodésiques paramétrisées par la distance propre  $l$ , et on prend  $l=0$  sur  $\Sigma$ . Soit  $p$  un point au voisinage de  $\Sigma$ , muni du même système de coordonnées  $x^\alpha$  au voisinage des deux côtés de  $\Sigma$ , et les coordonnées intrinsèques à  $\Sigma$ ,  $y^a$ , sont aussi installés sur les deux côtés de  $\Sigma$  avec  $l(y^a) = 0$ .

Définissons la discontinuité d'une quantité tensorielle  $Q$  à travers  $\Sigma$  par :

$$[Q] |_\Sigma = Q(v^+) |_{\Sigma^+} - Q(v^-) |_{\Sigma^-}, \quad (6.2)$$

Sachant que par définition  $x^\alpha$ ,  $l$  et  $y^a$  continues sur  $\Sigma$ , alors :

$$[n^\alpha] = 0, \quad [e_a^\alpha] = 0. \quad (6.3)$$

On définit aussi la fonction de Heaviside  $\theta(l)$  telle que:

$$\theta(l) = \begin{cases} 1 & \text{pour } l > 0, \\ 0 & \text{pour } l < 0, \\ \text{Indéterminée} & \text{pour } l = 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

et qui jouit des propriétés suivantes:

$$\theta(l) + \theta(-l) = 1, \quad \frac{d\theta(l)}{dl} = \delta(l), \quad d\theta(l)^2 = 1. \quad (6.5)$$

Pour la métrique de l'espace-temps, qui est une fonction des coordonnées, on a donc:

$$g_{\alpha\beta} = \theta(l) g_{\alpha\beta}^+ + \theta(-l) g_{\alpha\beta}^-. \quad (6.6)$$

## 6.1 Première condition de jonction

Pour trouver la première condition de jonction on exige la continuité de la métrique ainsi que sa dérivée première donnée par:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &= \theta(l) g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + \theta(-l) g_{\alpha\beta,\gamma}^- + \frac{d\theta(l)}{dl} \frac{dl}{dx^\gamma} g_{\alpha\beta}^+ + \frac{d\theta(-l)}{dl} \frac{dl}{dx^\gamma} g_{\alpha\beta}^- \\ &= \theta(l) g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + \theta(-l) g_{\alpha\beta,\gamma}^- + \varepsilon \delta(l) (d\theta(l) g_{\alpha\beta}^+ + d\theta(-l) g_{\alpha\beta}^-) n_\gamma \\ &= \theta(l) g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + \theta(-l) g_{\alpha\beta,\gamma}^- + \varepsilon \delta(l) [g_{\alpha\beta}] n_\gamma, \end{aligned} \quad (6.7)$$

Comme la fonction de Heaviside est indéterminée en  $l=0$ , on élimine le dernier ce terme en demandant que:

$$[g_{\alpha\beta}]|_\Sigma = 0. \quad (6.8)$$

Avec

$$[g_{\alpha\beta}] e_a^\alpha e_b^\beta = 0, \quad (6.9)$$

ou

$$[g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta] = 0, \quad (6.10)$$

et la définition de la métrique induite sur l'hypersurface:

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (6.11)$$

la première condition de Jonction d'Israël est alors réduite à la continuité de la métrique induite sur  $\Sigma$

$$[h_{ab}]|_\Sigma = 0, \quad (6.12)$$

## 6.2 Deuxième condition de jonction

Pour déterminer la deuxième condition de jonction d'Israël, on fait appel à une autre propriété géométrique de  $\Sigma$ , en l'occurrence le tenseur symétrique de la courbure extrinsèque  $K_{ab}$  défini par:

$$K_{ab} = n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (6.13)$$

On a la relation suivante:

$$A_{a|b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (6.14)$$

Où  $(A_{\alpha;\beta} e_b^\beta)$  est donnée par[23] :

$$\begin{aligned} A_{\alpha;\beta} e_b^\beta &= h^{am} A_{m|b} e_a^\alpha - \varepsilon (n_{\mu;\beta} A^\mu e_b^\beta) n^\alpha \\ &= A_{|b}^a e_a^\alpha - \varepsilon (n_{\mu;\beta} A^a e_a^\mu e_b^\beta) n^\alpha \\ &= A_{|b}^a e_a^\alpha - \varepsilon A^a (n_{\mu;\beta} e_a^\mu e_b^\beta) n^\alpha \\ &= A_{|b}^a e_a^\alpha - \varepsilon K_{ab} A^a n^\alpha. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Il est évident que  $(A_{|b}^a e_a^\alpha)$  est une composante tangentielle à  $\Sigma$ , et  $(-\varepsilon K_{ab} A^a n^\alpha)$  est la composante normale.

Comme les vecteurs tangents sont fonctions des coordonnées intrinsèques  $y^\alpha$ , on déduit que:

$$[K_{ab}] = [n_{\alpha;\beta}] e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (6.16)$$

On a d'abord

$$[n_{\alpha;\beta}] = [n_{\alpha,\beta}] - [\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma] n_\gamma - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma [n_\gamma]. \quad (6.17)$$

Comme  $[n_\gamma] = \left[ \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda} \right] = 0$  et  $[n_{\alpha,\beta}] = \left[ \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \lambda \partial x^\beta} \right] = 0$ , on obtient:

$$\begin{aligned} [n_{\alpha;\beta}] &= -[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma] n_\gamma \\ &= -\frac{1}{2} (k_\alpha^\gamma n_\beta + k_\beta^\gamma n_\alpha - k_{\alpha\beta} n^\gamma) n_\gamma \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon k_{\alpha\beta} - k_\alpha^\gamma n_\beta n_\gamma - k_\beta^\gamma n_\alpha n_\gamma), \end{aligned} \quad (6.18)$$

où  $k_{\alpha\beta} = \varepsilon [g_{\alpha\beta,\gamma}] n^\gamma$ , et

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma] = \frac{1}{2} (k_\alpha^\gamma n_\beta + k_\beta^\gamma n_\alpha - k_{\alpha\beta} n^\gamma). \quad (6.19)$$

En substituant les équations (6.17) et (6.18) dans (6.16), on a alors:

$$[K_{ab}] = \frac{1}{2} \varepsilon k_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (6.20)$$

Considérons maintenant le scalaire de courbure extrinsèque:

$$K = h^{ab} K_{ab}. \quad (6.21)$$

La discontinuité de  $K$  à travers  $\Sigma$  s'écrit alors:

$$[K] = [h^{ab}] K_{ab} + h^{ab} [K_{ab}], \quad (6.22)$$

avec  $[h^{ab}] = 0$ , on obtient:

$$[K] = h^{ab} [K_{ab}] = \frac{1}{2} \varepsilon h^{mn} k_{\alpha\beta} e_m^\alpha e_n^\beta. \quad (6.23)$$

Le fait qu'on va utiliser par la suite les équations d'Einstein  $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$ , nous pousse à calculer les discontinuités des tenseurs de Riemann et de Ricci à travers  $\Sigma$ . En effet on a:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \theta(1) \Gamma_{\beta\gamma}^{+\alpha} + \theta(-1) \Gamma_{\beta\gamma}^{-\alpha}, \quad (6.24)$$

et

$$\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha = \theta(1) \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{+\alpha} + \theta(-1) \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{-\alpha} + \varepsilon \delta(1) [\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha] n_\delta. \quad (6.25)$$

Considérons le tenseur de Riemann:

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\mu - \Gamma_{\mu\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\mu. \quad (6.26)$$

Remplaçant (6.24) et (6.25) dans (5.26), on a alors:

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \theta(1) R_{\beta\gamma\delta}^{+\alpha} + \theta(-1) R_{\beta\gamma\delta}^{-\alpha} + \delta(1) A_{\beta\gamma\delta}^\alpha, \quad (6.27)$$

où

$$A_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \varepsilon ([\Gamma_{\beta\delta}^\alpha] n_\gamma - [\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha] n_\delta).$$

En contractant sur les indices on obtient le tenseur et le scalaire de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = \theta(1) R_{\alpha\beta}^+ + \theta(-1) R_{\alpha\beta}^- + \delta(1) A_{\alpha\beta}, \quad (6.28)$$

et

$$R = \theta(1) R^+ + \theta(-1) R^- + \delta(1) A. \quad (6.29)$$

Substituant maintenant (6.28) et (6.29) dans les équations d'Einstein:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \theta(1) \left( R_{\alpha\beta}^+ - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^+ R^+ \right) + \theta(-1) \left( R_{\alpha\beta}^- - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^- R^- \right) + \delta(1) A_{\alpha\beta} + \delta(1) A_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} A \delta(1) \\ &= 8\pi G (\theta(1) T_{\alpha\beta}^+ + \theta(-1) T_{\alpha\beta}^-) + \delta(1) A_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} A \delta(1), \end{aligned} \quad (6.30)$$

à partir de laquelle on déduit l'expression du tenseur d'énergie-impulsion:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \theta(1) T_{\alpha\beta}^+ + \theta(-1) T_{\alpha\beta}^- - \frac{\delta(1)}{16\pi G} (A g_{\alpha\beta} - 2A_{\alpha\beta}) \\ &= \theta(1) T_{\alpha\beta}^+ + \theta(-1) T_{\alpha\beta}^- + \delta(1) S_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

où

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi G} (A g_{\alpha\beta} - 2A_{\alpha\beta}). \quad (6.32)$$

On remarque que  $T_{\alpha\beta}$  est la somme de trois contributions. La première et la deuxième proviennent respectivement des tenseurs énergie-impulsion associés à  $v_+$  et  $v_-$ , alors que la troisième constitue le tenseur énergie-impulsion de la couche mince de taille 1 sur  $\Sigma$  séparant  $v_+$  et  $v_-$ .

En utilisant (6.19) il est facile de montrer que:

$$\begin{aligned} A_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \frac{\varepsilon}{2} [ (k_\beta^\alpha n_\delta + k_\delta^\alpha n_\beta - k_{\beta\delta} n^\alpha) n_\gamma - (k_\beta^\alpha n_\gamma + k_\gamma^\alpha n_\beta - k_{\beta\gamma} n^\alpha) n_\delta ] \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (k_\delta^\alpha n_\beta n_\gamma - k_\gamma^\alpha n_\beta n_\delta - k_{\beta\delta} n^\alpha n_\gamma + k_{\beta\gamma} n^\alpha n_\delta), \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{2} (k_{\alpha\mu} n^\mu n_\beta + k_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - k n_\alpha n_\beta - \varepsilon k_{\alpha\beta}), \quad (6.34)$$

et

$$A = \varepsilon (k_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \varepsilon k). \quad (6.35)$$

En remplaçant les équations (6.33-6.35) dans (6.32) on obtient:

$$16\pi G \varepsilon S_{\alpha\beta} = k_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta + k_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - k n_\alpha n_\beta - \varepsilon k_{\alpha\beta} - (k_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \varepsilon k) g_{\alpha\beta}, \quad (6.36)$$

A partir de cette relation, il est facile de voir que  $S_{\alpha\beta}$  est tangent à  $\Sigma$  on a:

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} n^\beta &\sim k_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta n^\beta + k_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha n^\beta - k n_\alpha n_\beta n^\beta - \varepsilon k_{\alpha\beta} n^\beta - (k_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \varepsilon k) g_{\alpha\beta} n^\beta \\ &\sim \varepsilon k_{\mu\alpha} n^\mu + k_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha n^\beta - k n_\alpha - \varepsilon k_{\alpha\beta} n^\beta - (k_{\mu\nu} n^\mu n^\nu n_\alpha - \varepsilon k n_\alpha) \\ &\sim 0. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Alors on a:

$$S_{ab} = S_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (6.38)$$

donnée par:

$$S_{ab} = \frac{1}{16\pi G\varepsilon} \left[ k_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta e_a^\alpha e_b^\beta + k_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha e_a^\alpha e_b^\beta - k n_\alpha n_\beta e_a^\alpha e_b^\beta - \varepsilon k_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - (k_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \varepsilon k) g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \right]. \quad (6.39)$$

Grace aux propriétés  $n_\alpha e_a^\alpha = 0$  et  $h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ , on obtient:

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \frac{1}{16\pi G\varepsilon} \left[ -\varepsilon k_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - h_{ab} k_{\mu\nu} (\varepsilon g^{\mu\nu} - \varepsilon h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu) + \varepsilon k h_{ab} \right] \\ &= \frac{1}{16\pi G} \left( h_{ab} h^{mn} k_{\mu\nu} e_m^\mu e_n^\nu - \varepsilon k_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \right). \end{aligned} \quad (6.40)$$

En utilisant les équations (6.20) et (6.23) on arrive finalement à:

$$S_{ab} = \frac{\varepsilon}{16\pi} (h_{ab} [K] - [K_{ab}]), \quad (6.41)$$

qui est la relation de Lanczos-Damois-Israël. Cette relation relie le tenseur d'énergie-impulsion surfacique au saut dans la courbure extrinsèque de  $\Sigma_+$  à  $\Sigma_-$ , et vice versa. Le tenseur d'énergie-impulsion de la Coche mince est alors donnée par:

$$T_{\Sigma}^{\alpha\beta} = \delta(1) S^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (6.42)$$

Donc, pour avoir une transition lisse à travers l'hypersurface, il faut éliminer la fonction  $\delta$  dans le tenseur d'énergie-impulsion. La seule solution possible est posée:

$$[K_{ab}]|_{\Sigma} = 0, \quad (6.43)$$

qui constitue la deuxième condition de jonction.

Considérons maintenant la généralisation des conditions de Jonction ci-dessus au scénario formé de deux branes symétrique. Soient alors deux hypersurfaces parallèles  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  définies par la direction orthogonal  $n^\alpha$ , et symétrique par rapport au point  $x^\alpha = 0$ , et on désigne par  $T$  la distance les séparant.

Dans ces coordonnées la symétrie des hypersurfaces impose que:

$$g_{\alpha\beta}(x^\alpha) = g_{\alpha\beta}(-x^\alpha), \quad (6.44)$$

$$K_{ab}(x^\alpha) = K_{ab}(-x^\alpha), \quad (6.45)$$

et selon (6.17) et (6.29) on a donc:

$$K_{ab}|_{\Sigma_1} = -K_{ab}|_{\Sigma_2}, \quad (6.46)$$



et de manière équivalente, en introduisant explicitement les coordonnées, on peut écrire:

$$K_{ab} \left( \frac{T}{2} \right) = -K_{ab} \left( -\frac{T}{2} \right). \quad (6.47)$$

A la limite ( $T \rightarrow 0$ ) on a par définition:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{K_{ab} \left( \frac{T}{2} \right) - K_{ab} \left( -\frac{T}{2} \right)}{T} = \partial_{x^\alpha} K_{ab} (0), \quad (6.48)$$

cela se comporte comme la fonction de Delta Dirac, si  $\Phi(x^n)$  est une fonction alors:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \partial_{x^\alpha} K_{ab} \Phi(x) dx = 2K_{ab}(0) \Phi(0), \quad (6.49)$$

à partir de laquelle on déduit que pour  $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 = \Sigma$ , on a:

$$[K_{ab}] = 2K_{ab} |_{\Sigma}, \quad (6.50)$$

ou bien

$$[K_{ab}] = 2K_{ab}(0^+) |_{y \rightarrow 0^+} = 2K_{ab}(0^-) |_{y \rightarrow 0^-}. \quad (6.51)$$

# Conclusion générale

# Chapter 7

## Conclusion générale

L'étude effectuée dans ce mémoire de magister est consacré à la détermination de l'excentricité d'un univers ellipsoïdal de dimensions 4 et 5 dans le cadre de la gravité modifiée dans le scénario branaire de Dvali-Gabadadze-Poratti (DGP). Comme gravité modifiée nous avons considéré la  $f(R)$ -gravité où  $f(R) = R + f_0 R^2$ . En utilisant les équations de mouvement d'Einstein et les conditions de jonction d'Israël adaptées au cas étudié, nous avons déterminé les équations de Friedmann dans le volume, qui dépendent de la géométrie et de la matière autant isotropique qu'anisotropique de la brane. Nous avons aussi à obtenir une expression donnant l'excentricité d'un univers ellipsoïdal à cinq dimensions dans les deux régimes  $r_c \ll 1$  et  $r_c \gg 1$ , et qui dépend uniquement de la pression anisotropique dans le volume. Il est important de noter que nos résultats coïncident avec ceux de la relativité générale d'Einstein dans le cas  $f(R) = R$  et  $r_c \gg 1$ , et avec les résultats de la gravité modifiée pour  $r_c \gg 1$ , ainsi qu'avec ceux du modèle branaire DGP où  $f(R) = R$ .

Nous avons utilisé un univers ellipsoïdal dans la théorie de la gravité modifiée et le scénario branaire de DGP pour expliquer la suppression de la contribution du moment quadripolaire dans l'anisotropie de température relative du rayonnement cosmique fossile (CMB radiation). Des analyses plus précises des données WMAP ont montré un alignement des quadripôles  $C_2$  et des octupôles  $C_3$  et sont concentrés dans un plan incliné de  $30^\circ$  rapport au plan galactique. C'est ce résultat qui a motivé l'introduction d'un univers ellipsoïdal où une direction est en expansion différemment des directions transverses du plan équatorial [14]. Campanelli et al [3, 4, 5] ont montré que pour une excentricité de l'ordre  $10^{-2}$  les valeurs prédites pour l'anisotropie quadripolaire sont alors dans l'intervalle  $42.2 \mu K^2 \leq (\delta T_2)_{pred}^2 \leq 1001.6 \mu K^2$ , ce qui est en concordance avec les données observées. En utilisant les résultats obtenus

dans ce mémoire nous avons montré qu'un univers ellipsoïdal dans le modèle branaire de DGP et gravité quadratique résout l'anomalie quadripolaire du rayonnement du fond cosmique fossile.

# Références

# Bibliography

- [1] E. ELBAZ, M. NOVELLE, *Cosmologie*, Université Claud Bernard Lyon-1, Institut des Sciences de la Matière (1992).
- [2] R. Durrer, V. Desjacques, "*Cosmologie*", Département de Physique Théorique de l'Université de Genève.
- [3] L. Campanelli, P. Ceal, G.L.Fogli et L.Tedesco, *Phys. Rev. D* 76, 063007 (2007) [arXiv : 0706.3802].
- [4] L. Campanelli, P. Ceal, G.L.Fogli et L.Tedesco [arXiv : 1103.6175].
- [5] L. Campanelli, P. Ceal, G.L.Fogli et L.Tedesco [arXiv : 1103.2658].
- [6] R. Gostri, M. Vergas dos Santos, I. Waga, R. Reis, M. O. Calvao and B. L. Lago [arXiv : 1203.3212].
- [7] D. Huterer and G. D. Strakman, *Phys. Rev. D* 70, 043515 (2004) [arXiv : 0310511].
- [8] J. Fric, "*Cosmologie: le Modèle Standard*" (2002).
- [9] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *Phys. Lett. B* 485, 208-214 [hep-th/0005016].
- [10] C. Deffayet, S. J. Landau, J. Raux, M. Zaldarriaga and P. Astier, *Phys. Rev. D* 66, 0240019 (2002) [arXiv : Astrp-ph/ 0201164].
- [11] C. Pitrou, Thèse de Doctorat : "*Dynamique non-linéaire et anisotropie primordiale en cosmologie*", Université Paris VI (2008).
- [12] A. H. Taub, *Annals Math.* 53.472 (1951).
- [13] Xian-Hui. Ge. Sang. Pyo. Kim, *JCAP* 0707, 001 (2007) [arXiv:hep-th/0703117].

- [14] A. Berera, R. V. Buniy, and T. W. Kephart, 2004 J. Cosmol. Astropart. Phys. JCAP 016, 0410 (2004); R. V. Buniy, A. Berera and T. W. Kephart, Phys. Rev. D 73 063529 (2006).
- [15] K. Nozari, M. Pourghasemi, JCAP 10, 044 [arXiv:0808.3701] (2008).
- [16] C. Deffayet, Phys. Rev. D 66 103504 (2002); C. Deffayet, Phys. Rev. D 71 023520 (2005).
- [17] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger, D. Langlois, Acta Phys. Polon. B 30, 3541 (1999); Phys. Lett. B 477, 285 (2000) [hep-th/9910219].
- [18] H. A. Bridgman, K. A. Malik and D. Wands, [astro-ph/01070245].
- [19] K. Nozari, "*DGP Cosmologie with a Non-Minimally Coupled Scalar Field on the Brane*" (2008) [arXiv: 0805.1537].
- [20] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Rev. D 63, 065007; [hep-th/0008054] (2001).
- [21] C. Deffayet, G. Dvali, and G. Gabadadze, Phys. Rev. D 65, 044023 (2002); C. Deffayet, S. J. Landau, J. Raux, M. Zaldarriaga and P. Astier, Phys. Rev. D 66, 0240019, (2002) [astro-ph/0201164].
- [22] R. Gannouji, Thèse de doctorat, "*Les mystères de l'expansion accélérée de l'univers*", LPTH UMR 5207 CNRS-UM2, Université de Montpellier, France (2008).
- [23] K. Nouicer, *Cours de la relativité générale "Chapitre sur les hypersurfaces"*, Université de Jijel (2010).
- [24] S. Ansoldi and L. Sindoni, "*Israel Junction Conditions*", 26-29 (2004).
- [25] N. Deruelle, M. Sasaki, Y. Sendouda, "*Junction Conditions in  $f(R)$  theories of Gravity*", Prog. Theor. Phys. 119, 237 (2008) [arXiv: gr-qc/0711.1150].
- [26] R. T. W. Kephart, Phys. Rev. D 73 063529 (2006).

### **Abstract:**

The aim of this work is to calculate the eccentric  $e^2(t)$  of the elliptical world in two different types of modified gravity theories. The first is the Dvali-Gabadadze-Poratti (DGP) brane scenario with one extra dimension, and the second is the (DGP) model with  $f(R)$  gravity theory.

### **Résumé:**

Le but de ce travail est de calculer l'excentricité  $e^2(t)$  d'un univers elliptique dans deux types de théorie de la gravité modifiée. Le premier est le modèle branaire de Dvali-Gabadadze-Poratti (DGP), et le deuxième est le modèle (DGP) dans la théorie  $f(R)$  gravité.

### **ملخص:**

الهدف من هذه الدراسة هو حساب لامركزية الكون بيضاوي الشكل  $e^2(t)$  من خلال نمطين مختلفين في التطوير الجديد الذي أدخل على نظرية الجاذبية. النمط الأول: نموذج DGP في سيناريو البراين ذو الأبعاد الإضافية. النمط الثاني: نموذج DGP في نظرية  $f(R)$  للجاذبية.