جامعة جيجل
المكتبة المركزية
رقم الجرد: T.H/216

S26/4

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES (L.M.P.A)

UNIVERSITÉ DE JIJEL

N° d'ordre: .....
Série : .....

MÉMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Spécialité: Mathématiques
Option: Analyse

Par

HADDAD Touma

جامعة جيجل
مصلحة الاقتناء
المكتبة المركزية
2008

THÈME

EXISTENCE DE SOLUTIONS DE QUELQUES PROBLÈMES D'ÉVOLUTION AVEC ET SANS RETARD

Soutenue le: 14 / 05 /2008 devant le jury:

Président	: A. Aibeche	Professeur	Université de Sétif
Rapporteur	: D. Azzam-Laouir	MC	Université de Jijel
Examinateur	: M. Yarou	MC	Université de Jijel
Examinateur	: T. Zerzaihi	MC	Université de Jijel
Examinateur	: W. Chikouche	Docteur	Université de Jijel

جامعة جيجل
نيابة الكلية المكلفة بما بعد التدرج والبحث
كلية العلوم

Dédicace

A mes parents qui n'ont cessé de me soutenir et m'encourager tout au long de ce mémoire.

A ma sœur Ilhem et ses enfants ; Amine et Nedjmeddine, cette page entière ne suffirait pas pour vous dire combien je vous aime !

A mes frères et ma sœur : Mouloud, Réda, Tahar et la petite Adila.

A mes collègues et tous mes proches ; Sabrina, Leila, Akila,...

Remerciements

Que de remerciements à adresser ! Je tiens tout d'abord à exprimer mes vifs remerciements à tous qui m'ont enseigné en post-graduation à l'université de Jijel ; merci d'avoir guidé mes premiers pas dans la recherche.

L'honneur pour moi est grand que Monsieur le professeur Aissa Aibeche ait accepté de présider le jury. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour sa disponibilité, sa rigueur méthodologique et son intuition scientifique.

Ce fut un très grand honneur de voir mon mémoire rapporté par Madame Dalila Azzam, je tiens à lui exprimer ma plus profonde gratitude.

Je remercie également Messieurs M. Yarou, T. Zerzaihi, Maîtres de Conférence et W. Chikouche, Docteur pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et d'avoir accepté d'en être examinateurs . Je leur en suis très reconnaissante.

L'ambiance entre thésards à l'université de Jijel est chaleureuse et conviviale, c'est le moment de remercier tout le monde, Leila, Sabrina, Akila, Asma, Hanane, Nora et bien d'autres encore.

Enfin, sans l'aide de Dieu tout puissant je n'aurai pas achevé ce mémoire.

Table des matières

Introduction Générale **2**

1 Notations et résultats préliminaires **6**

1.1 Notations. 6

1.2 Inclusions différentielles avec retard (mémoire). 7

1.3 Multi-applications et sélections. 8

1.4 Mesurabilité des multi-applications. 9

1.5 Concepts de continuité des multi-applications. 12

1.6 Quelques Théorèmes du point fixe. 14

1.7 Lemme de Gronwall. 14

1.8 Quelques résultats de convergence. 15

1.9 Quelques résultats de compacité. 16

2 Inclusion différentielle du second ordre avec retard **17**

2.1 Introduction. 17

2.2 Résultat d'existence sans retard. 18

2.3 Résultat d'existence avec retard. 19

3 Problème de Cauchy gouverné par un opérateur maximal monotone avec une perturbation semicontinue mixte. **33**

3.1 Introduction et préliminaires. 33

3.2 Résultat d'existence pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone avec une perturbation semicontinue mixte. 39

Bibliographie **49**

Introduction Générale

L'étude des équations et inclusions différentielles joue un rôle crucial, d'où l'importance de ces applications dans différents domaines.

Les résultats exposés dans ce mémoire consiste à utiliser divers types de la résolution des problèmes d'évolution concernant des inclusions différentielles.

Afin de situer les résultats présentés ici par rapport aux résultats d'existence dans la littérature, signalons que dans les espaces de Banach séparables, C. Castaing et A.G. Ibrahim ([19], [33]), A. Gavioli et L. Malaguti ([34]) ont établi l'existence des solutions des équations différentielles multivoques avec retard de la forme

$$\dot{x}(t) \in F(t, \tau(t)x) \quad p.\,p \;\; sur \;\; I \qquad (IDR\,1)$$

avec différentes hypothèses.
D'autre part, l'existence de solutions pour les inclusions différentielles du second ordre

$$\ddot{x}(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad p.\,p \;\; sur \;\; I \qquad (ID\,2)$$

a été étudiées par plusieurs autheurs voir par exemple [1, 7, 16, 17, 23, 28, 42, 43].

Dans ce travail et au Chapitre 2, nous nous sommes intéressées à l'étude d'existence de solutions d'un problème d'évolution du type

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(t, \tau(t)x, \tau(t)\dot{x}), & p.p.\ t \in [0,1]; \\ x(0) = x_0, & \dot{x}(0) = y_0; \\ x(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-r, 0]. \end{cases} \qquad (IDR\,2)$$

Ce problème est une extension au cas avec retard d'un théorème d'existence sans retard dans [47]. La méthode de démonstration repose sur une adaptation des techniques de discrétisation développées par C. Castaing , A.G. Ibrahim, A. Faik, A. Salvadori, L. Thibault et A. Syam (Voir [18, 19, 20, 45, 12, 30, 44]).
La méthode utilisée, discrétise l'intervalle du temps, le problème considéré (avec retard) étant ramené à un problème sans retard sur chaque sous intervalle.

Nous considérons pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la partition de l'intervalle $[0,T]$ définie par les points $t_k^n := \frac{k}{n}$, $(k = 0, 1, ..., n)$. Sur chaque sous intervalle $[t_k^n, t_{k+1}^n]$, on définit la multifonction $F_k^n : [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \times H \times H \rightrightarrows H$ par

$$F_k^n(t,x,y) := F(t, \tau(t) f_k^n(\cdot, x), \tau(t) g_k^n(\cdot, y)),$$

où

$$f_k^n(t,x) := \begin{cases} \varphi(t) & t \in [-r, 0]; \\ x_i^n(t) & t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}], i \in \{\overline{0, k-1}\}; \\ x_{k-1}^n(t_k^n) + n(t - \frac{k}{n})(x - x_{k-1}^n(\frac{k}{n})) & t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]. \end{cases}$$

et

$$g_k^n(t,y) := \begin{cases} \dot{\varphi}(t) & t \in [-r, 0]; \\ \dot{x}_i^n(t) & t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}], i \in \{\overline{0, k-1}\}; \\ \dot{x}_{k-1}^n(t_k^n) + n(t - \frac{k}{n})(y - \dot{x}_{k-1}^n(\frac{k}{n})) & t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]. \end{cases}$$

Pour chaque $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on démontre que F_k^n vérifie les différentes hypothèses du problème sans retard (Sans perdre de généralités, on peut prendre $T = 1$) et l'existence d'une solution $u_n(\cdot)$ est assuré par le théorème 1 dans [47].

Dans le chapitre 3, nous démontrons l'existence de solutions de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -A(t)x(t) + F(t, x(t)) & p.p.\ t \in [0,1]; \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{I}$$

moyennant des conditions bien adaptées sur A et F est une multi-application semicontinue mixte . Pour des théorèmes d'existence avec des perturbations semicontinue mixte on peut voir [5], [6].

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de l'existence de solutions de l'équation d'évolution de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -A(t) + f(t) & p.p.\ t \in [0,T]; \\ x(0) = x_0 \in D(A), \end{cases} \tag{II}$$

où A est un opérateur non nécessairement borné dans E et f une application intégrable à valeurs dans E. Par exemple, Hille ([36]) a étudié l'équation (II) dans le cas où A est un opérateur linéaire fermé et $f := 0$. Pour le cas où A est un opérateur non linéaire m-accrétif et h intégrable, nous renvoyons le lecteur aux articles de Benilan ([11]), Brézis ([13]), Crandall et Liggett ([24]), Kato ([37]) et Kobatashi ([38]). Lorsque A dépend de t, Crandall et Pazy ([25]) ont introduit la condition de régularité suivante : il existe $\mu_0 > 0$, une application continue $f : [0,1] \to E$ et une application croissante $L : [0,\infty[\to [0,\infty[$ telle que

$$\|(I+\mu A_t)^{-1}x - (I+\mu A_s)^{-1}x\| \leq \mu\|f(t)-f(s)\|L(\|x\|) \tag{1}$$

pour tout $\mu \in]0,\mu_0[$, tout $x \in E$ et tous $t,s \in [0,T]$.
Cette condition sera imposée dans l'étude de l'équation

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -A(t)x(t) + F(t,x(t)) & p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ x(0) = x_0 \in D(A). \end{cases} \tag{III}$$

qui a été établie par A.M. Gamal ([34]). Il est connu que cette condition implique que $\overline{D(A(t))}$ est constant. Plant ([41]) et Evans ([29]) ont adopté également cette condition pour le cas où A dépend de t, en supposant f intégrable et L continue et non décroissante. Enfin, signalons que, Cellina et Marchi ([22]) ont étudié le problème (III) dans le cas où A est indépendant de t et F définie et continue sur $[0,T] \times \overline{D(A(t))}$ à valeurs compactes non nécessairement convexes dans $\mathbb{R}^n$; et Attouch et Damlamian ([8]) ont étudié le problème dans le cas où A est indépendant de t et F est à valeurs convexes. Voir aussi [3], [4] pour le second ordre.

Ce mémoire est organisé de la sorte, dans le premier chapitre, nous précisons quelques notations qui nous serons utiles tout au long de notre travail, et on rappelle des concepts de base et quelques résultats préliminaires utilisés.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour les inclusions différentielles du second ordre avec retard de la forme

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(t,\tau(t)x,\tau(t)\dot{x}), & p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ x(0) = x_0, & \dot{x}(0) = y_0; \\ \\ x(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-r,0]. \end{cases} \tag{IDR 2}$$

Nous établissons l'existence de solutions du problème (I D R 2) sous l'ypothèse

$$|F(t,u,v)| \leq a(t) + b(\|u(0)\|^2 + \|v(0)\|^2)^{\frac{1}{q}} \; p.p,$$

pour tout $(t,u,v) \in [0,1] \times \mathcal{C}^1_H([-r,0]) \times \mathcal{C}_H([-r,0])$, où $F : [0,1] \times \mathcal{C}^1_H([-r,0]) \times \mathcal{C}_H([-r,0]) \rightrightarrows H$ est une multi-application mesurable en t à valeurs non vides fermées convexes, semi-continue supérieurement et $a \in L^q_+([0,1]), b > 0, q \geq 2$.

Dans le troisième chapitre, on traite un résultat d'existence d'un problème de Cauchy pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone sur un espace E de dimension finie de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -A(t)x(t) + F(t,x(t)) & p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ x(0) = x_0. \end{cases} \qquad (I)$$

avec

$$|A(t)x|_0 + \|F(t,x)\| \leq m(t),$$

pour tout $(t,x) \in [0,1] \times E$, où A est un opérateur maximal monotone et $F : [0,1] \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application mesurable et vérifiant la propriété suivante $\ll$ $\forall$t$\in$ $[0,1]$, en chaque point $x \in E$, tel que $F(t,x)$ est convexe, $F(t,\cdot)$ est semi-continue supérieurement, et quand $F(t,x)$ est non convexe, $F(t,\cdot)$ est semi-continue inférieurement sur un voisinage de $x \gg, et$ m$\in$ $L^2_E([0,1])$.
La technique employée dans la démonstration du résultat de ce chapitre consiste à utiliser l'existence d'une multiselection pour les multi-application semicontinues mixtes et une méthode standard du théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan.

Chapitre 1

Notations et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous résumons les notations et les concepts de base liés à l'étude des multi-applications, ainsi que les résultats que nous avons utilisé dans ce mémoire.

1.1 Notations.

Soit H un espace de Hilbert réel séparable muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$, et de la norme associée $\|\cdot\|$.
On note par

- $\overline{\mathbb{B}}$ ou $\overline{\mathbb{B}}(0,1)$ la boule unité fermée de H.
- Si A est un sous ensemble de H, $\overline{A}$ est la fermeture de A.
- $\mathcal{C}_H([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans l'espace H.
- $\mathcal{C}^1_H([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions continues $u : [0,1] \to H$ ayant une dérivée première continue, muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1_H([0,1])} = \max\{\max_{t\in[0,1]} \|u(t)\|, \max_{t\in[0,1]} \|\dot{u}(t)\|\}.$$

- $L^p_E([0,1]) = \{f : [0,1] \to E : f \textit{ mesurable et } (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}$, où $p \in [1,+\infty[$, l'espace des classes d'équivalence des fonctions mesurables sur $[0,1]$ telles que $x \mapsto |f(x)|^p$ soit intégrable sur $[0,1]$.
- $\sigma(E,E')$ la topologie faible définie sur E.
- $\sigma(E',E)$ la topologie faible $*$ définie sur E'.
- $\rightharpoonup$ la convergence faible.
- $\mathcal{L}([0,1])$ la tribu de Lebegue sur $[0,1]$.

- μ ou dt la mesure de Lebesgue.
- $\mathcal{B}(E)$ est la tribu de Borel, la plus petite tribu contenant la topologie de E.
- $\delta(\cdot, A)$ la fonction indicatrice de A, définie par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0 & si\ x \in A \\ +\infty & ailleurs. \end{cases}$$

- La fonction polaire de $\delta(\cdot, A)$ appelée aussi fonction support de A, est la fonction $\delta^*(\cdot, A)$, définie sur H par

$$\delta^*(\xi, A) = \sup_{x \in A} \langle \xi, x \rangle, \forall \xi \in H.$$

- Soit S un sous ensemble fermé de H.
  On note par $d(\cdot, S)$, la fonction distance au sous ensemble S, i.e,

$$d(x, S) := \inf_{u \in S} \|x - u\|, \forall x \in H.$$

- χ_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A. \end{cases}$$

1.2 Inclusions différentielles avec retard (mémoire).

Les inclusions différentielles avec retard fini sont des équations différentielles multivoques où le système ne depend pas uniquement de la valeur initiale, mais aussi de l'état antérieure du système. Si une inclusion différentielle associe à l'état du système à tout instant, la vélocité du système dépend de son état à tout instant. Ainsi, les inclusions différentielles avec retard (mémoire) expriment que la vitesse dépend non seulement de l'état du système à cet instant mais aussi d'une période du passé de la trajectoire, i.e, de la ligne décrite par un point matériel en mouvement, suivant une direction donnée, de son point de départ à son point d'arrivée, jusqu'à cet instant.
Pour poser explicitement cette idée dans une théorie déductive (relative) suivant laquelle on raisonne, on peut formaliser cette théorie comme suit :
on introduit pour tout $T > 0$ et $r > 0$, l'espace de Banach

$$\mathcal{C}_H([-r, T]) := \mathcal{C}([-r, T], H)$$

$$(resp. \quad \mathcal{C}_0 := \mathcal{C}([-r, 0], H)),$$

des fonctions continues de $[-r,T]$ (resp. $[-r,0]$) dans l'espace de Hilbert H, muni

de la norme de la convergence uniforme sur les intervalles compacts notée par :

$$\|\psi\|_{C_H([-r,T])} = \max_{s\in[-r,T]} \|\psi(s)\| = \max\{\|\psi(s)\| : \quad s \in [-r,T]\},$$

$$(resp. \quad \|\psi\|_{C_0} = \max_{s\in[-r,0]} \|\psi(s)\| = \max\{\|\psi(s)\| : \quad s \in [-r,0]\}).$$

Pour chaque $t \in I := [0,T]$, la fonction $u : [-r,T] \to H$ est continue de $[-r,T]$ dans H telle que sa restriction à $[0,T]$ est absolument continue, i.e, $u(t) := u(0) + \int_0^t \dot{u}(s)ds$, $\forall t \in [0,1]$, avec $\dot{u} \in L^1_H([0,T])$, et sa restriction à $[-r,0]$ égale à $\varphi \in \mathcal{C}_0$.
On définit la fonction

$$(\tau(t)u(\cdot))(s) := u(t+s), \quad pour\ tout\ s \in [-r,0].$$

Il est évident que, si $u \in \mathcal{C}_H([-r,0])$, alors $\tau(t)u(\cdot) \in \mathcal{C}_0$, i.e

$$\tau(t) : \mathcal{C}_H([-r,0]) \to \mathcal{C}_0,$$

et l'application $u \mapsto \tau(t)u(\cdot)$ est continue au sens de la convergence uniforme.

Cette formulation offre un cadre flexible pour modéliser une multitude de problèmes qui se rencontrent en théorie du contrôle optimal, dans la mécanique (systèmes dynamiques) et en économie. (Voir par exemple [42]).

1.3 Multi-applications et sélections.

Définition 1.3.1 *:*
Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : X \to \mathcal{P}(Y)$, ($\mathcal{P}(Y)$ est l'ensemble des parties de Y).

Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$D(F) := Dom(F) = \{x \in X / \ F(x) \neq \emptyset\},$$

$$gr(F) = \{(x,y) \in X \times Y / \ x \in D(F), y \in F(x)\},$$

$$Im(F) = \bigcup_{x\in D(F)} F(x).$$

Définition 1.3.2 :
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ Une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant

$$f(x) \in F(x), \forall x \in X.$$

Théorème 1.3.3 *(Théorème d'existence de sélections mesurables) (Voir [21]).*
Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : J \rightrightarrows X$ une multi-application $\Sigma-$mesurable à valeurs fermées.
Alors F admet au moins une sélection mesurable.

1.4 Mesurabilité des multi-applications.

Pour plus de détails sur cette section se référer à [21].

Définition 1.4.1 :
Soient X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si

1) $\emptyset \in \Sigma$,
2) $A \in \Sigma \Rightarrow X \backslash A \in \Sigma$,
3) $A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_n A_n \in \Sigma$.

- Le couple(X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.
- Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X.
- Si X est un espace topologique, la tribu Borélienne sur X notée $\mathcal{B}(X)$, est la plus petite tribu sur X contenant la topologie de X.

Définition 1.4.2 :
Soient (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2), deux espaces mesurables et g une fonction définie sur X_1 à valeurs dans X_2, on dit que g est $(\Sigma_1, \Sigma_2)-$mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2, g^{-1}(A) \in \Sigma_1$.

Si X_2 est un espace topologique, une fonction $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X))-$ mesurable est dite fonction Borélienne.

On donne dans ce qui suit quelques notions sur les mesures.

Définition 1.4.3 :
Soit (X, Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur X si
1) $\nu(\emptyset) = 0$,
2) $\nu(\cup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$, *pour toute suite dénombrable d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

- Le triplet (X, Σ, ν) est appelé espace mesuré.
- Si $\nu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que ν est une mesure positive et on note $\nu \geq 0$, ou que l'espace (X, Σ, ν) est positif.
- Si $\nu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que ν est une mesure finie ou que l'espace (X, Σ, ν) est fini.
- Si X est un espace topologique, la mesure $\nu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.
- On dit que ν est une mesure de probabilité si $\nu(X) = 1$.
- La tribu ν-complétée de Σ notée Σ_ν est la tribu engendrée par Σ et les ensembles ν-négligeables, c'est à dire

$$\Sigma_\nu = \{A \cup Z / \ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \nu - \text{négligeable}\}.$$

Définition 1.4.4 :
Soit (X, Σ, ν) un espace mesuré avec $\nu \geq 0$. Soit Z un sous ensemble de X, on dit que Z est $\nu-$négligeable, s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\nu(A) = 0$.

On dit qu'une propriété sur X est vraie $\nu-$presque partout ($\nu.p.p$), si l'ensemble où elle n'est pas vérifée est $\nu-$négligeable.

Définition 1.4.5 :
Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $\Gamma : J \rightrightarrows X$. On dit que Γ est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))-$mesurable ou tout simplement $\Sigma-$mesurable si pour tout ouvert V de X,

$$\Gamma^{-1}(V) = \{t \in J / \ \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.4.6 :
Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $\Gamma : J \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Considérons les propriétés suivantes
(i) $\Gamma^{-1}(B) \in \Sigma$, *pour tout Borélien B de X,*
(ii) $\Gamma^{-1}(C) \in \Sigma$, *pour tout fermé C de X,*
(iii) $\Gamma^{-1}(V) \in \Sigma$, *pour tout ouvert V de X,*
(iv) il existe une suite (σ_n) de sélections mesurables de Γ telle que

$$\forall t \in J, \Gamma(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}_{n \in \mathbb{N}},$$

(v) $\forall x \in X$, *la fonction distance* $d(x, \Gamma(\cdot))$ *est mesurable,*
(vi) le graphe de Γ *appartient à* $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

Alors (i) $\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* $\Rightarrow$ *(v)* $\Rightarrow$ *(vi).*

Si Γ *est à valeurs non vides complètes alors (iii)* $\Leftrightarrow$ *(v)* $\Leftrightarrow$ *(iv).*
Si Γ *est à valeurs non vides compactes alors (iii)* $\Rightarrow$ *(i).*
Si X *est un espace de Banach séparable et* Γ *est à valeurs convexes compactes, alors la mesurabilité de* Γ *est équivalente à la mesurabilité de la fonction support* $\delta^*(x', \Gamma(\cdot))$, *pour tout* $x' \in X'$.

Lemme 1.4.7 *:*
Soient (J, Σ, ν) *un espace mesuré avec* $\nu \geq 0$, $\sigma-$*finie et* Σ $\nu-$*complète. Soient* X *un espace métrique complet et* $\Gamma : J \rightrightarrows X$ *une multi-applicatin à valeurs non vides fermées, alors*

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi).$$

Définition 1.4.8 *:*
Soient (J, Σ, ν) *un espace mesuré fini,* X *un espace métrique séparable et* $\Gamma : J \rightrightarrows X$ *une multi-applicatin à valeurs non vides fermées. Alors l'ensemble de toutes les sélections mesurables de* Γ *est défini par*

$$S^1_\Gamma = \{f \in L^1_X(J) / \, f(t) \in \Gamma(t), \ \nu.\, p.\, p\}.$$

Il est clair que S^1_Γ est fermé. En utilisant le Théorème de sélection d'Aumann, on peut voir que S^1_Γ est non vide si et seulement si la fonction

$$t \mapsto \inf_{x \in \Gamma(t)} \|x\|$$

appartient à $L^1_{\mathbb{R}^+}(J)$. C'est le cas lorsque la fonction

$$t \mapsto |\Gamma(t)| = \sup_{x \in \Gamma(t)} \|x\|$$

appartient à $L^1_{\mathbb{R}^+}(J)$.

Définition 1.4.9 *:*
Une multi-application $\Gamma : J \rightrightarrows X$ *est dite intégrablement bornée ou scalairement intégrable si* Γ *est mesurable et la fonction* $t \mapsto |\Gamma(t)|$ *appartient à* $L^1_{\mathbb{R}^+}(J)$.

Théorème 1.4.10 :
Soient (J, Σ, ν) un espace mesuré avec $\nu \geq 0$, $\sigma-$ finie et Σ $\nu-$complète. Soit E un espace de Banach séparable et $\Gamma : J \rightrightarrows X$ une multi-applicatin intégrablement bornée à valeurs non vides convexes compactes. Alors
• *S^1_Γ est convexe $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'})-$compact.*

1.5 Concepts de continuité des multi-applications.

Définition 1.5.1 :
Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semi continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et $F(x) \subset V, \forall x \in U$.
On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x \in X$.

Ennonçons les propriétés suivantes, et pour plus de détails on peut se référer à [9].
- **1)** Le graphe d'une multi-application s.c.s à valeurs fermées est fermé. Donc si F est s.c.s à valeurs fermées,

$$\limsup_{x' \to x} F(x') \subset F(x).$$

- **2)** Si Y est compact, F à valeurs fermées et $gph(F)$ est fermé dans $X \times Y$ alors F est s.c.s.

Définition 1.5.2 :
Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semi continue inférieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et $F(U) \cap V \neq \emptyset$.
On dit que F est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point $x \in X$.

Théorème 1.5.3 :
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes
i) *F est semicontinue supérieurement sur X,*
ii) *l'ensemble $F^{-1}_+(G) := \{x \in X : F(x) \subset G\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert G de Y,*
iii) *l'ensemble $F^{-1}(M) := \{x \in X : F(x) \cap M \neq \emptyset\}$ est un fermé de X pour tout fermé M de Y.*
iv) *$\overline{F^{-1}(U)} \subseteq F^{-1}(U)$ pour tout sous ensemble U de Y.*

Théorème 1.5.4 :
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes
i) *F est semicontinue inférieurement sur X,*
ii) *l'ensemble $F_+^{-1}(G) := \{x \in X : F(x) \subset G\}$ est un fermé de X pour tout fermé G de Y,*
iii) *l'ensemble $F^{-1}(M) := \{x \in X : F(x) \cap M \neq \emptyset\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert M de Y.*
iv) *$\overline{F_+^{-1}(U)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{U})$ pour tout sous ensemble U de Y.*

Proposition 1.5.5 :
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes semicontinue supérieurement sur X. Alors pour chaque ensemble compact $K \subset X$, l'image $F(K) := \bigcup_{x \in K} F(x)$ est un compact de Y.

Rappelons la définition d'une fonction absolument continue.

Définition 1.5.6 :
On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

nous avons

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.5.7 :
Une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si et selement si elle est l'intégrale de sa dérivée, c'est à dire

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fause.
Nous terminons cette section par l'énnoncé d'un Théorème de fermeture pour les multi-applications s.c.s.

Théorème 1.5.8 *(Théorème VI.4 Chap 3 [21]).*
Soient E un espace de Banach séparable, X un espace topologique et Φ une multi-application définie sur $[0,T]\times X$ à valeurs non vides convexes compactes dans E et telle que pour tout $t\in[0,T]$ fixé, $\Phi(t,\cdot)$ est s.c.s. Soient $(x_n), x$ des fonctions définies sur $[0,T]$ à valeurs dans X et $(y_n), y$ de fonctions intégrables définies sur $[0,T]$ à valeurs dans E.
Supposons que

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t), p.p\ sur [0,T]$,
b) (y_n) *converge vers* y $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'})$,
c) $y_n(t)\in\Phi(t,x_n(t)), p.p$ *sur* $[0,T]$.

Alors $y(t)\in\Phi(t,x(t)), p.p$ sur $[0,T]$.

1.6 Quelques Théorèmes du point fixe.

On donne dans cette section quelques Théorèmes du point fixe qui nous seront utiles dans les démonstrations de nos Théorèmes d'existence. (Voir [39]).

Théorème 1.6.1 *(Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan).*
Soient X un espace topologique séparé localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de X et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application s.c.s à valeurs non vides convexes fermées. Alors F admet un point fixe dans S, c'est à dire il existe $x\in S$ tel que $x\in F(x)$.

Le corollaire suivant du Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan nous donne la forme faible de ce dernier.

Théorème 1.6.2 *:*
Soient E un espace de Banach, S un sous ensemble non vide convexe faiblement compact de E et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application faiblement-faiblement s.c.s et à valeurs non vides convexes faiblement compactes. Alors F admet un point fixe dans S.

1.7 Lemme de Gronwall.

L'inégalité de Gronwall admet de nombreuses versions parmi elles le lemme suivant.

Lemme 1.7.1 *(Première formule) :*
Soient f, g, h des fonctions définies sur $[0,T]$ à valeurs dans $[0,+\infty]$ telles que

$$f(t)\le g(t)+\int_0^t f(\tau)h(\tau)d\tau,$$

alors

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t g(\tau)h(\tau)exp(\int_\tau^t h(s)ds)d\tau.$$

1.8 Quelques résultats de convergence.

Les résultats suivants sont pris de la référence [27].

Théorème 1.8.1 *(Théorème de convergence de Lebesgue).*
Si la suite (f_n) de fonctions définies $\mu-p.p$ sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, converge $\mu-p.p$ vers une fonction f et si de plus les f_n supposées $\mu-$ intégrables vérifient $\mu-p.p$ et pour tout n la condition

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

où g est une fonction $\mu-$ intégrable indépendante de n. Alors f est $\mu-$ intégrable et on a

$$\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

Théorème 1.8.2 *(Théorème d'Ascoli-Arzelà).*
Soient J un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $C(J,Y)$, l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y, muni de la topologies de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et selement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact, avec

$$H(x) = \{f(x)/\ f \in H\}.$$

Le Théorème suivant est une conséquence du Théorème d'Ascoli-Arzelà.

Théorème 1.8.3 *(Théorème 4 chap 2 [9])*
Soient J un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de dimension finie et soit (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans E satisfaisant les conditions suivantes
1) $\forall t \in J$, $(f_n(t))$ est un un sous ensemble relativement compact de E,
2) il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in L^1_{\mathbb{R}}(J)$ telle que

$$\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t), p.p\ sur J.$$

Alors il existe une sous suite de (f_n) (qu'on note aussi (f_n)) qui converge vers une fonction absolument continue $f : J \to E$ au sens suivant
a) (f_n) converge uniformément ver f,
b) $(\dot{f}_n)$ converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $L^1_E(J)$, c'est à dire $(\dot{f}_n)$ converge vers $\dot{f}$ $\sigma(L^1_E, L^\infty_E)$.

1.9 Quelques résultats de compacité.

Théorème 1.9.1 *(théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki). Voir ([14]).*
Soit E un espace de Banach, alors la boule unité fermée de E'

$$\overline{\mathbb{B}}_{E'} := \{f \in E' / \ \|f\|_{E'} \leq 1\}$$

est compact pour la topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$.

Théorème 1.9.2 *(théorème de Banach-Dieudonné). Voir ([15], [16], [17], [35]).*
Soit E un espace de Banach séparable, $\overline{\mathbb{B}}_{E'}$ la boule unité fermée de E'. Alors sur $\overline{\mathbb{B}}_{E'}$ la topologie de la convergence faible coincide avec la topologie de la convergence compacte. $(\overline{\mathbb{B}}_{E'}, \sigma(E', E))$ est métrisable.

Théorème 1.9.3 *(Théorème d'Eberlein-Smŭlian). Voir [39].*
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

i) S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.

ii) S est faiblement (relativement) compact.

Chapitre 2

Inclusion différentielle du second ordre avec retard

2.1 Introduction.

De nombreuses études ont été effectuées pour l'obtention de résultats d'existence pour les inclusions différentielles avec retard.
L'une des méthodes, que nous allons utilisé ici se base sur une adaptation des techniques de discrétisation développée dans [12, 18, 19, 20, 45], où le problème avec retard est ramené à un problème sans retard sur chaque sous intervalle (subdivision de l'intervalle du temps).

Commençons par énoncer un résultat d'existence pour le cas d'une inclusion différentielle du second ordre sans retard.

2.2 Résultat d'existence sans retard.

Théorème 2.2.1 *([40], [47])*
Soit H un epace de Hilbert réel séparable. Soit $F : [0,1] \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées convexes satisfaisant les hypothèses suivantes :
$(\mathcal{H}_1)$ F est mesurable en t.
$(\mathcal{H}_2)$ $F(t,\cdot,\cdot)$ est semi continue supérieurement.
$(\mathcal{H}_3)$ il existe $a \in L^q_+([0,1]), (q \geq 2), b > 0$, telle que

$$||F(t,u,v)|| := \sup\{\|s\|; s \in F(t,u,v)\} \leq a(t) + b(\|u\|^2 + \|v\|^2)^{\frac{1}{q}} \ p.p$$

pour tout $(u,v) \in H \times H$.
Alors l'ensemble X des solutions du problème de Cauchy pour l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)), & p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ u(0) = u_0, & \dot{u}(0) = v_0; \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

est non vide compact dans $C^1_H([0,1])$ et $\forall u \in X$, u vérifie

$$\begin{cases} u(0) = u_0, & \dot{u}(0) = v_0; \\ u(t) := u_0 + \int\limits_0^t v(s)ds, & \forall t \in [0,1]; \\ v(t) := v_0 + \int\limits_0^t z(s)ds, & \forall t \in [0,1]; \\ \\ z(t) \in F(t,u(t),v(t)), & p.p.\ sur [0,1]. \end{cases}$$

De plus, on a les estimations suivantes

$$\|u(t)\| \leq M_1,\ \forall t \in [0,1];$$
$$\|v(t)\| \leq M_2,\ \forall t \in [0,1];$$
$$z \in S^q_\lambda,$$

telle que $S^q_\lambda := \{s \in L^q_+([0,1]);\ |s(t)| \leq \lambda(t) p.\ p\}$ avec $\lambda(t) \in L^q_{\mathbb{R}^+}([0,1])$.

On donne maintenant notre résultat principal de ce chapitre qui est l'existence de solutions pour le problème avec retard.

2.3 Résultat d'existence avec retard.

Théorème 2.3.1 :
Soit H un espace de dimension finie. Soit $F : [0,1] \times C_H^1([-r,0]) \times C_H([-r,0]) \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides compactes convexes satisfaisant les hypothèses suivantes :
$(\mathcal{H}_1)$ F est mesurable par rapport à t.
$(\mathcal{H}_2)$ $F(t,\cdot,\cdot)$ est semi continue supérieurement sur $C_H^1([-r,0]) \times C_H([-r,0])$.
$(\mathcal{H}_3)$ il existe $a \in L_+^q([0,1]), (q \geq 2), b > 0$ telle que

$$||F(t,u,v)|| := \sup\{\|s\|; s \in F(t,u,v)\} \leq a(t) + b(\|u(0)\|^2 + \|v(0)\|^2)^{\frac{1}{q}} \ p.p$$

pour tout $(t,u,v) \in [0,1] \times C_H^1([-r,0]) \times C_H([-r,0])$.
Soient $u_0, v_0 \in H$ et soit $\varphi \in C_H^1([-r,0])$ telle que $\varphi(0) = u_0$ et $\dot{\varphi}(0) = v_0$.
Alors l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,\tau(t)u,\tau(t)\dot{u}), & p.p.\ t \in [0,1]; \\ u(0) = u_0, & \dot{u}(0) = v_0; \\ u(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-r,0]; \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\tau)$$

admet au moins une solution dans $C_H^1([-r,1])$.

مصلحة الاقتناء
المكتبة المركزية

Preuve. La démonstration se fait en quatre étapes.
Etape 1. *Construction des suites approximantes* :
Considérons la partition de $[0,1]$ définie par les points :
$t_k^n := \frac{k}{n}$, $(k = 0,1,...,n)$. Pour chaque $(t,x) \in [-r,\frac{1}{n}] \times H$, on définit
$f_0^n : [-r,t_1^n] \times H \longrightarrow H$ et $g_0^n : [-r,t_1^n] \times H \longrightarrow H$ par

$$f_0^n(t,x) := \begin{cases} \varphi(t) & t \in [-r,0]; \\ \varphi(0) + nt(x - \varphi(0)) & t \in [0,t_1^n]. \end{cases} \tag{2.1}$$

et

$$g_0^n(t,y) := \begin{cases} \dot{\varphi}(t) & t \in [-r,0]; \\ \dot{\varphi}(0) + nt(y - \dot{\varphi}(0)) & t \in [0,t_1^n]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Observons que $f_0^n(\frac{1}{n},x) = x$ et $g_0^n(\frac{1}{n},y) = y$, pour tout $(x,y) \in H \times H$ et que les applications $x \longmapsto \tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,x)$ et $y \longmapsto \tau(\frac{1}{n})g_0^n(\cdot,y)$ de H vers $C_0 = C_H([-r,0])$ sont 1-Lipschitziennes.

En effet, on a pour tout $(x,y) \in H \times H$

$$\begin{aligned}
\|\tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,x) - \tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,y)\|_{C_0} &= \sup_{s\in[-r,0]} \|f_0^n(s+\frac{1}{n},x) - f_0^n(s+\frac{1}{n},y)\| \\
&= \sup_{s\in[-r+\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \|f_0^n(s,x) - f_0^n(s,y)\| \\
&= \sup_{0\leqslant s\leqslant\frac{1}{n}} \|ns(x-\varphi(0)) - ns(y-\varphi(0))\| \\
&= \sup_{0\leqslant s\leqslant\frac{1}{n}} |ns(x-y)\| \\
&= \|x-y\|
\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient pour tout $(x,y) \in H \times H$

$$\|\tau(\frac{1}{n})g_0^n(\cdot,x) - \tau(\frac{1}{n})g_0^n(\cdot,y)\|_{C_0} = \|x-y\|.$$

Considérons la multifonction $F_0^n : [0,\frac{1}{n}] \times H \times H \rightrightarrows H$ définie par

$$F_0^n(t,x,y) := F(t,\tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,x),\tau(\frac{1}{n})g_0^n(\cdot,y)).$$

L'utilisation de cette technique nécessite des vérifications non triviales.
Montrons que F_0^n vérifie les conditions suivantes :
(1) F_0^n est mesurable en t.
(2) Pour tout $t \in [0,\frac{1}{n}]$, $F_0^n(t,\cdot,\cdot)$ est *s.c.s* sur $H \times H$.
(3) Pour tout $(t,x,y) \in [0,\frac{1}{n}] \times H \times H$

$$\|F_0^n(t,x,y)\| = \|F(t,\tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,x),\tau(\frac{1}{n})g_0^n(\cdot,y))\| \leq a(t) + b(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{q}}.$$

En effet,
1)- La mesurabilité de F_0^n en t découle directement de la mesurabilité de F en t.
2)- Soient $(t,x,y) \in [0,\frac{1}{n}] \times H \times H$.
Montrons que $F_0^n(t,\cdot,\cdot)$ est semi continue supérieurement sur $H \times H$.
Soit V un fermé de $H \times H$, comme $F(t,\cdot,\cdot)$ est s.c.s, d'après la propriété **(iii)** du théorème 1.5.3 on déduit que $F^{-1}(t,\cdot,\cdot)(V)$ est un fermé de $C_H^1([-r,0]) \times C_H([-r,0])$.
Considérons l'application h définie comme suit

$$\begin{aligned}
h : H \times H &\to C_H^1([-r,0]) \times C_H([-r,0]) \\
(x,y) &\mapsto h(x,y) = (\tau(\tfrac{1}{n})f_0^n(\cdot,x),\tau(\tfrac{1}{n})g_0^n(\cdot,y))).
\end{aligned}$$

et remarquons que

$$\begin{aligned}
F_0^n(t,x,y) &= F(t,h(x,y)) \\
&= [F(t,\cdot,\cdot) \circ h](x,y)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}[F_0^n(t,\cdot,\cdot)]^{-1}(V) &= [F(t,\cdot,\cdot)\circ h]^{-1}(V)\\ &= h^{-1}([F(t,\cdot,\cdot)]^{-1}(V)).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}F_0^{n-1}(t,\cdot,\cdot)(V) &= (F(t,\tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,x),\tau(\frac{1}{n})g_0^n(\cdot,y)))^{-1}(V)\\ &= (F(t,\cdot,\cdot)\circ h)^{-1}(V)\\ &= (h^{-1}(F^{-1}(t,\cdot,\cdot))(V)\end{aligned}$$

et comme les applications $x \longmapsto \tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,x)$ et $y \longmapsto \tau(\frac{1}{n})g_0^n(\cdot,y)$ de H vers $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_H([-r,0])$ sont 1-Lipschitziennes, on conclut que h est continue et donc $h^{-1}(F^{-1}(t,\cdot,\cdot))(V)$ est un fermé de $H\times H$, par conséquent $(F_0^n)^{-1}(t,\cdot,\cdot)(V)$ l'est aussi.
D'où , $F_0^n(t,\cdot,\cdot)$ est semi continue supérieurement.
3)- Pour tout $(t,x,y)\in[0,\frac{1}{n}]\times H\times H$:

$$\begin{aligned}\|F_0^n(t,x,y)\| &= \|F(t,\tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,x),\tau(\frac{1}{n})g_0^n(\cdot,y))\|\\ &\leq a(t)+b(\|\tau(\frac{1}{n})f_0^n(\cdot,x)(0)\|^2+\|\tau(\frac{1}{n})g_0^n(\cdot,y)(0)\|^2)^{\frac{1}{q}}\\ &= a(t)+b(\|f_0^n(\frac{1}{n},x)\|^2+\|g_0^n(\frac{1}{n},y)\|^2)^{\frac{1}{q}}\\ &= a(t)+b(\|x\|^2+\|y\|^2)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Ainsi, F_0^n vérifie les hypothèses du Théorème 2.2.1, donc nous avons assuré l'existence d'une solution $v_0^n : [0,\frac{1}{n}] \longrightarrow H$, $(v_0^n \in \mathcal{C}_H^1([0,\frac{1}{n}]))$ du problème

$$\left\{\begin{array}{ll}\ddot{v}_0^n(t)\in F_0^n(t,v_0^n(t),\dot{v}_0^n(t)), & p.p.\ t\in[0,\frac{1}{n}];\\ \\ v_0^n(0)=\varphi(0)=u_0, & \dot{v}_0^n(0)=v_0.\end{array}\right. \qquad (\mathcal{P}_0^n)$$

De plus, v_0^n vérifie

$$\left\{\begin{array}{ll}v_0^n(t):=v_0^n(t_0^n)+\int_0^t w_0^n(s)ds, & \forall t\in[0,\frac{1}{n}];\\ w_0^n(t):=w_0^n(t_0^n)+\int_0^t z_0^n(s)ds, & \forall t\in[0,\frac{1}{n}];\\ \\ z_0^n(t)\in F_0^n(t,v_0^n(t),w_0^n(t)), & p.p.\ sur\ [0,\frac{1}{n}];\end{array}\right. \qquad (2.3)$$

avec

$$\|v_0^n(t)\| \leq M_1, \ \forall t \in [0, \frac{1}{n}]; \tag{2.4}$$

$$\|w_0^n(t)\| \leq M_2, \ \forall t \in [0, \frac{1}{n}]; \tag{2.5}$$

$$z_0^n \in S_\lambda^q \qquad p.p \ \ sur \ \ [0, \frac{1}{n}]. \tag{2.6}$$

Posons

$$v_n(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \forall t \in [-r, 0]; \\ v_0^n(t) & \forall t \in [0, \frac{1}{n}]; \end{cases} \tag{2.7}$$

alors, v_n est bien définie sur $[-r, \frac{1}{n}]$ et

$$\dot{v}_n(t) := \begin{cases} \dot{\varphi}(t) & \forall t \in [-r, 0]; \\ \dot{v}_0^n(t) & \forall t \in [0, \frac{1}{n}]. \end{cases} \tag{2.8}$$

De plus , on a

$$\begin{cases} \ddot{v}_n(t) \in F(t, \tau(\frac{1}{n}) f_0^n(\cdot, v_n(t)), \tau(\frac{1}{n}) g_0^n(\cdot, \dot{v}_n(t)), & p.p. \ t \in [0, \frac{1}{n}]; \\ v_n(0) = \varphi(0) = u_0, & \dot{v}_n(0) = \dot{\varphi}(0) = v_0; \\ v_n(t) = \varphi(t) & \forall t \in [-r, 0]; \end{cases}$$

avec

$$\|v_n(t)\| \leq M_1, \ \forall t \in [0, \frac{1}{n}]; \tag{2.9}$$

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq M_2, \ \forall t \in [0, \frac{1}{n}]; \tag{2.10}$$

$$\ddot{v}_n \in S_\lambda^q \qquad p.p \ \ sur \ \ [0, \frac{1}{n}]. \tag{2.11}$$

Par récurence, supposons que $v_0^n(\cdot), ..., v_{k-1}^n(\cdot), 1 \leqslant k \leqslant n-1$ sont définie sur $[-r, \frac{k+1}{n}]$ $(k \geqslant 1)$ avec $v_{k-1}^n = \varphi$ sur $[-r, 0]$.

De façon similaire, on peut définir $f_k^n, g_k^n : [-r, t_{k+1}^n] \times H \longrightarrow H$ comme suit

$$f_k^n(t,x) := \begin{cases} \varphi(t) & t \in [-r,0]; \\ v_i^n(t) & t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}], i \in \{\overline{0,k-1}\}; \\ v_{k-1}^n(t_k^n) + n(\frac{k}{n})(x - v_{k-1}^n(\frac{k}{n})) & t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}], \end{cases} \tag{2.12}$$

et

$$g_k^n(t,y) := \begin{cases} \dot{\varphi}(t) & t \in [-r,0]; \\ \dot{v}_i^n(t) & t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}], i \in \{\overline{0,k-1}\}; \\ \dot{v}_{k-1}^n(t_k^n) + n(\frac{k}{n})(y - \dot{v}_{k-1}^n(\frac{k}{n})) & t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]. \end{cases} \tag{2.13}$$

Notons que l'on a toujours

$$\tau(\frac{k+1}{n}) f_k^n(0,x) = f_k^n(\frac{k+1}{n}, x) = x,$$

et

$$\tau(\frac{k+1}{n}) g_k^n(0,y) = g_k^n(\frac{k+1}{n}, y) = y,$$

pour tout $(x,y) \in H \times H$.

Notons aussi que, pour tout (x,u) dans $H \times H$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\tau(\frac{k+1}{n}) f_k^n(\cdot,x) - \tau(\frac{k+1}{n}) f_k^n(\cdot,y)\|_{C_0} &= \sup_{s\in[-r,0]} \|f_k^n(s+\frac{k+1}{n},x) - f_k^n(s+\frac{k+1}{n},y)\| \\ &= \sup_{s\in[-r+\frac{k+1}{n},\frac{k+1}{n}]} \|f_k^n(s,x) - f_k^n(s,y)\| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\tau(\frac{k+1}{n}) g_k^n(\cdot,x) - \tau(\frac{k+1}{n}) g_k^n(\cdot,y)\|_{C_0} &= \sup_{s\in[-r,0]} \|g_k^n(s+\frac{k+1}{n},x) - g_k^n(s+\frac{k+1}{n},y)\| \\ &= \sup_{s\in[-r+\frac{k+1}{n},\frac{k+1}{n}]} \|g_k^n(s,x) - g_k^n(s,y)\| \end{aligned}$$

On distingue deux cas

(1)- Si $-r+\frac{k+1}{n}\leq\frac{k}{n}$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[-r+\frac{k+1}{n},\frac{k+1}{n}]}\|f_k^n(s,x)-f_k^n(s,y)\| &= \sup_{s\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}\|f_k^n(s,x)-f_k^n(s,y)\|\\ &= \sup_{\frac{k}{n}\leqslant s\leqslant\frac{k+1}{n}}\|n(s-\frac{k}{n})(x-y)\|\\ &= n(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n})\|x-y\|\\ &= \|x-y\|\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[-r+\frac{k+1}{n},\frac{k+1}{n}]}\|g_k^n(s,u)-g_k^n(s,v)\| &= \sup_{s\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}\|g_k^n(s,u)-g_k^n(s,v)\|\\ &= \sup_{\frac{k}{n}\leqslant s\leqslant\frac{k+1}{n}}\|n(s-\frac{k}{n})(u-v)\|\\ &= n(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n})\|u-v\|\\ &= \|u-v\|\end{aligned}$$

(2)- Si $\frac{k}{n}\leq -r+\frac{k+1}{n}\leq\frac{k+1}{n}$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[-r+\frac{k+1}{n},\frac{k+1}{n}]}\|f_k^n(s,x)-f_k^n(s,y)\| &\leq \sup_{s\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}\|f_k^n(s,x)-f_k^n(s,y)\|\\ &= \sup_{\frac{k}{n}\leqslant s\leqslant\frac{k+1}{n}}\|n(s-\frac{k}{n})(x-y)\|\\ &= \|x-y\|\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[-r+\frac{k+1}{n},\frac{k+1}{n}]}\|g_k^n(s,u)-g_k^n(s,v)\| &\leq \sup_{s\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}\|g_k^n(s,u)-g_k^n(s,v)\|\\ &= \sup_{\frac{k}{n}\leqslant s\leqslant\frac{k+1}{n}}\|n(s-\frac{k}{n})(u-v)\|\\ &= \|u-v\|.\end{aligned}$$

Considérons la multifonction : $F_k^n : [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \times H \times H \rightrightarrows H$ définie par :

$$F_k^n(t,x,y) := F(t, \tau(\frac{k+1}{n}) f_k^n(\cdot, x), \tau(\frac{k+1}{n}) g_k^n(\cdot, y)).$$

Comme précédemment, on voit bien que F_k^n est mesurable sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, semi-continue supérieurement sur $H \times H$ et satisfait

$$\|F_k^n(t,x,y)\| := \|F(t, \tau(\frac{k+1}{n}) f_k^n(\cdot, x), \tau(\frac{k+1}{n}) g_k^n(\cdot, y))\| \leq a(t) + b(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour tout $(t,x,y) \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \times H \times H$. Ainsi, F_k^n vérifie les conditions du Théorème 2.2.1, et donc on assure l'existence d'une solution $v_k^n : [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \longrightarrow H$, $(v_k^n \in \mathcal{C}_H^1([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]))$ du problème

$$\begin{cases} \ddot{v}_k^n(t) \in F_k^n(t, v_k^n(t), \dot{v}_k^n(t)), & p.p.\ t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]; \\ \\ v_k^n(t_k^n) = v_{k-1}^n(t_k^n), & \dot{v}_k^n(t_k^n) = \dot{v}_{k-1}^n(t_k^n). \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_k^n$}$$

De plus, v_k^n vérifie

$$\begin{cases} v_k^n(t) := v_k^n(t_k^n) + \int_{\frac{k}{n}}^{t} w_k^n(s)ds, & \forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]; \\ w_k^n(t) := w_k^n(t_k^n) + \int_{\frac{k}{n}}^{t} z_k^n(s)ds, & \forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]; \\ \\ z_k^n(t) \in F_k^n(t, v_k^n(t), w_k^n(t)), & p.p.\ sur [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]; \end{cases} \tag{2.14}$$

avec

$$\|v_k^n(t)\| \leq M_1,\ \forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]; \tag{2.15}$$

$$\|w_k^n(t)\| \leq M_2,\ \forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]; \tag{2.16}$$

$$z_k^n \in S_\lambda^q \quad p.p\ sur\ [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]. \tag{2.17}$$

Ainsi, par induction, on a construit une fonction continue $v_n : [-r, 1] \to H$ avec $v_n = \varphi$ dans $[-r, 0]$ telle que sa restriction à chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ est une solution de $(\mathcal{P}_k^n)$.

On définit : $v_n : [-r,1] \to H$ par

$$v_n(t) := \begin{cases} \varphi(t) & si\ t \in [-r,0] \\ v_k^n(t) & si\ t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \end{cases} \tag{2.18}$$

et

$$\dot{v}_n(t) := \begin{cases} \dot{\varphi}(t) & si\ t \in [-r,0] \\ \dot{v}_k^n(t) & si\ t \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[\end{cases} \tag{2.19}$$

En prenant les notations convenables suivantes

$\delta_n(t) := \frac{k}{n}$ et $\theta_n(t) := \frac{k+1}{n}$ pour $t \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$,

et posons pour tout $(t,x,y) \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \times H \times H$

$$F^n(t,x,y) := F_k^n(t,x,y).$$

Alors

$$F^n(t, v_n(t), \dot{v}_n(t)) := F(t, \tau(\theta_n(t)) f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, v_n(t)), \tau(\theta_n(t)) g^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, \dot{v}_n(t))), \forall t \in]0,1]$$

avec

$$\|F(t, \tau(\theta_n(t)) f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, v_n(t)), \tau(\theta_n(t)) g^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, \dot{v}_n(t)))\| \leq a(t) + b(\|v_n(t)\|^2 + \|\dot{v}_n(t)\|^2)^{\frac{1}{q}}.$$

Nous avons alors obtenu une suite de fonctions (v_n) telle que $v_n \in \mathcal{C}^1_E([-r,1])$ avec $v_n = \varphi$ sur $[-r,0]$ et sa restriction à l'intervalle $[0,1]$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \ddot{v}_n(t) \in F^n(t, v_n(t), \dot{v}_n(t)), & p.p.\ t \in [0,1]; \\ v_n(0) = u_0, & \dot{v}_n(0) = v_0. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}'_n$}$$

De plus, v_n vérifie les relations suivantes

$$\begin{cases} v_n(t) := u_0 + \int_0^t w_n(s)ds, & \forall t \in [0,1]; \\ w_n(t) := v_0 + \int_0^t z_n(s)ds, & \forall t \in [0,1]; \\ z_n(t) \in F_n(t, v_n(t), w_n(t)), & p.p.\ sur\ [0,1]; \end{cases} \tag{2.20}$$

avec

$$\|v_n(t)\| \leq M_1, \ \forall t \in [0,1]; \tag{2.21}$$

$$\|w_n(t)\| \leq M_2, \ \forall t \in [0,1]; \tag{2.22}$$

$$z_n \in S_\lambda^q \quad p.p \ \ sur \ \ [0,1]. \tag{2.23}$$

Etape 2. *Convergence des suites* $(v_n), (w_n)$ *et* (z_n) :
Observons que (v_n) et (w_n) sont relativement compactes.
En effet, pour tout $t, t' \in [0,1]$:

$\lambda \in L^q_{R^+}([0,1]) \subset L^1_{R^+}([0,1])$.
$\lambda \in L^1_{R^+}([0,1]) \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \forall t \in [0,1], \exists \delta > 0 : \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \lambda(s)ds < \epsilon$.
$\forall \epsilon > 0, \exists ? \eta > 0, \forall t, \grave{t} \in [0,1] : |t - \grave{t}| < \eta \Rightarrow \|w_n(t) - w_n(\grave{t})\| < \epsilon, \forall n$

$$\begin{aligned} \|w_n(t) - w_n(\grave{t})\| &= \|\int\limits_{\grave{t}}^{t} z_n(s)ds\| \\ &\leq \int\limits_{\grave{t}}^{t} \lambda(s)ds \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

dès que $|t - \grave{t}| < \delta, \forall n$.

Il suffit de prendre $\eta = \delta$ et donc $(w_n)_n$ est équicontinue.

$$\begin{aligned}
\|v_n(t) - v_n(\grave{t})\| &\leq \|\int_{\grave{t}}^{t} w_n(s)ds\| \\
&\leq \int_{\grave{t}}^{t} \|v_0\|ds + \int_{\grave{t}}^{t} \|\int_0^s z_n(\tau)d\tau\|ds \\
&\leq \|v_0\| \int_{\grave{t}}^{t} ds + \int_{\grave{t}}^{t} (\int_0^s \|z_n(\tau)\|d\tau)ds \\
&\leq \|v_0\||t - \grave{t}| + \int_{\grave{t}}^{t} (\int_0^s \lambda(\tau)d\tau)ds \\
&= (\|v_0\| + \|\lambda\|_{L^1})|t - \grave{t}|.
\end{aligned}$$

Comme $\lambda(\cdot)$ est intégrablement bornée, on conclut que (v_n) est équicontinue.

De plus, par les relations (2.21) et (2.22), les ensembles $\{v_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ et $\{w_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ sont bornés dans H qui est de dimension finie donc ils sont relativement compacts dans H pour tout $t \in [0,1]$.
Par conséquent, (v_n) et (w_n) sont relativement compacts et d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, on obtient que (v_n) et (w_n) sont relativement compacts.
Par extraction de sous suites on peut supposer que (v_n) et (w_n) convergent dans $\mathcal{C}_H([0,1])$ vers v et w respectivement.
Remarquons que nous avons par le théorème de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t) = u_0 + \lim_{n\to\infty} \int_0^t w_n(s)ds = u_0 + \int_0^t \lim_{n\to\infty} w_n(s)ds = u_0 + \int_0^t w(s)ds,$$

alors

$$v(t) = u_0 + \int_0^t w(s)ds.$$

On conclut que $v \in \mathcal{C}_H^1([0,1]), \dot{v} = w$.
D'autre part,

$$\lim_{n\to\infty} w_n(t) = v_0 + \lim_{n\to\infty} \int_0^t z_n(s)ds = v_0 + \int_0^t \lim_{n\to\infty} z_n(s)ds = v_0 + \int_0^t z(s)ds$$

alors

$$w(t) = v_0 + \int_0^t z(s)ds.$$

Par conséquent, $\dot{w} = z$ et donc $\ddot{v} = z$.
Nous avons $z_n = \ddot{v}_n$ et $(\ddot{v}_n) \subset S_\lambda^q \subset S_\lambda^1$.
Comme S_λ^1 est $\sigma(L^1, L^\infty)$ compact, on peut extraire de $(\ddot{v}_n)$ une sous suite qu'on note aussi $(\ddot{v}_n)$ convergeant $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers une fonction $\zeta \in \mathcal{C}_H([0,1])$ avec $\zeta = \ddot{v}$.
En effet, pour chaque $\dot{x} \in H$ et pour tout $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \dot{x}, \ddot{v}_n(s)\rangle ds = \int_0^1 \langle \dot{x}, \zeta(s)\rangle ds, \tag{2.24}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \dot{x}, z_n(s)\rangle ds = \int_0^1 \langle \dot{x}, z(s)\rangle ds, \tag{2.25}$$

donc :

$$z(t) = \zeta(t) \ p.p. \ t \in [0,1].$$

Comme $\ddot{v}(t) = z(t)$, on conclut que $\ddot{v} = \zeta$.
Par conséquent, $(\ddot{v}_n)$ converge $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers $\ddot{v}$.
Pour tout $t \in [-r, 1]$, posons

$$u(t) := \begin{cases} \varphi(t) & si \ t \in [-r, 0]; \\ v(t) & si \ t \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.26}$$

Alors :
$u \in \mathcal{C}_H^1([-r,1])$ et (u_n) converge uniformement vers $u \in \mathcal{C}_H^1([-r,1])$.

Etape 3. *Convergence de* $\tau(\theta_n(t)) f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))$ *et* $\tau(\theta_n(t)) g^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, \dot{u}_n(t)))$:

Montrons que $\tau(\theta_n(t)) f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t))$ et $\tau(\theta_n(t)) g^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, \dot{u}_n(t)))$ converge ponctuellement dans $]0,1]$ vers $\tau(t)u$ et $\tau(t)\dot{u}$ respectivement dans $\mathcal{C}_H([-r,0]) = \mathcal{C}_0$.

Fixons $t \in [0,1]$, et soit un entier positif n tel que $\frac{1}{n} < r$. il existe un entier $0 \le k \le n-1$ tel que $t \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Alors, nous avons les estimations suivantes

$$\|\tau(\theta_n(t))f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot,u_n(t)) - \tau(t)u\|_{C_0} = \sup_{s\in[-r,0]} \|f^n_{n\theta_n(t)-1}(\theta_n(t)+s,u_n(t)) - u(t+s)\|$$

$$= \sup_{s\in[-r,0]} \|f^n_k(\tfrac{k+1}{n}+s,u_n(t)) - u(t+s)\|$$

$$\leq \sup_{-r\leq s\leq 0} \|f^n_k(\tfrac{k+1}{n}+s)u_n(t) - u(\tfrac{k+1}{n}+s)\| + \sup_{-r\leq s\leq 0} \|u(\tfrac{k+1}{n}+s) - u(t+s)\|$$

$$\leq \sup_{-r\leq s\leq -\frac{1}{n}} \|u_n(\tfrac{k+1}{n}+s) - u(\tfrac{k+1}{n}+s)\|$$

$$+ \sup_{-\frac{1}{n}\leq s\leq 0} \|u_n(\tfrac{k}{n}) + n(s+\tfrac{1}{n})(u_n(t) - (u_n(\tfrac{k}{n})) - u(\tfrac{k+1}{n}+s)\|$$

$$+ \sup_{-r\leq s\leq 0} \|u(\tfrac{k+1}{n}+s) - u(t+s)\|$$

$$\leq \sup_{-r\leq s\leq -\frac{1}{n}} \|u_n(\tfrac{k+1}{n}+s) - u(\tfrac{k+1}{n}+s)\| + \sup_{-\frac{1}{n}\leq s\leq 0} \|ns(u_n(t) - u_n(\tfrac{k}{n}))\|$$

$$+ \sup_{-\frac{1}{n}\leq s\leq 0} \|u_n(t) - u(\tfrac{k+1}{n}+s)\| + \sup_{-r\leq s\leq 0} \|u(\tfrac{k+1}{n}+s) - u(t+s)\|$$

$$\leq \sup_{-r\leq s\leq -\frac{1}{n}} \|u_n(\tfrac{k+1}{n}+s) - u(\tfrac{k+1}{n}+s)\| + \|u_n(t) - u_n(\tfrac{k}{n})\| + \|u_n(t) - u(t)\|$$

$$+ \sup_{-\frac{1}{n}\leq s\leq 0} \|u(t) - u(\tfrac{k+1}{n}+s)\| + \sup_{-r\leq s\leq 0} \|u(\tfrac{k+1}{n}+s) - u(t+s)\|$$

Montrons que les derniers termes convergent tout vers 0.
Nous avons $u_n(t) - u(t) \to 0$. De plus,

$$\|u_n(t) - u_n(\frac{k}{n})\| \leq \|u_n(t) - u(t)\| + \|u(t) - u(\delta_n(t))\| + \|u(\delta_n(t)) - u_n(\delta_n(t))\|$$

Comme $\delta_n(t) \to t$ et y est continue,

$$\|u(t) - u(\delta_n(t))\| \to 0,$$

de même pour

$$\|u(\delta_n(t)) - u_n(\delta_n(t))\| \to 0,$$

puisque u_n converge uniformement vers u.
Donc

$$\|u_n(t) - u_n(\delta_n(t))\| \to 0.$$

Soit $\epsilon > 0$, comme v est uniformement continue,

$$\exists \eta > 0 : |t - \grave{t}| \leq \eta \Rightarrow \|u(t) - u(\grave{t})\| \leq \epsilon.$$

Mais nous avons $|\frac{k+1}{n} + s - t| \leq \frac{2}{n}$ pour tout $s \in [-\frac{1}{n}, 0]$, donc

$$\|u(t) - u(\delta_n(t))\| \leq \epsilon, \quad pour \ \frac{1}{n} \leq \eta.$$

De façon similaire, on a $|\frac{k+1}{n} + s - (s+t)| \leq \frac{2}{n}$ pour tout $s \in [-r, 0]$, d'où

$$\sup_{-r \leq s \leq 0} \|v(\frac{k+1}{n} + s) - v(t+s)\| \leq \epsilon, \quad pour \ \frac{1}{n} \leq \eta.$$

Comme $u_n \to u$ uniformement, pour n assez grand, on a

$$\sup_{-r \leq s \leq 0} \|u_n(s) - u(s)\| \leq \epsilon.$$

Mais

$$\begin{aligned} \sup_{-r \leq s \leq -\frac{1}{n}} \|u_n(\frac{k+1}{n} + s) - u(\frac{k+1}{n} + s)\| &= \sup_{s \in [-r + \frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}]} \|u_n(s) - u(s)\| \\ &\leq \sup_{s \in [-r, 1]} \|u_n(s) - u(s)\| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Finalement, on peut conclure que

$$\tau(\theta_n(t)) f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t)) \to \tau(t)u \quad dans \ C_0. \tag{2.27}$$

De la même manière, on démontre que

$$\tau(\theta_n(t)) g^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, \dot{u}_n(t)) \to \tau(t)\dot{u} \quad dans \ C_0. \tag{2.28}$$

Etape 4. *Existence de solutions* :
Nous avons l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} \ddot{u}_n(t) \in F(t, \tau(\theta_n(t)) f^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, u_n(t)), \tau(\theta_n(t)) g^n_{n\theta_n(t)-1}(\cdot, \dot{u}_n(t))) \quad p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ u_n(t) = \varphi(t), \ \forall t \in [-r, 0]; \\ \\ u_n(0) = u_0, \qquad \dot{u}_n(0) = v_0. \end{cases}$$

Par ce qui précéde, on sait que $(\ddot{u}_n)$ converge $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers $\ddot{v}$.
En appliquant alors le Théorème 1.5.8, les relations (2.27),(2.28) et la semi-continuité supérieure de la multifonction F sur $C^1_H([-r,1]) \times C_H([-r,1])$, nous obtenons

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, \tau(t)u, \tau(t)\dot{u}), & p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ u(0) = u_0, & \dot{u}(0) = v_0; \\ \\ u(t) = \varphi(t), & \forall s \in [-r, 0]; \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration.

■

Remarque 2.3.2 :
On peut généraliser le théorème 2.3.1 aux espaces de dimension infinie en considérant H un espace de Hilbert séparable et en remplaçant l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ par l'hypothèse suivante $(\mathcal{H}'_3)$ Il existe une multi-application mesurable $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows H$ à valeurs convexes compactes et intégrablement bornée telle que

$$F(t, u, v) \subset \Gamma(t)$$

pour tout $(t, u, v) \in [0,1] \times C^1_H([-r,0]) \times C_E([-r,0])$.

La démonstration de ce résultat utilise les mêmes arguments de la démonstration du théorème 2.3.1 et le fait que S^1_Γ l'ensemble des sélections intégrables de Γ est $\sigma(L^1_H, L^\infty_H)$ compact et que $\int_{[0,1]} \Gamma(t)dt = \{ \int_{[0,1]} f(t)dt, f \in S^1_\Gamma\}$ est fortement compacte.

Chapitre 3

Problème de Cauchy gouverné par un opérateur maximal monotone avec une perturbation semicontinue mixte.

3.1 Introduction et préliminaires.

On démontre dans ce chapitre un nouveau résultat d'existence pour l'inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone dans un espace de dimension finie de la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Soit E un espace de dimension finie. Rappelons qu'un opérateur $A(t) : E \rightrightarrows E; (t \in [0,1])$, est maximal monotone si, pour tout $t \in [0,1], \lambda > 0$ et pour tous $x_1, x_2 \in D(A(t))$, $y_1 \in A(t)x_1$ et $y_2 \in A(t)x_2$ nous avons

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|,$$

où

$$D(A(t)) := \{x \in E : A(t)x \neq \emptyset\}$$

est le domaine de A.
Si de plus

$$\mathcal{R}(I_E + \lambda A(t)) = E,$$

alors $A(t)$ est dit opérateur maximal monotone (ou m-accrétif si l'espace est de dimension infinie) avec

$$\mathcal{R}(A(t)) = \bigcup_{x \in E} A(t)x$$

est le rang de $A(t)$ et I_E l'identité de E.
Dans ce qui suit, on donne des résultats sur les opérateurs maximaux monotones, qui nous seront utiles dans la démonstration de notre Théorème. En ce qui concerne la théorie des opérateurs maximaux monotones (m-accrétifs), on peut se référer à [10] et [13] pour des résultats détaillés.

Définition 3.1.1 *:*
Soit $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ un opérateur et $\lambda > 0$.
Alors
a) *l'opérateur $J_\lambda : D(J_\lambda) \subset E \longrightarrow 2^E$ défini par*

$$J_\lambda = (I_E + \lambda A)^{-1},$$

où $D(J_\lambda) = \mathcal{R}(I_E + \lambda A)$, est appelé la résolvante de A,
b)*l'opérateur $A_\lambda : D(A_\lambda) \subset E \longrightarrow 2^E$ défini par*

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_E - J_\lambda),$$

où, $D(A_\lambda) = \mathcal{R}(I_E + \lambda A)$, est appelé l'approximation-Yosida de A.

Lemme 3.1.2 *:*
Un opérateur $A : E \longrightarrow 2^E$ est m-accrétif si et seulement si pour tout $\lambda > 0$, la résolvante J_λ de A est univoque et non-expansive,c'est à dire J_λ est univoque et vérifie la relation

$$\|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathcal{R}(I_E + \lambda A). \tag{3.1}$$

Proposition 3.1.3 *:*
Si $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ est m-accrétif et $\lambda > 0$, alors
i) *A_λ est univoque, accrétif et Lipschizienne de constante $\frac{2}{\lambda}$ sur $\mathcal{R}(I_E + \lambda A)$,*
ii) *$A_\lambda x \in AJ_\lambda x, \forall x \in \mathcal{R}(I_E + \lambda A)$,*
iii) *$\|A_\lambda x\| \leq |Ax|_0 = inf\{\|y\|, y \in Ax\}, \forall x \in \mathcal{R}(I_E + \lambda A) \cap D(A)$.*

Théorème 3.1.4 *:*
Soit E un espace de Banach qui a son dual topologique uniformément convexe. Alors le graphe de tout opérateur m-accrétif $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé.

Un autre résultat classique, s'énonce comme suit

Lemme 3.1.5 :
Soit E un espace de Hilbert séparable et $A : E \rightrightarrows E$, $(t \in [0,1])$, un opérateur m-accrétif satisfaisant la condition

$(\mathcal{H})$ Pour tout x et tout $\lambda > 0$, la fonction $t \longmapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}x$ est Lebesgue-mesurable et il existe une fonction $\overline{g} \in L^2_E([0,1])$ telle que $t \longmapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$ appartient à $L^2_E([0,1])$.
Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites dans $L^2_E([0,1])$ vérifiant

(1) (u_n) converge fortement vers $u \in L^2_E([0,1])$ et (v_n) converge vers $v \in L^2_E([0,1])$ par rapport à la topologie faible $\sigma(L^2, L^2)$,

(2) $v_n(t) \in A(t)u_n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $t \in [0,1]$.

Alors $v(t) \in A(t)u(t)$, p.p. $t \in [0,1]$.

Preuve.
Soit I_{L^2} l'identité de $L^2_E([0,1])$ et soit

$$\mathcal{A} : L^2_E([0,1]) \rightrightarrows L^2_E([0,1]),$$

l'opérateur défini par

$$v \in \mathcal{A}u \Leftrightarrow v(t) \in A(t)u(t), \text{ p.p. } t \in [0,1].$$

Comme $A(t)$ est accrétif, $\mathcal{A}$ l'est aussi.
En effet, soient $u_1, u_2 \in D(\mathcal{A}), v_1 \in \mathcal{A}u_1, v_2 \in \mathcal{A}u_2, t \in [0,1]$ et $\lambda > 0$.
Nous avons $u_1, u_2 \in D(\mathcal{A})$, donc $u_1(t), u_2(t) \in D(A(t))$, pour tout $t \in [0,1]$ et

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_{L^2} &= (\int_0^1 \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\int_0^1 \|(u_1(t) - u_2(t)) + \lambda(v_1(t) - v_2(t))\|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|(u_1 - u_2) + \lambda(v_1 - v_2)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est m-accrétif, c'est à dire pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathcal{R}(I_{L^2} + \lambda\mathcal{A}) = L^2_E([0,1]).$$

Soit $\lambda > 0$, et soit $g \in L^2_E([0,1])$.
Par l'hypothèse $(\mathcal{H})$, il existe $\overline{g} \in L^2_E([0,1])$ telle que la fonction

$$\overline{h} : t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$$

appartient à $L^2_E([0,1])$.
Considérons la fonction

$$h : t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}g(t),$$

nous avons

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^2} &\leq \|h - \overline{h}\|_{L^2} + \|\overline{h}\|_{L^2} \\ &\leq \|g - \overline{g}\|_{L^2} + \|\overline{h}\|_{L^2} \end{aligned}$$

du fait que $(I_E + \lambda A(t))^{-1}$ est non-expansive (Voir la relation (3.1)).
Comme $g, \overline{g}$ et $\overline{h}$ sont des fonctions de $L^2_E([0,1])$, on déduit que h est Lebesgue-mesurable et appartient à $L^2_E([0,1])$, d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} & h(t) = (I_E + \lambda A(t))^{-1}g(t), \quad p.p.\ t \in [0,1]; \\ \Leftrightarrow \quad & g(t) \in h(t) + \lambda A(t)h(t), \quad p.p.\ t \in [0,1]; \\ \Leftrightarrow \quad & g \in h + \lambda \mathcal{A}h \end{aligned}$$

c'est à dire, $\forall g \in L^2_E([0,1])$, $\exists h \in L^2_E([0,1])$ telle que

$$g \in (I_{L_2} + \lambda \mathcal{A})h,$$

d'où

$$\mathcal{R}(I_{L^2} + \lambda \mathcal{A}) = L^2_E([0,1]).$$

Donc, $\mathcal{A}$ est un opérateur m-accrétif sur l'espace de Hilbert $L^2_E([0,1])$.
Par conséquent, d'après le Théorème 3.1.4; le graphe de $\mathcal{A}$ est fortement faiblement séquentiellement fermé.
Comme la suite (u_n) converge fortement vers u dans $L^2_E([0,1])$ et la suite (v_n) converge faiblement vers v, on conclut que $v \in \mathcal{A}u$ et donc

$$v(t) \in A(t)u(t), p.p.\ t \in [0,1].$$

■

Définition 3.1.6 :
Soient A un opérateur défini sur H et $f \in L^1([0,T],H)$. On appele <u>*solution forte*</u> *de l'équation $-\dot{u}(t) \in Au(t) + f(t)$ toute fonction $u \in C([0,T],H)$, absolument continue sur tout compact de $]0,T[$, vérifiant $u(t) \in D(A)$ et $-\dot{u}(t) \in Au(t) + f(t)$ p.p. sur $]0,T[$.*

On dit que $u \in C([0,T],H)$ est <u>*solution faible*</u> *de l'équation $-\dot{u}(t) \in Au(t) + f(t)$ s'il existe des suites $(f_n) \subset L^1([0,T],H)$ et $(u_n) \subset C([0,T],H)$ telles que u_n soit une solution forte de l'équation $-\dot{u}_n(t) \in Au_n(t) + f_n(t)$, $f_n \to f$ dans $L^1([0,T],H)$ et $u_n \to u$ uniformément sur $[0,T]$.*

Lemme 3.1.7 *(Lemme 3.1 chap 3 [13]).*
Soient A un opérateur monotone défini sur H , $f,g \in L^1([0,T],H)$, u et v des solutions fortes ou faibles des équations
$-\dot{u}(t) \in Au(t) + f(t)$ p.p. $t \in [0,1]$ et $-\dot{v}(t) \in Av(t) + g(t)$ p.p. $t \in [0,1]$. Alors on a

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(s) - v(s)| + \int_s^t |f(\sigma) - g(\sigma)| d\sigma, \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Pour la démonstration de notre résultat d'existence nous avons besoin du théorème d'existence de multiselections à valeurs convexes pour les multi-applications semicontinues mixtes.

Théorème 3.1.8 *(Voir Théorème 2.1 [46]).*
Soit E un espace de dimension finie et soit $F : [0,1] \times E \rightrightarrows E$ une multi-application satisfaisant les hypothèses suivantes :
$(\mathcal{H}_1)$ F est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable.
$(\mathcal{H}_2)$ Pour tout $t \in [0,1]$; en chaque point $x \in E$ tel que $F(t,x)$ est convexe, $F(t,\cdot)$ est semicontinue supérieurement, et lorsque $F(t,x)$ est non convexe, $F(t,\cdot)$ est semi-continue inférieurement sur un voisinage de x.
$(\mathcal{H}_3)$ Il existe une fonction de Carathéodory $f : [0,1] \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui est intégrablement bornée et telle que

$$F(t,x) \cap \overline{\mathbb{B}}(0, f(t,x)) \neq \emptyset,$$

pour tout $(t,x) \in [0,1] \times E$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble compact $\mathcal{K} \subset C_E([0,1])$, il existe une multi-application $\Phi : \mathcal{K} \rightrightarrows L^1_E([0,1])$ à valeurs non vides fermées convexes et de graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $x \in \mathcal{K}$ et $v \in \Phi(x)$, nous avons

$$v(t) \in F(t, x(t)) \tag{3.2}$$

et

$$\|v(t)\| \leq f(t, x(t)) + \varepsilon. \tag{3.3}$$

pour p. p $t \in [0,1]$.

Théorème 3.1.9 *(Voir Théorème 3.1 [46]).*
Soit $F : [0,1] \times E \rightrightarrows E$ *une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$ *du théorème 3.1.8*
Alors l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

admet une solution dans $C_E([0,1])$.
De plus, nous avons

$$\|\dot{u}(t)\| \leq f(t, u(t)).$$

3.2 Résultat d'existence pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone avec une perturbation semi-continue mixte.

On démontre dans cette section notre résultat principal.

Théorème 3.2.1 :
Soit E un espace de dimension finie. Soit $A(t) : D(A(t)) = E \rightrightarrows E, (t \in [0,1])$, un opérateur maximal monotone et soit $F : [0,1] \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides compactes satisfaisant les hypothèses suivantes
$(\mathcal{H}_1)$ F est $\mathcal{L}([0,1)] \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable.
$(\mathcal{H}_2)$ Pour tout $t \in [0,1]$, en chaque point $x \in E$ tel que $F(t,x)$ est convexe, $F(t,\cdot)$ est semicontinue supérieurement, et lorsque $F(t,x)$ est non convexe, $F(t,\cdot)$ est semi-continue inférieurement sur un voisinage de x.
$(\mathcal{H}_3)$ Il existe $m \in L^2_{R^+}([0,1])$ telle que

$$|A(t)x|_0 + |F(t,x)| \leq m(t), pour\ tout\ (t,x) \in [0,1] \times E.$$

$(\mathcal{H}_4)$ Pour tout x et tout $\lambda > 0$, la fonction $t \longmapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}x$ est Lebesgue-mesurable et il existe une fonction $\overline{g} \in L^2_E([0,1])$ telle que $t \longmapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$ appartient à $L^2_E([0,1])$.
Alors, l'ensemble des solutions du problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t,u(t)) & p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_F)$$

est non vide, convexe compact dans $\mathcal{C}_E([0,1])$.

Preuve. La démonstration se fait en trois étapes.
Etape 1 : Considérons l'ensemble

$$S := \{f \in L^2_E([0,1]) : \ \|f(t)\| \leq m(t)\ p.\ p\}.$$

Montrons que pour tout $f \in S$ l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t) & p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_f)$$

admet une solution unique $u \in \mathcal{C}_E([0,1])$.
Soit (λ_n) une suite décroissante dans $]0,1]$, telle que $\lambda_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.
Notons que l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ et la propriété *(i)* de la proposition 3.1.3 impliquent que l'application $(t,x) \longmapsto A_{\lambda_n}(t)x$ est une application de Carathéodory, c'est à dire Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$ et continue sur E. Plus precisemment elle est lipshitzienne par rapport á x.
Alors, nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence d'une solution unique $u_n \in \mathcal{C}_E([0,1])$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -\dot{u}_n(t) = A_{\lambda_n}(t)u_n(t) + f(t) \quad p.p.\ t \in [0,1]; \\ \\ u_n(0) = u_0. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_f^n)$$

Par $(\mathcal{P}_f^n)$ on a

$$-\dot{u}_n(t) = A_{\lambda_n}(t)u_n(t) + f(t).$$

Par la propriété *(iii)* de la proposition 3.1.3 et par l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ on obtient

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq m(t).$$

Comme $m \in L^2_{\mathbb{R}^+}([0,1])$ on conclut que $(\dot{u}_n)_n$ converge $\sigma(L^2, L^2)$ vers une fonction $v \in L^2_{\mathbb{E}^+}([0,1])$. On a

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds$$

et donc pour $t, t' \in [0,1]$

$$\|u_n(t) - u_n(t')\| \leq \int_{t'}^t \|\dot{u}_n(s)\|ds \leq \int_{t'}^t m(s)ds,$$

comme $m \in L^2_{\mathbb{R}^+}([0,1])$, on conclut que $(u_n)_n$ est équicontinue.
D'autre part

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\| &\leq \|u_0\| + \int_0^t m(s)ds \\ &\leq \|u_0\| + \|m\|_{L^1}, \end{aligned}$$

donc la suite $(u_n(t))_n$ est bornée dans E qui est de dimension finie donc elle est relativement compacte et par le Théorème d'Ascoli Arzelà on conclut que la suite (u_n) est

relativement compacte.
Par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(u_n)_n$ converge uniformement vers une fonction $u \in \mathcal{C}_E([0,1])$.
Or $u_n(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds$ alors

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(t) = u(t) &= u_0 + \int_0^t \lim_{n\longrightarrow\infty} \dot{u}_n(s)ds \\ &= u_0 + \int_0^t \dot{v}(s)ds, \end{aligned}$$

et par consequent $\dot{u} = v$.
Par $(\mathcal{P}_f^n)$ et la propriété (ii) de la proposition 3.1.3, nous obtenons

$$-\dot{u}_n(t) - f(t) = A_{\lambda_n}(t)u_n(t) \in A(t)J_{\lambda_n}(t)u_n(t), p.p.\ t \in [0,1]. \tag{3.4}$$

D'autre part, nous avons

$$\|J_{\lambda_n}(t)u_n(t) - u(t)\| \leq \|J_{\lambda_n}(t)u_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|, \forall t \in [0,1]. \tag{3.5}$$

En utilisant l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ et la propriété *(iii)* de la proposition 3.1.3, on obtient

$$\|J_{\lambda_n}(t)u_n(t) - u_n(t)\| = \|\lambda_n A_{\lambda_n}(t)u_n(t)\| \leq \lambda_n m(t), \forall t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Nous avons aussi

$$\lambda_n m(t) \longrightarrow 0 \ quant\ n \longrightarrow \infty.$$

Par les relations (3.4) et (3.5), on voit bien que

$$\|J_{\lambda_n}(t)u_n(t) - u(t)\| \longrightarrow 0, \ quant\ n \longrightarrow \infty.$$

Par la relation (3.4) une deuxième fois, nous avons l'estimation

$$\begin{aligned}
\|J_{\lambda_n}(t)u_n(t) - u(t)\| &\leq \|J_{\lambda_n}(t)u_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \\
&\leq \lambda_n m(t) + \|u_n(t)\| + \|u(t)\| \\
&\leq \lambda_n m(t) + 2m(t),
\end{aligned}$$

Or, $\lambda_n < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient alors

$$\|J_{\lambda_n}(t)u_n(t) - u(t)\| \leq 3m(t), \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1].$$

La fonction $m \in L^2_{\mathbb{R}^+}([0,1])$ et par suite, en utilisant le Théorème 1.8.1, on conclut que $J_{\lambda_n}(\cdot)u_n(\cdot)$ converge vers $u(\cdot)$ dans $L^2_E([0,1])$.
Considérons maintenant l'opérateur

$$\mathcal{A} : L^2_E([0,1]) \rightrightarrows L^2_E([0,1]),$$

défini par

$$v \in \mathcal{A}y \Longleftrightarrow v(t) \in A(t)u(t), \ p.p. \ t \in [0,1].$$

On a vu que $\mathcal{A}$ est un opérateur m-accrétif sur $L^2_E([0,1])$, et donc son graphe est fortement-faiblement séquentiellement fermé.
On a
$(\dot{u}_n + f)$ converge $\sigma(L^2_E([0,1]), L^2_E([0,1]))$ vers $(\dot{u} + f)$
En effet, on a d'après $(\mathcal{H}_3)$
$\|\dot{u}_n(t)\| \leq m(t)$, pour tout $t \in [0,1]$, $m \in L^2_E([0,1])$, et par suite $\dot{u}_n \in L^2_E([0,1])$.

Comme $\frac{\|\dot{u}_n(t)\|}{m(t)} \leq 1$ et comme $L^2_E([0,1])$ est réflexif et donc

$$\overline{\mathbb{B}}_{L^2} = \{h \in L^2_E([0,1])/ \ \|h\|_{L^2} \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie $\sigma(L^2_E([0,1]), L^2_E([0,1]))$, on peut extraire de $(\dot{u}_n)$ une sous suite qu'on note aussi $(\dot{u}_n)$ convergeant $\sigma(L^2_E([0,1]), L^2_E([0,1]))$ vers une fonction mesurable $\dot{u}$ vérifiant

$$\|\dot{u}(t)\| \leq m(t), \ pour \ tout \ t \in [0,1].$$

Donc on a

$(\dot{u}_n + f)$ converge $\sigma(L^2_E([0,1]), L^2_E([0,1]))$ vers $(\dot{u} + f)$ et $J_{\lambda_n}(\cdot)u_n(\cdot)$ converge vers u dans $L^2_E([0,1])$,

comme

$$-\dot{u}_n(t) - f(t) \in A(t)J_{\lambda_n}(t)u_n(t), p.p.\ t \in [0,1].$$

On conclut par le lemme 3.1.5 que

$$-\dot{u}(t) - f(t) \in A(t)u(t)$$

et donc l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t) & p.p.\ t \in [0,1]; \\ u(0) = u_0. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_f)$$

admet une solution dans $\mathcal{C}_E([0,1])$.

Unicité de la solution :

Soit u (resp. v) une solution de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in Au(t) + f(t) & p.p.\ t \in [0,1]; \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

(respectivement)

$$\begin{cases} -\dot{v}(t) \in Av(t) + f(t) & p.p.\ t \in [0,1]; \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

En utilisant le lemme 3.1.7, on obtient

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(0) - v(0)| + \int_0^t |f(\sigma) - f(\sigma)| d\sigma.$$

Ainsi, l'unicité est démontrée.

Etape 2 :
Pour tout $f \in S$, l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_f)$ admet une solution unique $u_f \in \mathcal{C}_E([0,1])$, c'est à dire nous avons

$$\begin{cases} -\dot{u}_f(t) \in A(t)u_f(t) + f(t) & p.p.\ t \in [0,1]; \\ u_f(0) = u_0. \end{cases}$$

Posons

$$\mathcal{X} := \{u \in \mathcal{C}_E([0,1]), u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \ \ \|\dot{u}(s)\| \leq m(s) \ \ p.p\}.$$

Remarquons que

u_f est une solution de $(\mathcal{P}_f) \iff$ $\mathrm{u}_f \in \mathcal{X}$ et u_f vérifie $(\mathcal{P}_f)$.

Montrons tout d'abord que $\mathcal{X}$ est convexe compact dans $\mathcal{C}_E([0,1])$.
Il est facile de voir que $\mathcal{X}$ est un sous ensemble convexe, et par le Théorème d'Ascoli-Arzelà il est compact dans $\mathcal{C}_E([0,1])$.
En effet,
Pour tout $t, \tau \in [0,1]$,

$$\|u(t) - u(\tau)\| \leq \int_\tau^t \|\dot{u}(s)\|ds \leq \int_\tau^t m(s)ds,$$

comme $m \in L^2 \subset L^1$ on conclut que $\mathcal{X}$ est équicontinu.
D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$, $\mathcal{X}(t)$ est borné. Comme E est de dimension finie, on conclut que $\mathcal{X}(t)$ est relativement compact et donc par le Théorème d'Ascoli-Arzelà $\mathcal{X}$ est relativement compacte.
Montrons que $\mathcal{X}$ est fermé.
Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{X}$, convergeant uniformement vers u, nous avons

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds \quad et \quad \|\dot{u}_n(s)\| \leq m(s), \ p.p \ \ sur[0,1].$$

On a

$$\|\dot{u}_n(s)\| \leq m(s) \Longrightarrow \dot{u}_n(s) \in \overline{\mathbb{B}}(0, m(s)) = m(s)\overline{\mathbb{B}}(0,1).$$

et $m \in L^2_E([0,1]) \subset L^1_E([0,1])$.
D'après le Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki nous avons

$\overline{\mathbb{B}}(0, m(s))$ est compacte pour la topologie faible $*$ $\sigma(L^\infty_E, L^1_E)$ donc
la suite $(\dot{u}_n)$ est compacte par la topologie faible $*$ $\sigma(L^\infty_E, L^1_E)$.
Par suite, on peut lui extraire une sous suite notée aussi $(\dot{u}_n)$ convergeant $\sigma(L^\infty_E, L^1_E)$ vers une fonction v dans $L^\infty_E([0,1])$,
c'est à dire

$$\dot{u}_n \rightharpoonup v \ \sigma(L^\infty_E, L^1_E) \iff \forall y \in L^1_E([0,1]) \langle \dot{u}_n, y\rangle_{(L^\infty_E, L^1_E)}, \longrightarrow \langle v, y\rangle.$$

i.e
pour tout $y \in L^1_E([0,1])$ et tout $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)y(s)ds = \int_0^t v(s)y(s)ds$$

avec

$$\|v(t)\| \leq m(t) \quad p.p \ sur \ [0,1].$$

En particulier, en prenant $y(s) = 1$, $\forall s \in [0,1]$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t v(s)ds.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$ et comme (u_n) est absolument continue, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(t) = u(t) = u_0 + \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds = u_0 + \int_0^t v(s)ds,$$

donc, on conclut que $v(t) = \dot{u}(t)$, pour presque tout $t \in [0,1]$.
Et par suite

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds \quad p.p \ sur \ [0,1],$$

par conséquent $u \in \mathcal{X}$. Ceci prouve que $\mathcal{X}$ est compact dans $\mathcal{C}_E([0,1])$.
Montrons maintenant que si

$$\left.\begin{array}{l} (u_{f_n}) \ converge \ vers \ u_f \ dans \ \mathcal{X}, \\ (f_n) \ converge \ \sigma(L^2, L^2) \ vers \ f, \\ -\dot{u}_{f_n}(t) \in A(t)u_{f_n}(t) + f_n(t). \end{array}\right\} \Longrightarrow -\dot{u}_f(t) \in A(t)u_f(t) + f(t). \qquad (*)$$

Soit (u_{f_n}) une suite de $\mathcal{X}$ convergeant uniformement vers u_f et soit (f_n) une suite de S convergeant $\sigma(L^2, L^2)$ vers f et telles que $-\dot{u}_{f_n}(t) \in A(t)u_{f_n}(t) + f_n(t)$.
On doit montrer que $-\dot{u}_f(t) \in A(t)u_f(t) + f(t)$, i.e u_f vérifie $(\mathcal{P}_f)$.
Nous avons
(u_{f_n}) converge fortement vers u_f dans $L^2_E([0,1])$ et $(-\dot{u}_{f_n} - f_n)$ converge $\sigma(L^2, L^2)$ vers $(-\dot{u}_f - f)$.
En effet,

$$\|u_{f_n}(t) - u_f(t)\| \leq \|u_{f_n}(t)\| + \|u_f(t)\| \leq m(t) + m(t) = 2m(t),$$

ceci, en utilisant le fait que u_{f_n}, $u_f \in \mathcal{X}$.
Comme la fonction $m \in L^2_{\mathbb{R}^+}([0,1])$, en utilisant le Théorème de Lebesgue, on conclut que $u_{f_n}(\cdot)$ converge fortement vers $u_f(\cdot)$ dans $L^2_E([0,1])$.

Montrons que $(\dot{u}_{f_n})$ converge $\sigma(L^2, L^2)$ vers une fonction v vérifiant

$$\|v(t)\| \leq m(t),$$

et telle que $v = \dot{u}_f$.
Nous avons $\|\dot{u}_{f_n}(t)\| \leq m(t), \forall t \in [0,1]$, et par suite $\dot{u}_{f_n} \in L^2_E([0,1])$.

Comme $\frac{\|\dot{u}_{f_n}(t)\|}{m(t)} \leq 1$ et comme $L^2_E([0,1])$ est réflexif

$$\overline{\mathbb{B}}_{L^2} := \{h \in L^2_E([0,1])/ \ \|h\|_{L_2} \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie $\sigma(L^2, L^2)$ ainsi, on peut extraire de $(\dot{u}_{f_n})$ une sous suite qu'on note aussi $(\dot{u}_{f_n})$ convergeant $\sigma(L^2, L^2)$ vers une fonction mesurable $\dot{u}_f$ vérifiant :

$$\|v(t)\| \leq m(t), \ \ \textit{pour tout} \ \ t \in [0,1].$$

On a aussi

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_{f_n}(t) = u_0 + \int_0^1 \lim_{n \longrightarrow \infty} \dot{u}_{f_n}(s)ds = u_0 + \int_0^1 v(s)ds,$$

et donc $\dot{u}_f(t) = v(t)$, $\forall t \in [0,1]$.
On conclut alors que $(\dot{u}_{f_n})$ converge $\sigma(L^2, L^2)$ vers $\dot{u}_f$ et comme $(f_n)_n$ converge $\sigma(L^2, L^2)$ on aura la convergence $\sigma(L^2, L^2)$ de $(-\dot{u}_{f_n} - f_n)$ vers $(-\dot{u}_f - f)$.
Comme

$$-\dot{u}_{f_n}(t) \in A(t)u_{f_n}(t) + f_n(t), p.p. \ t \in [0,1],$$

en appliquant le lemme 3.1.5 on obtient

$$-\dot{u}_f(t) - f(t) \in A(t)u_f(t), p.p\ t \in [0,1].$$

Etape 3 :
Dans cette étape, on donne l'existence de solutions pour le problème $(\mathcal{P}_F)$ qui repose sur l'utilisation du théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan (théorème 1.6.2) via les résultats obtenus dans l'étape 1 et 2.
Posons

$$\mathcal{X}_s := \{u_f \in \mathcal{X} \ / \ u_f \textit{ est la solution unique de } (\mathcal{P}_f),\ f \in S\}$$

Par la compacité de $\mathcal{X}$ et la relation (*) on conclut que $\mathcal{X}_s$ est un compact de $\mathcal{C}_E([0,1])$.
F vérifie les hypothèses du Théorème 3.1.8, donc
il existe une multi-application $\Phi : \mathcal{X}_s \rightrightarrows L^1_E([0,1])$ à valeurs convexes fermées de graphe fortement faiblement séquentiellement fermé et telle que

$$\forall u_f \in \mathcal{X}_s \quad et \quad \forall v \in \Phi(u_f) \ \ p.p.\ t \in [0,1],$$

nous avons

$$v(t) \in F(t, u_f(t)) \quad et \quad \|v(t)\| \leq m(t).$$

Considérons la multi-application $\Psi : S \rightrightarrows L^1_E([0,1])$ définie par

$$\Psi(f) := \{g \in \Phi(u_f) / \ u_f \in \mathcal{X}_s\}.$$

Φ étant à valeurs non vides et donc $\Psi(f)$ est non vide pour tout $f \in S$.
Montrons que $\Psi(f)$ est convexe.
Soient $g_1, g_2 \in \Psi(f)$ et $\alpha \in [0,1]$, d'après la définition de $\Psi(f)$ on a
$g_1 \in \Phi(u_f), g_2 \in \Phi(u_f)$, p.p sur $[0,1]$, et $u_f \in \mathcal{X}_s$.
Comme Φ est convexe, on aura

$$\alpha g_1 + (1-\alpha)g_2 \in \Phi(u_f) \ \ p.p\ sur\ [0,1] \quad et \quad u_f \in \mathcal{X}_s,$$

et donc

$$\alpha g_1 + (1-\alpha)g_2 \in \Psi(f),$$

d'où la convexité de $\Psi(f)$.

Montrons que $\Psi(S) \subset S$.
Soit $f \in S$, et soit $g \in \Psi(f)$, alors nous avons

$$\begin{aligned} g \in \Psi(f) &\Rightarrow g \in \Phi(u_f) \ \ et \ \ u_f \in \mathcal{X}_s \\ &\Rightarrow g(t) \in F(t, u_f(t)) \ \ et \ \ \|g(t)\| \leq m(t) \\ &\Rightarrow g \in S \\ &\Rightarrow \Psi(S) \subset S. \end{aligned}$$

D'autre part, $\Psi(f)$ est faiblement compact, pour tout $f \in S$.
En effet, soit $f \in S$ et soit (g_n) une suite d'éléments de $\Psi(f)$ convergeant $\sigma(L^1_E, L^\infty_E)$ vers g.
Nous avons $g_n \in \Psi(f)$ et donc $g_n \in \Phi(u_f) \subset S$, comme S est $\sigma(L^1_E, L^\infty_E)$ compact, on peut extraire une sous suite de (g_n) qu'on note aussi (g_n) et qui converge $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'})$ vers $g \in S$.

comme Φ est de graphe fortement faiblement séquentiellement fermé, on conclut que $g \in \Phi(u_f)$, p.p.
Par conséquent, $g \in \Psi(f)$ et donc $\Psi(f)$ est faiblement compact dans S.

Montrons maintenant la semi-continuité supérieure de $\Psi : S \rightrightarrows S$.
Pour ça, il suffit de montrer que le graphe de Ψ défini par

$$gph(\Psi) := \{(f, g) \in S \times S : g \in \Psi(f)\},$$

est séquentiellement faiblement-faiblement fermé dans $S \times S$.
Soit (f_n, g_n) une suite d'éléments du graphe de Ψ convergeant vers (f, g).
Nous avons $(f_n, g_n) \subset S \times S$ avec $g_n \in \Psi(f_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$(u_{f_n}) \subset \mathcal{X}_s$ qui est fortement compacte donc par extraction de sous suites on peut supposer que (u_{f_n}) converge uniformement vers u_f.

Comme $g_n \in \Phi(u_{f_n})$, la fermeture forte-faible du graphe de Φ nous permet de conclute $g \in \Phi(u_f)$, et donc $g \in \Psi(f)$.
Par conséquent, le graphe de Ψ est faiblement -faiblement compact dans $S \times S$, ceci est équivalent à la semicontinuité faible-faible de Ψ.

En appliquant le corollaire 1.6.2 du Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan, on obtient un point fixe f_0 pour Ψ dans S,

c'est à dire ;

$$\exists f_0 \in S \ \ tel\ que \ \ f_0 \in \Psi(f_0) \ \Rightarrow \ f_0 \in \Phi(u_{f_0}) \ / \ u_{f_0} \in \mathcal{X}_s.$$

D'après ce qui précéde, nous avons

$$\begin{cases} f_0(t) \in F(t, u_{f_0}(t)) \ \ et \ \ \|f_0(t)\| \leq m(t) \ \ \ p.p. \ t \in [0,1]; \\ \\ u_{f_0} \in \mathcal{X}_s. \end{cases}$$

D'autre part,

$$u_{f_0} \in \mathcal{X}_s \ \ \Rightarrow \ \ u_{f_0} \in \mathcal{X} \qquad et \ \ -\dot{u}_{f_0}(t) \in A(t)u_{f_0}(t) + f_0(t) \ \ p.p. \ t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} -\dot{u}_{f_0}(t) \in A(t)u_{f_0}(t) + f_0(t) \ \ \ p.p. \ t \in [0,1], \\ u_{f_0}(t) = u_0. \end{cases}$$

Comme $f_0(t) \in F(t, u_{f_0}(t))$ on obtient

$$\begin{cases} -\dot{u}_{f_0}(t) \in A(t)u_{f_0}(t) + F(t, u_{f_0}(t)) \ \ \ p.p. \ t \in [0,1]; \\ \\ u_{f_0}(0) = u_0. \end{cases}$$

D'où, u_{f_0} est une solution de l'inclusion différentielle considérée.
La démonstration est ainsi complète.

Bibliographie

[1] B. Aghezzaf and S. Sajid, *On the second order contingent set and differential inclusions*, Journal of Convex Analysis, vol **7** (2000), No. 1,183-195.

[2] N.U. Ahmed and S, Kerbal, *Optimal control of nonlinear second-order evolution equations*, J. Appl. Math. Stochastic Anal. **6** (1993), 123-136.

[3] D. Azzam-Laouir, *Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre.* Thèse de doctorat d'état, Constantine, (2003).

[4] D. Azzam Laouir, C. Castaing and L. Thibault, *Three boundary value problems for second order differential inclusions in Banach spaces*, Control and Cybernetics, vol. **31** (2002) No. 3, 659-693.

[5] D. Azzam-Laouir, S. Lounis, *Existence solutions for a class of second order differential inclusions*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol **6**, Number 2, (2005).

[6] D. Azzam-Laouir, S. Lounis and L. Thibault, *Existence solutions for second order differential inclusions with nonconvex perturbations*, Applicable Analysis, Vol. 86. No. 10, October 2007, 1199-1210.

[7] H. Attouch, A. Cabot and P. Redont, *The dynamics of elastic shocks via epigraphical regularization of a differential inclusion*,

[8] H. Attouch et A. Damlamian, *On multivalued evolution equations in Hilbert space*, Isr. J. Math. Vol 12 (1972).

[9] J.P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions-set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[10] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff (1976).

[11] Ph. Benilan, *Equations d'évolutions dans un espace de Banach quelconque et applicaions*, Thèse, Univ. Paris XI, Orsay (1972).

[12] M. Bounkhel and M.F. Yarou, *Existence results for first and second order nonconvex sweeping processes with delay* , Portugaliae Mathematica. Vol 61, 2 (2004).

[13] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Mathematics Studies, Notas de Matemática (**50**) (1973).

[14] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications* , Masson (1993).

[15] C. Castaing, *Quelques applications du théorème de Banach-Dieudonné à l'intégration*, Service de Mathématiques, Preprint No 67, Université de Montpellier (1969).

[16] C. Castaing, *Quelques problèmes d'évolution du second ordre*, Sém. Anal. Convexe, Montpellier (1988), exposé No 5.

[17] C. Castaing, Duc Ha, T. X. and Valadier, M, *Evolution equations governed by the sweeping prcess*, Set-Valued Analysis **1** (1993), 109-139.

[18] C. Castaing, A. Faik and A. Salvadori, *Evolution equations governed by m-accretive and subdifferential operators*, Intern. Journ. Appl. Math. 2(9)(2000), 1005-1026.

[19] C. Castaing and A.G. Ibrahim, *Functional evolution equations governed by m-accretive operators*,

[20] C. Castaing, A. Salvadori and L. Thibault, *Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Yokohama Publishers **2(2)** (2001), 217-241.

[21] C. Castaing et M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable multifuntions, Lecture Notes on Math*, 580, Springer Verlag, Berlin (1977).

[22] A. Cellina et M.V. Marchi, *Non convex perturbation of maximal monotone differential inclusions*, Centre de recherchede mathématique de la décision (1982), NO 8206.

[23] B. Cornet and G. Haddad, *Théorème de viabilité pour les inclusions différentielles du second ordre*, Isr. J. Math. Vol. **57**. No. 2, 1987.

[24] M.G. Crandall et T. Liggett, *Generation of semi-groups of non linear transformations on general Banach space*, Amer. Jour. Math. 93, 265-298 (1971).

[25] M.G. Crandall et A. Pazy, *Nonliear evolution equation in Banach spaces*, Isr. J.Math. 11, 57-94 (1972).

[26] K. Deimling, *Multivalued differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1992).

[27] R. Descombes, *Cours d'analyse*, Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[28] T.X. Duc Ha and M.D.P. Monteiro-Marques, *Nonconvex second order differential inclusions with memory*, Set-Valued Analysis, Vol.3, 71-86, (1995).

[29] L.C. Evans, *Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space*, Isr J. Math. 26, NO 1, 1-42 (1977).

[30] N. Fetouci, *Problèmes d'évolution gouvernés par le processus de rafle*, Thèse de Magister, Université de Jijel (2005).

[31] A. Gamal, *Perturbation non convexe d'un problème d'évolution dans un espace hilbertien*, Sém. Anal. Convexe Montpellier (1981), exposé No. 16.

[32] A. Gamal, *Perturbation non convexe d'un problème d'évolution dans un espace de Banach*, Sém. Anal. Convexe Montpellier (1982), exposé No. 17.

[33] A. Gamal, *On differential inclusions with memory in Banach spaces*, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 67, (1992), 1-26.

[34] A. Gavioli and L. Malaguti, *Viable solutions of differential inclusions with memory in Banach space*, Portugaliae Mathematica. 57(2) (2000), 203-217.

[35] A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques*, Publicaçao da Sociedade de Matemática de S. Paulo, (1964).

[36] E. Hill, *On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions*, Kingl. Fysiografiska Sällskapets I Lun Fordhandlinger 21, 130-142 (1951).

[37] T. Kato, *Nonlinear semi-groups and evolution equations*, J. Math. Soc. Japan 19, 508-520 (1967).

[38] Y. Kobatashi, *Difference approximation of evolution equations and generation of nonlinear semi-groups*, Proc. Japan Acad. 51, 406-410 (1975).

[39] M. Kisielewicz, *Differential inclusions and optimal control*, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Boston. London.

[40] N. S. Papageorgiou, *Existence of solutions for second-order evolution inclusions*, Bull. Austr. Math. Soc. Vol 38. 86(1994).

[41] A. Plant, *Hölder continuous nonlinear product integrals*, Lecture notes in Mathematics n 415, 417-421 (1974), Springer-Verlag.

[42] M.D.P. Monteiro Marques, *Differential inclusions in nonsmouth mechanical problems, shoks and dry friction*, Birkäuser, Basel. Boston. Berlin (1993).

[43] R. Morchadi and S. Sajid, *Nonconvex second-order differential inclusions*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, Vol. **47**. No. 3, 1999.

[44] W.M. Ruess and W.H. Summers, *Operators semigroups for functional differential equations with delay*, Trans. Amer. Math. Soc. **341 (2)** (1994), 695-719.

[45] A. Syam, *Contribution aux inclusions différentielles*, Thèse, Montpellier II, 1993.

[46] A.A. Tolstonogov, *Solutions of a differential with unbouded right-hand side.* (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. **29**, (1988), No. 5, 212-225, 241 translation in Seberian. Math. J. **29**. No. 5, 857-868.

[47] A.A. Tolstonogov, *Properties of the Set of Extreme Solutions for a Class of Nonlinear Second-Order Evolution Inclusions*, Set-Val. Anal. 10, (2002), 53-77.

ملخص

في هذه المذكرة ، نثبت وجدانية الحلول للإحتواءات التفاضلية من الرتبة الثانية من الشكل:

$$\ddot{x}(t) \in F(t, \tau(t)x, \tau(t)\dot{x}),$$

حيث F تابع محدد ، متعدد القيم في فضاء بعده منته و $\tau(t)x$ هو حد التأخر.
نستعمل بعد ذلك طريقة تقوم على تقنية التجزئة.
بعد ذلك نبرهن نظرية الوجدانية لإحتواء تفاضلي موجه بمؤثر أعظمي رتيب من الشكل:

$$\dot{x}(t) \in -Ax(t) + F(t, x(t)), x(0) = x_0,$$

حيث F تابع متعدد القيم مختلط نصف مستمر.

Résumé

Dans ce travail, en premier lieu, on considère une inclusion différentielle du second ordre de la forme

$$\ddot{x}(t) \in F(t, \tau(t)x, \tau(t)\dot{x}),$$

où F est une multi-application à valeurs convexes dans un espace fini et $\tau(t)x$ *est le terme de retard. Nous utilisons une méthode qui repose sur une technique de discrétisation. En second lieu, on démontre l'existence de solutions pour l'équation d'évolution gouvernée par un opérateur maximal monotone de la forme*

$$\dot{x}(t) \in -Ax(t) + F(t, x(t)), x(0) = x_0,$$

où F est une multifonction semi-continue mixte.

Abstract

In this work, first, we consider a second order differential inclusion of the form

$$\ddot{x}(t) \in F(t, \tau(t)x, \tau(t)\dot{x}),$$

where F is a set-valued mapping taking convex values in a finite space and $\tau(t)x$ *is the delay term. We use a discretization technique to establish existence of solutions. Moreover, we prove existence theorem for evolution equation governed by maximal monotone operator of the form*

$$\dot{x}(t) \in -Ax(t) + F(t, x(t)), x(0) = x_0,$$

where F is a mixed semicontinuous multifunction.