République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

faculté des sciences exacte et d'informatique

Département de Mathématique

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse et Applications.

Thème

Étude d'une classe de problèmes d'équations différentielles fractionnaires d'ordre $0 < \alpha \leq 1$

Présenté par :

– Djoweyda Lahmar.

– Amel Djebili.

Devant le jury :

Président	: W. Boukrouk	M.C.B Université de Jijel
Encadreur	: H. Menigher	M.A.B Université de Jijel
Examinateur	: B. Saoudi	M.A.A Université de Jijel

Promotion **2016/2017**

Remerciements

Louange à Dieu le tout puissant de nous avoir accordé toute la volonté et la persévérance durant nos cinq ans d'études.

Nous remercions en suite, notre encadreur H.MENIGHER pour les conseils, l'orientation, et l'assistance, qu'il nous a apportés jusqu'à la fin de ce travail.

Sans oublier de remercier le membre du jury qui a bien voulu accepter d'examiner ce modeste travail.

Nos vifs remerciements sont aussi adressés à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Nos parents, nos frères et sœurs qui nous ont aidés moralement et physiquement.

A tous nos amis.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidés de près ou de loin ne serait-ce que par le simple signe d'encouragement.

Dédicace

A mes très chers parents.

Aucun mot, aucune dédicace ne peut exprimer mon respect, ma considération et l'amour éternel pour les sacrifices que vous avez consentis pour mon instruction et mon bien être.

Votre générosité et votre bonneté ont toujours été un exemple pour nous tous.

A mes très chère sœurs.

A toute ma chère famille.

A mes professeurs.

A tous ceux qui m'aiment.

A tous ceux que j'aime.

Je dédie ce travail avec hommage.

Amel Djebili

Dédicace

Je dédie ce mémoire de fin d'études

A Mon très cher père et ma très chère mère pour leur soutiens, les sacrifices et tous les offerts consentis pour mon éducation et ma formation.

A mes très chère sœurs et mes frères.

A mon fiancé qui m'a soutenu moralement et m'a aidé dans la recherche, en reconnaissance de son don de la présente note.

À tous mes amis surtout Amel.

Je tiens à vous témoigner ma reconnaissance, mon amour et mon affection.

Que dieu vous protège et vous bénisse.

Djoweyda Lahmar

Table des matières

Introduction **ii**

1 Préliminaires **1**

1.1 Définitions 1

1.2 Quelques théorèmes de point fixe 2

1.3 Fonctions Eulériennes 2

1.3.1 La fonction Gamma 3

1.3.2 La fonction Bêta 5

1.4 Fonctions définies par une intégrale 6

2 Calcul fractionnaire **8**

2.1 Intégrale fractionnaire 8

2.2 Dérivée fractionnaire 11

2.2.1 Approche de Riemann-Liouville 11

2.2.2 Approche de Caputo 16

2.2.3 Relation entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville 17

2.2.4 Approche de Grunwald Letnikov 18

2.2.5 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Grunwald-Letnikov 21

3 Problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire **25**

3.1 Problèmes aux limites avec des conditions locales 25

3.1.1 Existence des solutions 26

3.1.2 Exemple 31
3.2 Problèmes aux limites avec des conditions non locales 32
3.2.1 Existence des solutions 33
3.3 Problèmes aux limites avec des conditions intégrales 36
3.3.1 Existence des solutions 36
3.3.2 Exemple 41
3.4 Problèmes aux limites avec retard infini 42
3.4.1 Existence des solutions 43
3.4.2 Exemple 50

Conclusion **52**

Bibliographie **53**

Introduction

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par là-même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opération inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre «moins un». On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordres successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

On pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques «pures» sans intérêt pour l'ingénieur. Pourtant un exemple simple de mécanique des fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne.

Selon une thèse d'histoire des mathématiques récente, la dérivation numérique d'ordre fractionnaire remonte à diverses correspondances entre Gottfried Leibniz, Guillaume de L'Hôspital et Johann Bernoulli à la fin du XVIIe siècle. Mais ces grands pionniers se heurtèrent à un paradoxe.

La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov et de Caputo. A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie.

Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la théorie de transmission, analyse chimique des solutions aqueuses, transfert de la chaleur, la rhéologie des sols (étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée), la croissance des cannelures inter granulaires sur la surface des métaux, la mécanique quantique, diffusion des polluants atmosphériques...etc.

Actuellement dans la littérature mathématique, les études sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles fractionnaires sont très abondantes, et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe montrant l'existence des solutions de divers genres d'équations.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes de problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Ce travail est principalement réparti en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous rappelons quelques définitions concernant les opérateurs équicontinus et complètement continus, quelques notions et résultats sur les fonction eulériennes (la fonction Gamma et la fonction Bêta) et la dérivation sous le signe intégrale. On donne aussi quelques théorèmes de point fixe qui seront utilisées dans le troisième chapitre.

Dans le deuxième chapitre, on introduire l'opérateur d'intégration fractionnaire et nous donnons les approches les plus utiles de dérivation fractionnaire, qui sont approche de Riemann-Liouville, de Caputo et de Grunwald Letnikov, et nous n'avons pas oublié de donner quelques propriétés de ces notions.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

$$^{C}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \text{ pour tout } t \in I = [0,1],\ 0 < \alpha < 1,$$

avec trois types de conditions. Conditions locales $ay(0)+by(T) = c$, conditions non locales $y(0) + g(y) = y_0$ et conditions intégrales de la forme

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s)\mathrm{d}s = y(T).$$

Nous terminons ce chapitre par l'étude du problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec retard infinie

$$\begin{gathered} ^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y_t), \quad \text{pour tout } t \in I = [0,T],\ 0 < \alpha \leq 1, \\ y(t) = \phi(t), \quad t \in]-\infty, 0]. \end{gathered}$$

Les résultats de ce chapitre est basé sur les travaux de M. Benchohra et autres [1], [3], [2].

On terminons ce mémoire par une conclusions générale.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et quelques théorème du point fixe et résultats sur les fonctions élémentaires sous le signe d'intégrale.

1.1 Définitions

Definition 1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de E dans F.*

Definition 1.2. *Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact dans F. f est dite compacte si $f(E)$ est relativement compacte dans F.*

Definition 1.3. *Soient (K, d) un espace métrique et F un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $A \subset C(K, F)$ est équicontinue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $f \in A$,*

$$\|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon \text{ pour tout } x, y \in K \text{ tel que } d(x, y) < a(\varepsilon).$$

Definition 1.4. *Soient E un espace de Banach et $A : E \to E$ un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant), s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que*

$$\|Ax - Ay\|_E \leq k\|x - y\|_E \text{ pour tout } x, y \in E.$$

1.2 Quelques théorèmes de point fixe

Definition 1.5. *Soit E un espace de Banach et $A : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de A si $Ax = x$.*

Théorème 1.1 (Banach)**.** [6]

Soit (Y, d) un espace métrique complet et $F : Y \to Y$ une contraction. Alors F admet une unique point fixe.

Théorème 1.2 (Schauder)**.** [10]

Soit M un sous ensemble borné fermé convexe d'un espace de Banach X, et $T : M \to M$ un opérateur. Si T est compacte, alors T admet un point fixe.

Théorème 1.3 (Schaefer)**.**
Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda Au = u \text{ pour un certain } \lambda \in]0, 1[\}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.4 (alternative non-linéaire de Leray Schauder)**.** [6]

Soit $C \subset E$ un ensemble convexe, et soit U un ouvert de C tel que $0 \in U$. Alors, toute application compacte $F : \overline{U} \to C$ admet au moins une des propriétés suivantes :

1) F admet une point fixe.

2) Il existe $x \in \partial U$ et $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x = \lambda F(x)$.

Théorème 1.5 (Ascoli-Arzélà)**.**
Soit A un sous ensemble de $C(I, E)$. A est relativement compact dans $C(I, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

1) L'ensemble A est borné, ie il existe une constante $k > 0$, tel que

$$\|f(x)\| \leq k \text{ pour tout } x \in I \text{ et tout } f \in A.$$

2) L'ensemble A est équicontinue, ie pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tous } t_1, t_2 \text{ et tout } f \in A$$

3) Pour tout $x \in I$, l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

1.3 Fonctions Eulériennes

Dans cette section nous présentons la fonction Gamma et la fonction Bêta qui seront utilisées dans la suite, ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.3.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Léone Euler "1707-1783" dans son objectif de généraliser le factoriel à des valeurs non entières.

Definition 1.6. *La fonction Gamma est une fonction qui prolonge naturellement le factoriel aux nombres réels, et même aux nombres complexes $x \in \mathbb{C}$ tel que $Re(x) > 0$. On définit la fonction Gamma par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Propriété importante :

La propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.1}$$

On a

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a t^x e^{-t} dt.$$

Par une intégration par parties on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \lim_{a \to +\infty} \int_0^a t^x e^{-t} dt = \lim_{a \to +\infty} \left(\left[-t^x e^{-t} \right]_0^a + x \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\ &= \lim_{a \to +\infty} \left(-a^x e^{-a} + x \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\ &= \lim_{a \to +\infty} x \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \end{aligned}$$

Par récurrence, si $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= (x+n-1)\Gamma(x+n-1) \\ &= (x+n-1)(x+n-2)\Gamma(x+n-2) \\ &\vdots \\ &= (x+n-1)(x+n-2)(x+n-3)\cdots(x+1)x\Gamma(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)(x+n-3)\cdots(x+1)x\Gamma(x),$$

ou

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Prolongement de Gamma dans $\mathbb{C}$:

Soit $x \in \mathbb{C}$. Si $-1 < Re(x) < 0$ alors $0 < Re(x+1) < 1$ et $\Gamma(x)$ est bien définie par la forme

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad 0 < Re(x+1) < 1.$$

Si $-2 < Re(x) < -1$ alors $0 < Re(x+2) < 1$ et $\Gamma(x)$ est bien définie par

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}.$$

En générale, si $-n < Re(x) < -n+1$ alors $0 < Re(x+n) < 1$ et $\Gamma(x)$ est bien définie par

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Alors on peut prolonger Γ pour les nombres complexes $x \in \mathbb{C}$ tel que $Re(x) > 0$ par

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}, \quad 0 < Re(x+n) < 1.$$

Valeurs particulières de Gamma :

1) $\Gamma(0^+) = +\infty$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$.
2) $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.
3) $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dérivation de la fonction Gamma :

La fonction Gamma est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} dt.$$

En effet, par définition

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

La dérivée d'ordre 1 est

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}) e^{-t} dt = \int_0^\infty (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt.$$

La dérivée d'ordre 2 est

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}) \ln t e^{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}(e^{(x-1)\ln t}) \ln t e^{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} (\ln t) e^{(x-1)\ln t} \ln t e^{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt.
\end{aligned}$$

En générale, la dérivée d'ordre n est

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} (\ln t)^n e^{-t} dt.$$

1.3.2 La fonction Bêta

En mathématique la fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres complexes x et y des parties réelles strictement positives par

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. \tag{1.2}$$

La fonction Bêta a été étudier par Euler et Legendre et doit son nom à Jacquet Binet. Elle est en relation avec la fonction Gamma d'Euler par la formule

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Propriétés :

1) Dans la formule (1.2), le changement de variable $x = 1 - t$ prouve que la fonction Bêta est symétriques.
2) Si x et y sont des entiers naturels, on obtient l'identité suivante

$$\mathrm{B}(n,m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}.$$

Dérivation de la fonction Bêta :

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(x,y)\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right).$$

En effet, on a vu que

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\right) \\
&= \frac{\Gamma'(x)\Gamma(y)\Gamma(x+y) - \Gamma'(x+y)\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma^2(x+y)} \\
&= \frac{\Gamma'(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma'(x+y)\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma^2(x+y)} \\
&= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right) \\
&= \mathrm{B}(x,y)\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(x,y)\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right).$$

1.4 Fonctions définies par une intégrale

Dans cette partie, $X, I \subset \mathbb{R}$ sont deux intervalles. Nous allons étudier les propriétés de continuité et de dérivabilité de fonctions $F : X \to \mathbb{R}$ définies par une intégrale

$$F(x) = \int_I f(x,t)dt,$$

avec $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Théorème 1.6 (Continuité)**.**
Soit $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables vérifiant

1) *pour tout $x \in X$, la fonction $t \to f(x,t)$ est intégrable sur I,*
2) *pour tout $t \in I$, la fonction $x \to f(x,t)$ est continue en $x_0 \in X$,*
3) *il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ intégrables sur I telles que pour tout $x \in X$ et tout $t \in I$: $g(t) \leq f(x,t) \leq h(t)$.*

Alors, la fonction $F : X \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue en x_0.

Corollaire 1.1. *Si X est un compact, si I est un segment et si $f : X \times I \to \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction $F : X \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur X.*

Venons-en maintenant à la dérivabilité.

Théorème 1.7 (Dérivabilité)**.**
Soit $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que

1) pour tout $x \in X$, la fonction $t \to f(x,t)$ est intégrable sur I,

2) pour tout $t \in I$, la fonction $x \to f(x,t)$ est dérivable sur X,

3) il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ intégrables sur I telles que pour tout $x \in X$ et tout $t \in I$: $g(t) \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leq h(t)$.

Alors, la fonction $F : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t,$$

est dérivable sur X, $t \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I et

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Le résultat suivant est un corollaire des deux théorèmes précédents.

Corollaire 1.2. *Soit $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet en tout point une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ qui est elle-même continue sur $X \times [a,b]$. Alors, la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t,$$

est de classe C^1 sur X et

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Il est parfois utile de savoir dériver une fonction définie par une intégrale dont les bornes dépendent du paramètre.

Proposition 1.1. *Soient $a : X \to I$ et $b : X \to I$ des fonctions de classe C^1 et $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet en tout point une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ qui est elle-même continue sur le domaine décrit par (x,t). Alors, la fonction $F : X \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\mathrm{d}t,$$

est de classe C^1 sur X et

$$F'(x) = b'(x)f(x,b(x)) - a'(x)f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 1.8. *(Théorème de Fubini pour les rectangles fermés)*
Soit $D = [a,b] \times [c,d]$ $(a < b,\ c < d)$ un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable sur D et on a

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Chapitre 2

Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre nous abordons un aperçu sur le calcul fractionnaire. On se restreindre les trois approches des dérivées fractionnaires les plus populaires et les plus pratiques, l'approche de Grunwald Letnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo, ainsi que leurs propriétés.

2.1 Intégrale fractionnaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, $b > a > 0$ telle que $f(a) = 0$. l'inverse de l'opérateur de dérivation $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ est l'opérateur d'intégration I :

$$\mathrm{D}f(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = g(t) \text{ avec } f(a) = 0 \iff f(t) = \mathrm{I}g(t) = \int_a^t g(s)\mathrm{d}s.$$

De même, l'inverse de la dérivation $n^{ième}$ est définie par le $n^{ième}$ itéré de l'opérateur I précédent. Ainsi la fonction f_2 telle que $f_2(a) = f_2'(a) = 0$ avec $f_2'' = g$ est définie par

$$f_2(t) = \mathrm{I}(\mathrm{I}g(t)) = \mathrm{I}^2 g(t) = \int_a^t \Big(\int_a^r g(s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}r.$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$\mathrm{I}^2 g(t) = \int_a^t g(s)\Big(\int_s^t \mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}s = \int_a^t (t-s)g(s)\mathrm{d}s.$$

Plus généralement, pour tout entier n, le $n^{ième}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$\mathrm{I}^n g(t) = \int_a^t \mathrm{d}s_1 \int_a^{s_1} \mathrm{d}s_2 \cdots \int_a^{s_{n-1}} g(s_n)\mathrm{d}s_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} g(s)\mathrm{d}s. \tag{2.1}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma, $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le membre droit de (2.1) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière. Il était naturel de définir l'intégrale fractionnaire comme suit :

Definition 2.1. *Soit $f \in L^1[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. L'intégrale*

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{a^+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s,$$

est appelée intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α, et l'intégrale

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{b^-} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s,$$

est appelée intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre α.

Pour $\alpha = 0$ on a $\mathrm{I}^0 f(t) = f(t)$, c'est-à-dire I^0 est l'opérateur identité.

Exemple 2.1. *Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = ct^r$ tel que $r > -1$ et $c \in \mathbb{R}$. On a*

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{0^+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} cs^r \mathrm{d}s.$$

En utilisant le changement de variable $s = tx$ et la fonction Bêta on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^{\alpha}_{0^+} f(t) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-tx)^{\alpha-1}\, t^{r+1} x^r \mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+r} \int_0^1 x^r (1-x)^{\alpha-1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+r} \mathrm{B}(\alpha, r+1) \\
&= \frac{c\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)} t^{\alpha+r}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Si $r = 0$ on obtient l'intégrale fractionnaire d'une fonction constante

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{0^+} c = \frac{ct^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^{\alpha}}{\alpha}, \quad t \geq 0.$$

Remarque 2.1. *L'intégrale fractionnaire est linéaire d'après la linéarité de l'intégrale classique.*

Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale à gauche et on le note tout simplement I^{α}.

Proposition 2.1. *Si $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha > 0$, alors $\mathrm{I}^{\alpha} f(t)$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$ et on a $\mathrm{I}^{\alpha} f \in L^1([a,b])$.*

Preuve. Soit $f \in L^1([a,b])$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t-s)\varphi_2(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

avec

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } 0 < u \leq b-a, \\ 0, & \text{si } u \in \mathbb{R}\backslash]0, b-a], \end{cases}$$

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} f(u), & \text{si } a \leq u \leq b, \\ 0, & \text{si } u \in \mathbb{R} \setminus [a,b]. \end{cases}$$

Par construction, $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1(\mathbb{R})$, et on a $\mathrm{I}^\alpha f \in L^1([a,b])$. □

Proposition 2.2. *Soit* $\alpha, \beta > 0$. *Alors* $\mathrm{I}^\alpha \mathrm{I}^\beta = \mathrm{I}^{\alpha+\beta} = \mathrm{I}^\beta \mathrm{I}^\alpha$.

Preuve. Soit $f \in L^1([a,b])$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^\alpha(\mathrm{I}^\beta f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\mathrm{I}^\beta f(\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau (\tau-\xi)^{\beta-1} f(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\mathrm{I}^\alpha(\mathrm{I}^\beta f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi)\mathrm{d}\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\xi)^{\beta-1}\mathrm{d}\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = \xi + z(t-\xi)$ on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^\alpha(\mathrm{I}^\beta f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi)\mathrm{d}\xi \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}(t-\xi)^{\alpha-1} z^{\beta-1}(t-\xi)^\beta \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi)\mathrm{d}\xi \int_0^1 (t-\xi)^{\alpha+\beta-1}(1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi)\mathrm{d}\xi \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1}\mathrm{d}z = \mathrm{B}(\beta,\alpha) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\alpha}(\mathrm{I}^{\beta}f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1}f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{I}^{\alpha+\beta}f(t).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\alpha+\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1}f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_a^t (t-\xi)^{\beta+\alpha-1}f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{I}^{\beta}\mathrm{I}^{\alpha}.\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{I}^{\alpha}\mathrm{I}^{\beta} = \mathrm{I}^{\alpha+\beta} = \mathrm{I}^{\beta}\mathrm{I}^{\alpha}$. $\square$

2.2 Dérivée fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

2.2.1 Approche de Riemann-Liouville

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n-1 < \alpha < n$, on définit la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre α par une intégration d'ordre $n-\alpha$ suivie d'une dérivation d'ordre n.

Definition 2.2. *Soit $f \in L^1[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. On définit la dérivée fractionnaire de f au sens de Riemann-Liouville par*

$$^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

Exemple 2.2. *La dérivée fractionnaire de $(t-a)^r$.*

Soit α non entier, $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < n-1 < \alpha < n$, et $r > -1$. On a

$$^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(t-a)^r = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^r\mathrm{d}\tau. \tag{2.3}$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(t-a)^{r} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_0^1 (t-a)^{n-\alpha-1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^r(t-a)^{r+1}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_0^1 (t-a)^{n-\alpha+r}(1-s)^{n-\alpha-1}s^r\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t-a)^{n-\alpha+r}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^r\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Calcule de $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t-a)^{n-\alpha+r}$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t-a)^{n+r-\alpha} &= (n+r-\alpha)(t-a)^{n+r-\alpha-1} \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(t-a)^{n+r-\alpha} &= (n+r-\alpha)(n+r-\alpha-1)(t-a)^{n+r-\alpha-2} \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t-a)^{n+r-\alpha} &= (n+r-\alpha)(n+r-\alpha-1)\cdots(n+r-\alpha-(n-1))(t-a)^{n+r-\alpha-n} \\
&= (n+r-\alpha)(n+r-\alpha-1)\cdots(r-\alpha+1)(t-a)^{r-\alpha}
\end{aligned}$$

On sait que

$$(r-\alpha+1)\cdots(n+r-\alpha-1)(n+r-\alpha) = \frac{\Gamma(n+r-\alpha+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)},$$

et

$$\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^r\mathrm{d}s = \mathrm{B}(n-\alpha, r+1) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha+r+1)}.$$

Donc

$${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(t-a)^{r} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}(t-a)^{(r-\alpha)}.$$

Proposition 2.3. *Soient $\alpha > \beta > 0$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n > \alpha$, et soit $f \in L^1[a,b]$. Alors*

1) ${}^{RL}\mathrm{D}^{-\alpha}f(t) = \mathrm{I}^{\alpha}f(t)$.

2) ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t) = \mathrm{D}^{n}\mathrm{I}^{n-\alpha}f(t)$.

3) ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{I}^{\alpha}f(t)) = f(t)$.

4) $\mathrm{I}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t)) = f(t) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-i}f(a)$.

5) ${}^{RL}\mathrm{D}^{\beta}(\mathrm{I}^{\alpha}f(t)) = \mathrm{I}^{\alpha-\beta}f(t)$.

Preuve.

1) On a

$${}^{RL}\mathrm{D}^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n+\alpha-1}f(\tau)d\tau.$$

Comme $(t-\tau)^{n+\alpha-1}f(\tau)$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors

$$ {}^{RL}\mathrm{D}^{-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^t \frac{d^n}{dt^n}(t-\tau)^{n+\alpha-1}f(\tau)d\tau. $$

On calcul $\dfrac{d^n}{dt^n}(t-\tau)^{n+\alpha-1}$

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dt}(t-\tau)^{n+\alpha-1} &= (n+\alpha-1)(t-\tau)^{n+\alpha-2} \\ \frac{d^2}{dt^2}(t-\tau)^{n+\alpha-1} &= (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)(t-\tau)^{n+\alpha-3} \end{aligned} $$

Par récurrence on obtient

$$ \begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}(t-\tau)^{n+\alpha-1} &= (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\cdots(n+\alpha-(n+1))(t-\tau)^{\alpha-1} \\ &= (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\cdots(\alpha-1)\alpha(t-\tau)^{\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}(t-\tau)^{\alpha-1}. \end{aligned} $$

Donc

$$ {}^{RL}\mathrm{D}^{-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau = I^{\alpha}. $$

2) Soit $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $m>n$. On a

$$ \begin{aligned} \mathrm{D}^m\mathrm{I}^{m-\alpha}f(t) &= \mathrm{D}^{m-n+n}\mathrm{I}^{m-n+n-\alpha}f(t) \\ &= \mathrm{D}^n\mathrm{D}^{m-n}\mathrm{I}^{m-n}\mathrm{I}^{n-\alpha}f(t) \\ &= \mathrm{D}^n(\mathrm{I}^{n-\alpha}f(t)) \\ &= \mathrm{D}^n({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-n}f(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t). \end{aligned} $$

3) On a

$$ \begin{aligned} {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{I}^{\alpha}f(t)) &= \mathrm{D}^n\mathrm{I}^{n-\alpha}(I^{\alpha}f(t)) \\ &= \mathrm{D}^n(\mathrm{I}^n f(t)) \\ &= \mathrm{I}^0 f(t) = f(t). \end{aligned} $$

4) On a

$$ \mathrm{I}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t))=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{2.4} $$

On fait l'intégration par parties n fois. Posons

$$ \begin{aligned} u(\tau) = (t-\tau)^{\alpha-1} &\implies u'(\tau) = -(\alpha-1)(t-\tau)^{\alpha-2}, \\ v'(\tau) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(\tau) &\implies v(\tau) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-1}f(\tau), \end{aligned} $$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[(t-\tau)^{\alpha-1RL}\mathrm{D}^{\alpha-1}f(\tau)\Big]_a^t + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-2RL}\mathrm{D}^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1RL}\mathrm{D}^{\alpha-1}f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-2RL}\mathrm{D}^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}&u(\tau) = (t-\tau)^{\alpha-2} \implies u'(\tau) = -(\alpha-2)(t-\tau)^{\alpha-3}, \\ &v'(\tau) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-1}f(\tau) \implies v(\tau) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-2}f(\tau),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t)) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1RL}\mathrm{D}^{\alpha-1}f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\Big[(t-\tau)^{\alpha-2RL}\mathrm{D}^{\alpha-2}f(\tau)\Big]_a^t + \right. \\ &\left. (\alpha-2)\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-3RL}\mathrm{D}^{\alpha-2}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1RL}\mathrm{D}^{\alpha-1}f(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}(t-a)^{\alpha-2RL}\mathrm{D}^{\alpha-2}f(a) + \\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-3RL}\mathrm{D}^{\alpha-2}f(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Généralement

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t)) &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha+1-i)}{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-i}f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-n-1RL}\mathrm{D}^{\alpha-n}f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{-(\alpha-n)RL}\mathrm{D}^{\alpha-n}f(t) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha+1-i)}{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-i}f(a) \\ &= f(t) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha+1-i)}{}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-i}f(a).\end{aligned}$$

5) On a

$$\begin{aligned}{}^{RL}\mathrm{D}^{\beta}(\mathrm{I}^{\alpha}f(t)) &= \mathrm{D}^{n}\mathrm{I}^{n-\beta}(\mathrm{I}^{\alpha}f(t)) \\ &= \mathrm{D}^{n}(\mathrm{I}^{n-\beta+\alpha}f(t)) \\ &= \mathrm{I}^{\alpha-\beta}f(t).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. *Soit $\alpha, \beta > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a*

1) $\mathrm{D}^{k}({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}f(t)) = {}^{RL}\mathrm{D}^{k+\alpha}f(t)$.

2) ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}({}^{RL}\mathrm{D}^{\beta}f(t)) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta}f(t)$.

Preuve.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. On a

$$^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

On pose $p = n-\alpha > 0$. On a

$$^{RL}\mathrm{D}^{n-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k}(^{RL}\mathrm{D}^{n-p} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{n+k-p} f(t). \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{D}^k(^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t)) = {}^{RL}\mathrm{D}^{k+\alpha} f(t).$$

2) On distingue trois cas.

1er Cas $\alpha < 0,\ \beta < 0$:

$$\begin{aligned} ^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(^{RL}\mathrm{D}^{\beta} f(t)) &= \mathrm{I}^{-\alpha}(\mathrm{I}^{-\beta} f(t)) \\ &= \mathrm{I}^{-\alpha-\beta} f(t)) \\ &= \mathrm{I}^{-(\alpha+\beta)} f(t) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

2ème Cas $\alpha > 0,\ \beta > 0$:

Soit $g \in L^1([a,b])$ et $f = I^{\alpha+\beta} g$. On a

$$\begin{aligned} ^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(^{RL}\mathrm{D}^{\beta} f(t)) &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(^{RL}\mathrm{D}^{\beta} I^{\alpha+\beta} g(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(^{RL}\mathrm{D}^{\beta} I^{\beta} I^{\alpha} g(t)) \\ &= g(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Et

$$\begin{aligned} ^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t) &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta}(I^{\alpha+\beta} g(t)) \\ &= g(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

De (2.5) et (2.6) on conclure que

$$^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}(^{RL}\mathrm{D}^{\beta} f(t)) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t).$$

3ème Cas $\alpha > 0, \beta < 0$:

Soit $g \in L^1([a,b])$ et $f = I^\alpha g$. On a

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathrm{D}^\alpha({}^{RL}\mathrm{D}^\beta f(t)) &= {}^{RL}\mathrm{D}^\alpha({}^{RL}\mathrm{D}^\beta I^\alpha g(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^\alpha(I^{\alpha-\beta} g(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha-(\alpha-\beta)} g(t) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^\beta g(t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Et

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t) &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta}(I^\alpha g(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^{\beta\, RL}\mathrm{D}^\alpha(I^\alpha g(t)) \\ &= {}^{RL}\mathrm{D}^\beta g(t). \end{aligned} \tag{2.8}$$

De (2.7) et (2.8) on conclure que

$${}^{RL}\mathrm{D}^\alpha({}^{RL}\mathrm{D}^\beta f(t)) = {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f(t).$$

□

2.2.2 Approche de Caputo

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n-1 < \alpha < n$, La dérivée d'ordre α au sens de Caputo est obtenue en dérivant d'abord à l'ordre n puis en intégrant à l'ordre $n-\alpha$.

Definition 2.3. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (avec $n-1 < \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$) f est une fonction telle que $\dfrac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a,b]$. On définit la dérivée fractionnaire de f au sens de Caputo par*

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathrm{D}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{I}^{n-\alpha}\mathrm{D}^n f(t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Il est évident que la dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

Exemple 2.3. *La dérivée fractionnaire de la fonction f définie par $f(t) = (t-a)^r$.*

Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. On a

$$\begin{aligned} f^{(n)}(\tau) &= r(r-1)(r-2)\cdots(r-(n-1))(\tau-a)^{r-n} \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)}(\tau-a)^{r-n}. \end{aligned}$$

D'où

$$^C\mathrm{D}^\alpha (t-a)^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{r-n}\mathrm{d}\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
^C\mathrm{D}^\alpha (t-a)^r &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_0^1 (t-a)^{n-\alpha-1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{r-n}(t-a)^{r-n+1}\mathrm{d}s \\
&= \frac{\Gamma(r+1)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{r-n}\mathrm{d}s \\
&= \frac{\Gamma(r+1)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \mathrm{B}(n-\alpha, r-n+1).
\end{aligned}$$

Mais

$$B(n-\alpha, r-n+1) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)},$$

donc

$$^C\mathrm{D}^\alpha (t-a)^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}(t-a)^{r-\alpha}.$$

Si $r = \alpha$ on trouve

$$^C\mathrm{D}^\alpha (t-a)^\alpha = \Gamma(\alpha+1).$$

Remarque 2.2. *D'après la linéarité de l'intégrale classique on déduit que la dérivée fractionnaire de Caputo est linéaire.*

2.2.3 Relation entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville

Proposition 2.5. *Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. Soit $f \in L^1[a,b]$. Si f possède $n-1$ dérivées en a, alors*

$$^C\mathrm{D}^\alpha f(t) = {}^{RL}\mathrm{D}^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right), \quad \forall t \in [a,b].$$

Preuve. Posons

$$g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

On a

$$\begin{aligned}
^{RL}\mathrm{D}^\alpha g(t) &= \mathrm{D}^n I^{n-\alpha} g(t) \\
&= \mathrm{D}^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} g(\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Soit

$$J(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} g(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

On fait l'intégration par parties de J. Posons

$$\begin{aligned} u(\tau) = g(\tau) &\implies u'(\tau) = \mathrm{D}g(\tau), \\ v'(\tau) = (t-\tau)^{n-\alpha-1} &\implies v(\tau) = \frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \Big[g(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha} \Big]_a^t + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} \mathrm{D}g(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= 0 + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} \mathrm{D}g(\tau) \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

En répétant l'intégration par parties de J n fois on obtient

$$J(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1} \mathrm{D}^n g(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$ donc $\mathrm{D}^n g(\tau) = \mathrm{D}^n f(\tau)$.

Alors

$$J(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1} \mathrm{D}^n f(\tau) \mathrm{d}\tau = \mathrm{I}^{n-\alpha+n}(\mathrm{D}^n f(t))$$

Donc

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathrm{D}^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right) &= \mathrm{D}^n J(t) \\ &= \mathrm{D}^n \mathrm{I}^{n-\alpha+n}(\mathrm{D}^n f(t)) \\ &= \mathrm{D}^n \mathrm{I}^n \mathrm{I}^{n-\alpha}(\mathrm{D}^n f(t)) \\ &= \mathrm{I}^{n-\alpha}(\mathrm{D}^n f(t)) = {}^{C}\mathrm{D}^\alpha f(t). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.3. *Si* $\mathrm{D}^k f(a) = 0$ *pour tout* $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$*, alors* ${}^{C}\mathrm{D}^\alpha f(t) = {}^{RL}\mathrm{D}^\alpha f(t)$.

2.2.4 Approche de Grunwald Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

Soit f une fonction de la variable réelle t et $h \in \mathbb{R}$. On a la définition classique

$$\mathrm{D}f(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \tag{2.10}$$

L'application de cette définition deux fois, nous donne la dérivée second de f,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2 f(t) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{D}f(t) - \mathrm{D}f(t-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(t)-f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{D}^2 f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}\,.$$

Plus généralement, en appliquant (2.10) n fois on obtient

$$\mathrm{D}^n f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} f(t-kh)\,. \tag{2.11}$$

On remarque que la somme dans (2.11) peut être étendue à tous les k entiers non négatifs puisque les termes sont nuls pour $k \geq n$. Une généralisation naturelle consiste à définir la dérivée d'ordre α, pour $\alpha > 0$ par

$$\mathrm{D}^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} f(t-kh)\,. \tag{2.12}$$

Mais comme $(-1)^k\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) = (-1\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+k-1)$, et que pour $\alpha > 0$ non entier $\Gamma(-\alpha)$ est bien défini et

$$\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} = (-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+k-1),$$

on obtient la formule de Grunwald-Letnikov pour $\alpha > 0$ non entier

$${}^{GL}\mathrm{D}^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} f(t-kh)\,, \tag{2.13}$$

et pour $\alpha < 0$ non entier

$${}^{GL}\mathrm{D}^{-\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)} f(t-kh)\,. \tag{2.14}$$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant l'intégration par parties on obtient

$${}^{GL}\mathrm{D}^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Exemple 2.4. *La dérivée d'une fonction constante.*

On considère la fonction f définie par $f(t) = c \in \mathbb{R}$.

Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. On a

$$
\begin{aligned}
{}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) \mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

Comme $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $f(a) = c$, alors

$$
{}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = \frac{c(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.
$$

Exemple 2.5. *La dérivée de la fonction $(t-a)^r$*

Considérons la fonction f définie par $f(t) = (t-a)^r$ où $r > -1$.

Soit α non entier, $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < n-1 < \alpha < n$, et $r > -1$. On a

$$
{}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) \mathrm{d}\tau.
$$

Calcule de $f^{(n)}(t)$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= (t-a)^r \\
f^{(1)}(t) &= r(t-a)^{r-1} \\
f^{(2)}(t) &= r(r-1)(t-a)^{r-2} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(t) &= r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)(t-a)^{r-n} \\
&= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)}(t-a)^{r-n}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
{}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{r-n} \mathrm{d}\tau.
$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
{}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_0^1 (t-a)^{n-\alpha-1}(1-s)^{n-\alpha-1} s^{r-n} (t-a)^{r-n+1} \mathrm{d}s \\
&= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_0^1 (t-a)^{r-\alpha}(1-s)^{n-\alpha-1} s^{r-n} \mathrm{d}s \\
&= \frac{\Gamma(r+1)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{r-n} \mathrm{d}s \\
&= \frac{\Gamma(r+1)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \mathrm{B}(n-\alpha, r-n+1) \\
&= \frac{\Gamma(r+1)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(r-n+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} (t-a)^{r-\alpha}.
\end{aligned}$$

Si $r = \alpha$ on trouve

$${}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha}(t-a)^{\alpha} = \Gamma(\alpha+1).$$

2.2.5 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Grunwald-Letnikov

Proposition 2.6. *La dérivée de Riemann-Liouville d'ordre α coïncide avec la dérivée de Grunwald-Letnikov du même ordre, c-à-d ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} = {}^{GL}\mathrm{D}^{\alpha}$.*

Preuve. Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. On a

$${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

On fait l'intégration par parties et la dérivation n fois.

Posons

$$J_i(t) = \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(i)}(\tau) \mathrm{d}\tau,$$

alors

$${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} J_0(t). \tag{2.15}$$

On calcule $J_0(t)$ par parties. Posons

$$\begin{aligned}
&u'(\tau) = (t-\tau)^{n-\alpha-1} \implies u(\tau) = \frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}, \\
&v(\tau) = f(\tau) \implies v'(\tau) = f'(\tau),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}J_0(t) &= \Big[\frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}f(\tau)\Big]_a^t + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f'(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha}f(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f'(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

On dérive $J_0(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_0(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha}f(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f'(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &= (t-a)^{n-\alpha-1}f(a) + \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f'(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= (t-a)^{n-\alpha-1}f(a) + J_1(t).\end{aligned}$$

On calcule $J_1(t)$ par parties. Posons

$$\begin{aligned}&u'(\tau) = (t-\tau)^{n-\alpha-1} \implies u(\tau) = \frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}, \\ &v(\tau) = f'(\tau) \implies v'(\tau) = f''(\tau),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}J_1(t) &= \Big[\frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}f'(\tau)\Big]_a^t + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f''(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha}f'(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f''(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

On dérive $J_1(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha}f'(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha}f''(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &= (t-a)^{n-\alpha-1}f'(a) + \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f''(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= (t-a)^{n-\alpha-1}f'(a) + J_2(t).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}J_0(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((t-a)^{n-\alpha-1}f(a) + J_1(t)\Big) \\ &= (n-\alpha-1)(t-a)^{n-\alpha-2}f(a) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) \\ &= (n-\alpha-1)(t-a)^{n-\alpha-2}f(a) + (t-a)^{n-\alpha-1}f'(a) + J_2(t).\end{aligned}$$

On calcule $J_2(t)$ par parties. Posons

$$\begin{aligned} &u'(\tau) = (t-\tau)^{n-\alpha-1} \implies u(\tau) = \frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}, \\ &v(\tau) = f''(\tau) \implies v'(\tau) = f^{(3)}(\tau), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J_2(t) &= \Big[\frac{-1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha} f''(\tau)\Big]_a^t + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(3)}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha} f''(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(3)}(\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

On dérive $J_2(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_2(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha} f''(a) + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(3)}(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &= (t-a)^{n-\alpha-1} f''(a) + \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(3)}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= (t-a)^{n-\alpha-1} f''(a) + J_3(t). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} J_0(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((n-\alpha-1)(t-a)^{n-\alpha-2} f(a) + (t-a)^{n-\alpha-1} f'(a) + J_2(t)\Big) \\ &= (n-\alpha-1)(n-\alpha-2)(t-a)^{n-\alpha-3} f(a) \\ &\quad + (n-\alpha-1)(t-a)^{n-\alpha-2} f'(a) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_2(t) \\ &= (n-\alpha-1)(n-\alpha-2)(t-a)^{n-\alpha-3} f(a) \\ &\quad + (n-\alpha-1)(t-a)^{n-\alpha-2} f'(a) + (t-a)^{n-\alpha-1} f''(a) + J_3(t). \end{aligned}$$

Mais

$$(n-\alpha-1)(n-\alpha-2)\cdots(n-\alpha-k) = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-k)},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} J_0(t) &= \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-2)}(t-a)^{n-\alpha-3} f(a) + \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-1)}(t-a)^{n-\alpha-2} f'(a) \\ &\quad + (t-a)^{n-\alpha-1} f''(a) + J_3(t). \end{aligned}$$

On générale on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}J_0(t) &= \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}f^{(0)}(a)+\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(t-a)^{1-\alpha}f^{(1)}(a)\\ &+\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(3-\alpha)}(t-a)^{2-\alpha}f^{(2)}(a)+\cdots+\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{n-1-\alpha}f^{(n-1)}(a)+J_n(t)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha}f^{(k)}(a)+\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Finalement, on revient à la formule (2.15) :

$$\begin{aligned}{}^{RL}\mathrm{D}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}J_0(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-\alpha)(t-a)^{k-\alpha}f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)}+\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{k-\alpha}f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= {}^{GL}\mathrm{D}^\alpha f(t).\end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Ce chapitre sera consacré à l'étude de quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limite pour des équations différentielles fractionnaires.

3.1 Problèmes aux limites avec des conditions locales

Dans cette section, on va étudier l'existence et l'unicité des solutions d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions locales de la forme suivante

$$ {}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in I = [0,T], \ \alpha \in]0,1], \tag{3.1} $$

$$ ay(0) + by(T) = c, \tag{3.2} $$

où ${}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

Pour ce problème on présentera deux résultats d'existence, le premier est basé sur le théorème du point fixe de Banach et le second basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

3.1.1 Existence des solutions

On commence par la définition d'une solution du problème (3.1)–(3.2).

Definition 3.1. *Une fonction $y \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ est dite solution du problème (3.1)–(3.2) si elle satisfait l'équation ${}^C\mathrm{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ sur I et la condition $ay(0) + by(T) = c$.*

Pour l'existence de la solution du problème (3.1)–(3.2) on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1. [1]

Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s, \tag{3.3}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$$\begin{gathered} {}^C\mathrm{D}^\alpha y(t) = h(t)\,, \quad \forall t \in I = [0,T], \\ y(0) = y_0. \end{gathered}$$

En conséquence du Lemme 3.1, nous avons le résultat suivant qui est utile dans ce qui suit.

Lemme 3.2. [1]

Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s - c\right], \tag{3.4}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$${}^C\mathrm{D}^\alpha y(t) = h(t)\,, \quad \forall t \in I = [0,T], \tag{3.5}$$

$$ay(0) + by(T) = c. \tag{3.6}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1 on a

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s.$$

Il reste de vérifier les conditions aux limites. On a

$$y(T) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s.$$

Or $ay(0) + by(T) = c$, alors

$$ay(0) + by_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) \mathrm{d}s = c\,, \quad a+b \neq 0,$$

c'est à dire

$$y(0) = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) \mathrm{d}s\right]. \qquad \square$$

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (3.1)–(3.2), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 3.1. [1]

Supposons que

(H1) *Il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$|f(t,u) - f(t,\overline{u})| \leq k|u - \overline{u}|\,, \quad \text{pour tout } t \in I, \text{ et tout } u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{kT^\alpha\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{3.7}$$

alors le problème (3.1)–(3.2) *admet une solution unique sur* $[0, T]$.

Preuve. On va transformer le problème (3.1)–(3.2)en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$F : C([0,T], \mathbb{R}) \to C([0,T], \mathbb{R}),$$

défini par

$$\begin{aligned} F(y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \mathrm{d}s \\ &\quad - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \mathrm{d}s - c\right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Il est clair, que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (3.1)–(3.2).

Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction.

Soient $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Big(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\Big)\mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\Big(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\Big)\mathrm{d}s\right]\Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\big|\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\big|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\big|\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s + \frac{|b|\,k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s \\
&= \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{|b|\,k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\cdot\frac{T^\alpha}{\alpha} \leq \frac{kT^\alpha\Big(1+\frac{|b|}{|a+b|}\Big)}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \frac{kT^p\big(1+\frac{|b|}{|a+b|}\big)}{\Gamma(p+1)}\|x-y\|_\infty.$$

Par conséquent, de (3.7) on déduire que F est une contraction et, d'après le théorème de Banach F admet un point fixe unique, qui est une solution du problème (3.1)–(3.2). □

Théorème 3.2. [1]

Supposons que

(H2) *la fonction* $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*

(H3) *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que* $|f(t,u)| \leq M$ *pour tout* $t \in I$, *et tout* $u \in \mathbb{R}$.

Alors, le problème (3.1)–(3.2) *admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F défini par (3.8) admet un point fixe. La démonstration se fait en quatre étapes.

Étape 1 : F est continue.

Soit (y_n) une suite convergente dans $C([0,T],\mathbb{R})$ vers une limite y.

Pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Big(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)) \Big) \mathrm{d}s \\
&\qquad - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \Big(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)) \Big) \mathrm{d}s \right] \Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big| f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)) \big| \mathrm{d}s \\
&\qquad + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \big| f(s,y_{(}s)) - f(s,y(s)) \big| \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{\|f(\cdot,y_n(\cdot)) - f(\cdot,y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \\
&\qquad + \frac{|b| \, \|f(\cdot,y_n(\cdot)) - f(\cdot,y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \\
&= \frac{\|f(\cdot,y_n(\cdot)) - f(\cdot,y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{|b| \, \|f(\cdot,y_n(\cdot)) - f(\cdot,y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \cdot \frac{T^\alpha}{\alpha} \\
&\leq \frac{T^\alpha \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \Big)}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(\cdot,y_n(\cdot)) - f(\cdot,y(\cdot))\|_\infty .
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, on obtient

$$\|F(y_n) - F(y)\| \leq \frac{T^\alpha \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \Big)}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où la continuité de F.

Étape 2 : L'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $C([0,T],\mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe une constante positive ℓ telle que, pour tout $y \in B_{\eta^*} = \{y \in C([0,T],\mathbb{R} : \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$ on a $\|F(y)\|_\infty \leq \ell$.

Par (H3) on a, pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))| \mathrm{d}s \\
&\qquad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))| \mathrm{d}s + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s + \frac{|b|M}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} .
\end{aligned}$$

En prenant

$$\ell = \frac{MT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)+\frac{|c|}{|a+b|}\,,$$

on obtient $\|F(y)\|_{\infty} \leq \ell$. C'est-à-dire $F(B_{\eta^*})$ est borné.

Étape 3 : L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinu de $C([0,T],\mathbb{R})$.

Soient $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, B_{η^*} un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ comme dans l'étape 2, et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2)-F(y)(t_1)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_1}\Big((t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\Big)f(s,y(s))\mathrm{d}s\right. \\
&\quad \left. +\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{t_1}\Big((t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}\Big)\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\right) \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\Big((t_2-t_1)^{\alpha}+t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}+(t_2-t_1)^{\alpha}\Big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^\alpha - t_2^\alpha).$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où $F(B_{\eta^*})$ est équicontinu.

D'après les étape 1–3 et le théorème d'Ascoli-Arzélà, $F(B_{\eta^*})$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*}, c'est à dire F est complètement continu. Par conséquent $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Étape 4 : Maintenant il reste à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ pour certains } 0 < \lambda < 1\},$$

est borné.

Soit $y \in \mathcal{E}$, alors $y = \lambda F(y)$ pour certains $0 < \lambda < 1$. Donc, pour tout $t \in I$ on a

$$y(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\mathrm{d}s - \frac{b}{a+b}\Big(\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\mathrm{d}s - c\Big)\right).$$

D'après (H3), pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\mathrm{d}s + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\le \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s + \frac{|b|M}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\le \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(y)\|_\infty \le \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) + \frac{|c|}{|a+b|} := \frac{R}{\lambda},$$

d'où $\|y\|_\infty \le R$, ce qui montre que $\mathcal{E}$ est borné.

Comme une conséquence du théorème du point fixe de Schaefer, on déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (3.1)–(3.2). □

3.1.2 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant

$$ {}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^{t})(1+|y(t)|)}\,, \quad t \in I = [0,1],\, 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.9}$$

$$ y(0) + y(1) = 0. \tag{3.10}$$

Posons

$$ f(t,x) = \frac{e^{-t}x}{(9+e^{t})(1+x)}\,, \quad (t,x) \in I \times [0,\infty[. $$

Soit $x, y \in [0,\infty[$ et $t \in I$. Alors on a

$$ \begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}\left|\frac{x}{(1+x)} - \frac{y}{(1+y)}\right| \\ &= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^{t})(1+x)(1+y)} \\ &\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}|x-y| \\ &\leq \frac{1}{10}|x-y|. \end{aligned} $$

Alors la condition (H1) est vérifiée avec $k = \frac{1}{10}$. On doit vérifier que la condition (3.7) est satisfaite pour des valeurs appropriée de $\alpha \in]0,1]$ avec $a = b = T = 1$.

En effet

$$ \frac{3k}{2\Gamma(\alpha+1)} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > \frac{3k}{2} = 0,15. \tag{3.11}$$

Alors, d'après le Théorème 3.1, le problème (3.9)–(3.10) a une seule solution sur $[0,1]$ pour les valeurs de α satisfaire (3.11).

3.2 Problèmes aux limites avec des conditions non locales

Dans cette section on présente quelques résultats d'existence et d'unicité des solution du problème aux limites non local suivant

$$ {}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = f(t,y(t))\,, \quad \forall t \in I = [0,T],\, 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.12}$$

$$ y(0) + g(y) = y_0, \tag{3.13}$$

où ${}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de caputo, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

3.2.1 Existence des solutions

Definition 3.2. *Une fonction* $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ *est dite solution de* (3.12)–(3.13) *si elle satisfait l'équation* (3.12) *sur* I *et la condition* (3.13).

Nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H4) Il existe une constante $\overline{M} > 0$ telle que

$$|g(y)| \leq \overline{M} \quad \text{pour tout } y \in C([0,T], \mathbb{R}).$$

(H5) Il existe une constante $\overline{k}$ telle que

$$|g(y) - g(\overline{y})| \leq \overline{k}|y - \overline{y}| \quad \text{pour tout } y, \overline{y} \in C([0,T], \mathbb{R}).$$

Théorème 3.3. [1]

Supposons que (H1), (H2), (H5) sont satisfaites. Si

$$\overline{k} + \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{3.14}$$

alors, le problème non local (3.12)–(3.13) *admet une solution unique sur* $[0,T]$.

Preuve. On transforme le problème (3.12)–(3.13) en un problème du point fixe. Considérons l'opérateur

$$\widetilde{F} : C([0,T], \mathbb{R}) \to C([0,T], \mathbb{R}),$$

définie par

$$\widetilde{F}(y)(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \mathrm{d}s. \tag{3.15}$$

Il est clair, que les points fixes de l'opérateur $\widetilde{F}$ sont les solutions du problème (3.12)–(3.13).

Pour montrer que $\widetilde{F}$ admet un point fixe, il suffit de montrer que $\widetilde{F}$ est une contraction.

Soient $x, y \in C([0,T], \mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned}
|\widetilde{F}(x)(t) - \widetilde{F}(y)(t)| &= \left| g(y) - g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big(f(s, x(x)) - f(s, y(s)) \big) \mathrm{d}s \right| \\
&\leq |g(x) - g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big| f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \big| \mathrm{d}s \\
&\leq \overline{k}\|x - y\|_\infty + \frac{k\,\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \\
&= \overline{k}\|x - y\|_\infty + \frac{k\,\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \\
&\leq \left(\overline{k} + \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \|x - y\|_\infty.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(y)\|_\infty \leq \left(\overline{k}+\frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\|x-y\|_\infty.$$

En vertu de (3.14), on déduire que $\widetilde{F}$ est une contraction et d'après le théorème de Banach, $\widetilde{F}$ admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.12)–(3.13). □

Maintenant nous donnons un résultat d'existence basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 3.4. [1]
Supposons que (H1)–(H5) sont satisfaites. Alors, le problème (3.12)–(3.13) *admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que $\widetilde{F}$ définie par (3.15) admet au moins un point fixe sur $[0,T]$. La démonstration se fait en quatre étapes.

Étape 1 : $\widetilde{F}$ est continu.

Soit (y_n) une suite convergente dans $C([0,T],\mathbb{R})$ vers une limite y.

Pour tout $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}
|\widetilde{F}(y_n)(t)-\widetilde{F}(y)(t)| &= \left|g(y)-g(y_n)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Big(f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\Big)\mathrm{d}s\right| \\
&\leq |g(y_n)-g(y)|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|\mathrm{d}s \\
&\leq \overline{k}|y_n-y|+\frac{\|f(\cdot,y_n(\cdot))-f(\cdot,y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s \\
&= \overline{k}|y_n-y|+\frac{\|f(\cdot,y_n(\cdot))-f(\cdot,y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{t^\alpha}{\alpha} \\
&\leq \overline{k}|y_n-y|+\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(\cdot,y_n(\cdot))-f(\cdot,y(\cdot))\|_\infty.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, on obtient

$$\|\widetilde{F}(y_n)-\widetilde{F}(y)\| \leq \overline{k}\|y_n-y\|+\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(\cdot,y_n(\cdot))-f(\cdot,y(\cdot))\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où la continuité de $\widetilde{F}$.

Étape 2 : $\widetilde{F}(B_{\eta*})$ est borné.

Pour tout $t\in[0,T]$, on a

$$|\widetilde{F}(y)(t)| \leq |y_0|+|g(y)|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned}
&\leq |y_0| + \overline{M} + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \\
&= |y_0| + \overline{M} + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} \\
&\leq |y_0| + \overline{M} + \frac{MT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} .
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\widetilde{F}(y)\|_{\infty} \leq |y_0| + \overline{M} + \frac{MT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} ,$$

et par suite $\widetilde{F}(B_{\eta*})$ est borné.

Étape 3 : L'image de tout borné par $\widetilde{F}$ est un ensemble équicontinu de $C([0,T],\mathbb{R})$.

Soient $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$ et soit $y \in B_{\eta*}$. Alors

$$|\widetilde{F}(y)(t_2) - \widetilde{F}(y)(t_1)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s,y(s)) \mathrm{d}s - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s,y(s)) \mathrm{d}s \right| .$$

Et comme l'étape 3 de la démonstration du Théorème (3.2), $\widetilde{F}$ est équicontinu.

Par un raisonnement pareil, $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Étape 4 : Il reste à montrer que l'ensemble

$$\overline{\mathcal{E}} = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}) : y = \lambda \overline{F}(y) \text{ pour certains } 0 < \lambda < 1\},$$

est borné.

Soit $y \in \overline{\mathcal{E}}$, alors $y = \lambda \overline{F}(y)$ pour certains $0 < \lambda < 1$. Donc, pour tout $t \in I$ on a

$$y(t) = \lambda \left(y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s)) \mathrm{d}s \right) .$$

D'après (H3), pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned}
|\widetilde{F}(y)(t)| &\leq |y_0| + |g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))| \mathrm{d}s \\
&\leq |y_0| + \overline{M} + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \\
&= |y_0| + \overline{M} + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} \\
&\leq |y_0| + \overline{M} + \frac{MT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} .
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\widetilde{F}(y)\|_\infty \leq |y_0| + \overline{M} + \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} := \frac{\overline{R}}{\lambda},$$

d'où $\|y\|_\infty \leq \overline{R}$, ce qui montre que $\overline{\mathcal{E}}$ est borné.

Comme une conséquence du théorème du point fixe de Schaefer, on déduit que $\widetilde{F}$ admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (3.12)–(3.13). □

3.3 Problèmes aux limites avec des conditions intégrales

Cette section est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions intégrales de la forme suivante :

$$^{C}\mathrm{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in I = [0,T],\ \alpha \in]0,1], \tag{3.16}$$

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s)\mathrm{d}s = y(T), \tag{3.17}$$

où $^{C}\mathrm{D}^\alpha$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et $\mu \in \mathbb{R}^*$.

Nous consacrons la première section à l'existence des solutions du problème (3.16)–(3.17) qui est basé sur le théorème du point fixe de Banach et la deuxième section sera réservée à des exemples illustrant l'applicabilité des conditions imposées.

Les résultats de ce chapitre s'inspirent des travaux de Benchohra et Ouaar [...].

3.3.1 Existence des solutions

Nous commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (3.16)–(3.17).

Definition 3.3. *Une fonction $y \in C(I, \mathbb{R})$ est dite une solution de* (3.16)–(3.17) *si elle satisfait l'équation $^{C}\mathrm{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ sur I, et la condition $y(0) + \mu \int_0^T y(s)\mathrm{d}s = y(T)$.*

Pour l'existence de la solution du problème (3.16)–(3.17) nous avons besoin des lemmes suivant.

Lemme 3.3. [3]
Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielles $^{C}\mathrm{D}^\alpha h(t) = 0$ admet les solutions

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1},\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1,\ n = [\alpha] + 1.$$

Lemme 3.4. [3]

Soit $\alpha > 0$, alors

$$\mathrm{I}^{\alpha}\, {}^{C}\mathrm{D}^{\alpha} h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1};$$

pour $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 3.5. [3]

Soit $0 < \alpha \leqslant 1$ et soit $h \in C(I, \mathbb{R})$ une fonction donnée. Alors le problèmes aux limites

$$ {}^{C}\mathrm{D}^{\alpha} y(t) = h(t), \quad t \in I, \tag{3.18}$$

$$ y(0) + \mu \int_0^T y(s) \mathrm{d}s = y(T), \quad \mu \in \mathbb{R}^*, \tag{3.19}$$

admet une solution unique donnée par

$$ y(t) = \int_0^T G(t, s) h(s) \mathrm{d}s, \tag{3.20}$$

où $G(\cdot, \cdot)$ est la fonction de Green donnée par

$$ G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{-(T-s)^{\alpha} + \alpha T (t-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)}, & si\ 0 \leqslant s < t, \\ \dfrac{-(T-s)^{\alpha}}{T\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)}, & si\ t \leqslant s < T. \end{cases} \tag{3.21}$$

Preuve. Par le Lemme 3.4, on peut réduire le problème (3.18)–(3.19) en une équation intégrale équivalente

$$\begin{aligned} y(t) &= I^{\alpha} h(t) - c_0 \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) \mathrm{d}s - c_0, \end{aligned}$$

pour une constante $c_0 \in \mathbb{R}$.

En utilisant le théorème de Fubini, on a par une intégration

$$\begin{aligned} \int_0^T y(s) \mathrm{d}s &= \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau - c_0 \right) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^T \left(\int_{\tau}^T \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}s \right) h(\tau) \mathrm{d}\tau - c_0 T \\ &= \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau) \mathrm{d}\tau - c_0 T. \end{aligned}$$

En appliquant la condition intégrale (3.19), on a

$$\begin{aligned} y(0) &= -c_0, \\ y(T) &= \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) \mathrm{d}s - c_0. \end{aligned}$$

Il reste à trouver c_0. On a, d'après (3.19)

$$y(0)+\mu\int_0^T y(s)\mathrm{d}s = y(T),$$

c'est à dire

$$-c_0+\mu\int_0^T y(s)\mathrm{d}s = \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)\mathrm{d}s - c_0,$$
$$\int_0^T y(s)ds = \frac{1}{\mu}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)\mathrm{d}s,$$

donc

$$\frac{1}{\mu}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)\mathrm{d}s = \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\alpha\Gamma(\alpha)}h(s)\mathrm{d}s - c_0T,$$
$$c_0 = \frac{1}{T}\left(\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)}h(s)\mathrm{d}s + \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}h(s)\mathrm{d}s\right).$$

Par suite, la solution unique de (3.18)–(3.19) est donnée par

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)h(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{T}\int_0^t\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)h(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{T}\int_t^T\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)h(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t\left(\frac{T\alpha(t-s)^{1-\alpha}}{T\Gamma(\alpha)} - \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)}\right)h(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_t^T\left(\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{T\mu\Gamma(\alpha)} - \frac{(T-s)^{\aleph-1}}{T\Gamma(\alpha+1)}\right)h(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^T G(t,s)h(s)\mathrm{d}s. \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque 3.1. *La fonction* $t\mapsto\int_0^T|G(t,s)h(s)|\mathrm{d}s$ *est continue sur* I *et est donc bornée. Soit*

$$\widehat{G} = \sup\left\{\int_0^T |G(t,s)|\mathrm{d}s,\ t\in I\right\}.$$

Notre premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 3.5. [3]

Supposons que

(H1) *Il existe un* $k>0$*, tel que*

$$|f(t,u)-f(t,v)| \leqslant |u-v|,\ \textit{pour tout } t\in I,\ \textit{ et } u,v\in\mathbb{R}.$$

Si

$$k\widehat{G} < 1, \tag{3.22}$$

alors, il existe une solution unique pour le problème aux limites (3.16)–(3.17).

Preuve. Considérons l'opérateur $N : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ définie par

$$N(y)(t) = \int_0^T G(t,s) f(s, y(s)) \mathrm{d}s,$$

où $G(\cdot, \cdot)$ est la fonction de Green donnée par (3.21).

D'après le Lemme 3.5 les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problèmes (3.16)–(3.17).

On doit montrer que $N(I, \mathbb{R})$ alors, pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned}
|N(x)(t) - N(y)(t)| &= \left| \int_0^T G(t,s)\big(f(s, x(s)) - f(s, y(s))\big) \mathrm{d}s \right| \\
&\leqslant \int_0^T |G(t,s)| \cdot |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \mathrm{d}s \\
&\leqslant k\|x - y\|_\infty \int_0^T |G(t,s)| \mathrm{d}s \\
&\leqslant k\widehat{G}\|x - y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\|N(x) - N(y)\|_\infty \leqslant L\|x - y\|_\infty \ ,$$

où $L = k\widehat{G} < 1$. Ce qui achève la démonstration. □

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 3.6. [3]

Supposons que

(C1) *La fonction* $f : I \times \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ *est continue,*

(C2) *Ils existent* $\rho \in C(I \times \mathbb{R}^+)$ *et* $\psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ *continues et non décroissantes telles que*

$$|f(t,s)| \leqslant \rho(t)\psi(|u|), \ \textit{pour tout } t \in I \ \textit{et } u \in \mathbb{R},$$

(C3) *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$\frac{M}{\rho^* \psi(M) \widehat{G}} > 1, \tag{3.23}$$

où $\rho^* = \sup\{\rho(s), s \in I\}$.

Alors, le problème (3.16)–(3.17) *admet au moins une solution.*

Preuve. Soit :

$$D = \{y \in C(I,\mathbb{R}),\ \|y\|_\infty \leqslant M\},$$

où M est la constante donnée par (C3).

D est un sous-ensemble fermé et convexe de $C(I,\mathbb{R})$. Nous allons montrer que N satisfait les conditions du théorème du point fixe de Schauder.

Étape 1 : N est continu.

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $C(I,\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}|N(y_n)(t) - N(y)(t)| &= \left|\int_0^T G(t,s)\big(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\big)\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_0^T |G(t,s)| \cdot |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Puisque f est continue, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\|N(y_n) - N(y)\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Étape 2 : $N(D)$ est un ensemble borné de $C(I,\mathbb{R})$.

Soit $y \in D$; alors pour chaque $t \in I$, C(2) implique

$$\begin{aligned}N(y)(t) &= \left|\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_0^T |G(t,s)| \cdot |f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \rho(t)\psi(|y(t)|)\int_0^T |G(t,s)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \rho^*(t)\psi(\|y\|)\int_0^T |G(t,s)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Donc

$$\|N(y)\|_\infty \leq \rho^*(t)\psi(M)\widehat{G} = \ell.$$

Étape 3 : $N(D)$ est un ensemble équicontinue de $C(I,\mathbb{R})$.

Soient $y \in D,\ t_1, t_2 \in I,\ t_1 < t_2$. Alors

$$\begin{aligned}|N(y)(t_2) - N(y)(t_1)| &= \left|\int_0^T \big(G(t_2,s) - G(t_1,s)\big)f(s,y(s))\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)| \cdot |f(s,y(s))|\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\leqslant \rho^*\psi(\|y\|_\infty)\int_0^T |G(t_2,s)-G(t_1,s)|\mathrm{d}s.$$

Quand $t_1 \to t_2$ Le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par le théorème d'Ascoli-Arzélà, $N(D)$ est relativement compact pour tout borné de D. Alors N est complètement continu.

Étape 4 : $N(D)$ est un sous ensemble de D.

Soit $y \in D$. On va montrer que $N(y) \in D$. Pour chaque $t \in I$ on a

$$\begin{aligned}|N(y)(t)| &= \left|\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_0^T |G(t,s)|\cdot|f(s,y(s))|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \rho^*\psi(\|y\|_\infty)\int_0^T |G(t,s)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Alors

$$\|N(y)\|_\infty \leqslant \rho^*\psi(\|y\|_\infty)\widehat{G}.$$

Par (3.23) on a : $\|N(y)\|_\infty \leqslant M$.

Par suite, on déduit que N admet un point fixe qui est une solution du problème aux limites (3.16)–(3.17). □

3.3.2 Exemple

Considérons le problème aux limites

$$^C\mathrm{D}^\alpha y(t) = f(t,y(t)),\ t \in I = [0,1],\ \alpha \in]0,1], \tag{3.24}$$

$$y(0) + \int_0^1 y(s)\mathrm{d}s = y(1), \tag{3.25}$$

où

$$f(t,y(t)) = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}x\ , \quad (t,x) \in I\times]0,+\infty[.$$

Soit $x, y \in [0,+\infty[$ et $t \in I$. Alors on a

$$\begin{aligned}|f(t,x)-f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}|x-y| \\ &\leqslant \frac{1}{20}|x-y|.\end{aligned}$$

Alors la condition (H1) est vérifiée avec $k = \frac{1}{20}$.

D'après (3.21) G est donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \dfrac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } 0 \leqslant s < t, \\ \dfrac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } t \leqslant s < 1. \end{cases} \tag{3.26}$$

D'après (3.26) on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |G(t,s)|\mathrm{d}s &= \int_0^t |G(t,s)|\mathrm{d}s + \int_t^1 |G(t,s)|\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \left| \frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_t^1 \left| \frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^t \left(\frac{(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_t^t \left(\frac{(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \mathrm{d}s \\
&= \left[\frac{-(1-s)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \right]_0^t + \left[\frac{-(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]_0^t + \left[\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]_0^t \\
&\quad + \left[\frac{-(1-s)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \right]_t^1 + \left[\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]_t^1 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{1+t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\widehat{G} \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Alors la condition (3.22) est satisfaite car $\widehat{G}k < 1$ pour tout $\alpha \in]0,1]$. Alors d'après le Théorème 3.5, le problème (3.24)–(3.25) admet une unique solution sur $[0,1]$.

3.4 Problèmes aux limites avec retard infini

Cette section est consacré à l'étude de l'existence des solutions des problèmes de valeurs initiales pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec retard infini de la forme

$$^{RL}\mathrm{D}^{\alpha} y(t) = f(t, y_t), \ \forall t \in I = [0,T], \ \alpha \in]0,1], \tag{3.27}$$

$$y(t) = \phi(t), \ t \in]-\infty, 0], \tag{3.28}$$

où ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Riemann-Liouville, $f : I \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, $\phi \in B$, $\phi(0) = 0$. B s'appelle l'espace de phase qui sera défini plus tard.

Pour toute fonction y définie sur $]-\infty, T]$, et pour tout $t \in I$ nous désignons par y_t les éléments de B définis par

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \ \theta \in]-\infty, 0].$$

Ici $y_t(\cdot)$ représente l'historique de l'état depuis le temps $-\infty$ jusqu'à l'instant t.

Dans cette section, l'espace d'état $(B, \|\cdot\|_B)$ est un espace linéaire semi-normé des fonctions définies sur $]-\infty, 0]$ dans $\mathbb{R}$, et vérifie les axiomes suivants :

(A) Si $y :]-\infty, T] \to \mathbb{R}$, et $y_0 \in B$, alors pour tout $t \in [0, T]$ les conditions suivants sont vérifiées
  i) y_t est dans B,
  ii) $\|y_t\|_B \leq K(t) \sup\{|y(s)| : 0 \leq s \leq t\} + M(t)\|y_0\|_B$,
  iii) $|y(t)| \leq H\|y_t\|_B$,
  où $H \geq 0$ est une constante, $K : [0, T] \to [0, \infty[$ est continue, $M : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est localement bornée et H, K, M sont indépendantes de $y(\cdot)$.

(A1) Pour la fonction $y(\cdot)$ dans (A), y_t est une fonction continue sur $[0, T]$.

(A2) L'espace B est complet.

3.4.1 Existence des solutions

On définit l'espace

$$\Omega = \left\{ y :]-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } y|_{]-\infty,0]} \in B \text{ et } y|_{]0,T]} \text{ est continu} \right\}.$$

Definition 3.4. *Une fonction $y \in \Omega$ est dite solution de* (3.27)–(3.28) *si elle satisfait l'équation ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y_t)$ sur I, et la condition $y(t) = \phi(t)$ sur $]-\infty, 0]$.*

Pour l'existence de la solution du problème (3.27)–(3.28), nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.6. [2]

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et soit $h :]0, T] \to \mathbb{R}$ continue et $\lim_{t \to 0^+} h(t) = h(0^+) \in \mathbb{R}$. Alors y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} h(s) \mathrm{d}s,$$

si, et seulement si, y est une solution du problème fractionnaire de valeur initiale

$$^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = h(t),\ \forall t \in I =]0,T],\ 0 < \alpha \leq 1,$$
$$y(0) = 0.$$

Notre premier résultat est basé sur le théorème de contraction de Banach.

Théorème 3.7. [2]

Soit $f : I \times B \to \mathbb{R}$. Supposons que

(H) *Il existe $\ell > 0$ telle que*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq \ell \parallel u - v \parallel_B,\ \textit{pour } t \in I \textit{ et tout } u, v \in B.$$

Si $\frac{T^{\alpha}K_T\ell}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, où $K_T = \sup\{|\ K(t)\ | : t \in [0,T]\}$, alors le problème (3.27)–(3.28) *admet une solution unique sur $]-\infty, T]$.*

Preuve. On va transformer le problème (3.27)–(3.28) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $A : \Omega \to \Omega$ défini par

$$A(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in]-\infty, 0], \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\mathrm{d}s, & t \in [0,T]. \end{cases}$$

Soit $x(\cdot) :]-\infty, T] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [0,T], \\ \phi(t), & \text{si } t \in]-\infty, 0]. \end{cases}$$

Alors $x_0 = \phi$.

Pour tout $z \in C([0,T], \mathbb{R})$ avec $z(0) = 0$, on note $\bar{z}$ la fonction définie par

$$\bar{z} = \begin{cases} z(t), & \text{si } t \in [0,T], \\ 0, & \text{si } t \in]-\infty, 0]. \end{cases}$$

Si $y(\cdot)$ vérifie l'équation intégrale

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s)\mathrm{d}s,$$

on peut décomposer $y(\cdot)$ à $y(t) = \bar{z}(t) + x(t)$, $0 \leq t \leq T$, ce qui implique $y_t = \bar{z}_t + x_t$, pour tout $0 \leq t \leq T$, et la fonction $z(\cdot)$ vérifie

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, \bar{z}_s + x_s)\mathrm{d}s.$$

Soit l'ensemble

$$C_0 = \{z \in C([0,T],\mathbb{R}) : z_0 = 0\},$$

et soit $\|\cdot\|_T$ la semi-norme dans C_0 définie par

$$\|z\|_T = \|z_0\|_B + \sup\{| z(t) | : 0 \leq t \leq T\} = \sup\{| z(t) | : 0 \leq t \leq T\}, z \in C_0.$$

C_0 est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|_T$.

Soit l'opérateur $P : C_0 \longrightarrow C_0$ défini par

$$P(z)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, \bar{z}_s + x_s) \mathrm{d}s\,, \quad t \in [0,T]. \tag{3.29}$$

L'opérateur A a un point fixe est équivaut à P admet un point fixe, et donc nous tournons à prouver que P a un point fixe.

On va montrer que P est une contraction. En effet, soient $z, z^* \in C_0$. Alors on a, pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|(Pz)(t) - (Pz^*)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big(f(s, \bar{z}_s + x_s) - f(s, \bar{z}^*_s + x_s)\big) \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, \bar{z}_s + x_s) - f(s, \bar{z}^*_s + x_s)| \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \ell \|\bar{z}_s - \bar{z}^*_s\|_B \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \ell K_T \sup_{s\in[0,t]} \|z(s) - z^*(s)\| \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{K_T}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \ell \ \mathrm{d}s \ \|z - z^*\|_T \\
&= \frac{t^\alpha K_T \ell}{\Gamma(\alpha+1)} \|z - z^*\|_T.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|P(z) - P(z^*)\|_T \leq \frac{T^\alpha K_T \ell}{\Gamma(\alpha+1)} \|z - z^*\|_T,$$

d'où P est une contraction. Donc P admet un point fixe unique d'après le théorème de la contraction de Banach. $\square$

Maintenant nous donnons un résultat d'existence basé sur l'alternative non-linéaire du théorème de Leary-Schauder. Pour cela nous donnons la généralisation suivante du lemme de Gronwall qui sera essentiel pour le résultat principal de cette section.

Lemme 3.7. [2]

Soit $v : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[$ *une fonction réelle et* $w(\cdot)$ *une fonction non négative, localement intégrable sur* $[0,T]$, *et il existe des constantes* $a > 0$ *et* $0 < p < 1$, *tels que*

$$v(t) \leq w(t) + a \int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^p} \mathrm{d}s.$$

Alors il existe une constante $K = K(p)$ *telle que*

$$v(t) \leq w(t) + Ka \int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^p} \mathrm{d}s, \quad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

Théorème 3.8. [2]

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées

(H1) f *est une fonction continue,*

(H2) *Il existe* $p, q \in C(I, \mathbb{R}^+)$ *tels que*

$$|f(t,u)| \leq p(t) + q(t)\|u\|_B \textit{ pour tout } i \in I, \ u \in B \textit{ et } \|I^\alpha p\|_\infty < +\infty.$$

Alors, le problème (3.27)–(3.28) *admet au moins une solution sur* $]-\infty, T]$.

Preuve. Soit $P : C_0 \to C_0$ l'opérateur défini dans (3.29), on va montrer que P est continu et complètement continu.

Étape 1 : P est continu.

Soit z_n une suite tel que $z_n \to z$ dans C_0. Alors

$$\begin{aligned}
|P(z_n)(t) - P(z)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big(f(s, \bar{z}_{n_s} + x_s) - f(s, \bar{z}_s + x_s) \big) \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big| f(s, \bar{z}_{n_s} + x_s) - f(s, \bar{z}_s + x_s) \big| \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(\cdot, \bar{z}_n(\cdot) + x(\cdot)) - f(\cdot, \bar{z}(\cdot) + x(\cdot))\|_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \\
&= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(\cdot, \bar{z}_n(\cdot) + x(\cdot)) - f(\cdot, \bar{z}(\cdot) + x(\cdot))\|_\infty \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(\cdot, \bar{z}_n(\cdot) + x(\cdot)) - f(\cdot, \bar{z}(\cdot) + x(\cdot))\|_\infty.
\end{aligned}$$

Comme f est continue, nous avons

$$\|P(z_n) - P(z)\|_T \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(\cdot, \bar{z}_n(\cdot) + x(\cdot)) - f(\cdot, \bar{z}(\cdot) + x(\cdot))\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Étape 2 : L'image de tout borné par P est un ensemble borné de C_0.

Il faut montrer que pour toute $\eta > 0$, il existe une constante ℓ tel que pour chaque $z \in \mathcal{B}_\eta = \{z \in C_0 : \|z\|_T \leq \eta\}$ on a $\|P(z)\|_\infty \leq \ell$.

Soit $z \in \mathcal{B}_\eta$. Puisque f est une fonction continue, nous avons pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|P(z)(t)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\bar{z}_s + x_s)\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big|f(s,\bar{z}_s + x_s)\big|\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Big(p(s) + q(s)\|\bar{z}_s + x_s\|_B\Big)\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\|\bar{z}_s + x_s\|_B\Big)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s \\
&= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\|\bar{z}_s + x_s\|_B\Big) \\
&\leq \frac{T^\alpha\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\|\bar{z}_s + x_s\|_B \\
&\leq \frac{T^\alpha\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\big(\|\bar{z}_s\|_B + \|x_s\|_B\big).
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|\bar{z}_s\|_B + \|x_s\|_B &\leq K(s)\sup\{|z(r)| : 0 \leq r \leq s\} + M(s)\|\phi\|_B \\
&\leq K_T\|z\|_T + M_T\|\phi\|_B \\
&\leq K_T\eta + M_T\|\phi\|_B\,,
\end{aligned}$$

où

$$M_T = \sup\{|M(t)| : 0 \leq t \leq T\}.$$

Donc

$$|P(z)(t)| \leq \frac{T^\alpha\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\big(K_T\eta + M_T\|\phi\|_B\big) := \ell.$$

D'où $\|P(z)\|_\infty \leq \ell$.

Étape 3 : L'image de tout borné par P est un ensemble équicontinu de C_0.

Soit $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$ et soit $\mathcal{B}_\eta$ un ensemble borné de C_0 comme dans l'étape 2. Soit $z \in \mathcal{B}_\eta$. Alors, pour chaque $t \in [0,T]$ on a

$$\begin{aligned}
|P(z)(t_2) - P(z)(t_1)| = \bigg|&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1} f(s,\bar{z}_s + x_s)\mathrm{d}s - \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1} f(s,\bar{z}_s + x_s)\mathrm{d}s\bigg|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, \bar{z}_s + x_s) \mathrm{d}s + \right. \\
&\quad \left. \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, \bar{z}_s + x_s) \mathrm{d}s - \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, \bar{z}_s + x_s) \mathrm{d}s \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} \big((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}\big) f(s, \bar{z}_s + x_s) \mathrm{d}s + \right. \\
&\quad \left. \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, \bar{z}_s + x_s) \mathrm{d}s \right| \\
&\le \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}\right] \mathrm{d}s + \\
&\quad \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \\
&\le \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*}{\Gamma(\alpha+1)} \big((t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha\big) + \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha \\
&\le \frac{2\big(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*\big)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha.
\end{aligned}
$$

Quand $t_1 \to t_2$ le membre droit de l'inégalité au dessus tend vers zéro.

L'équicontinuité pour les cas $t_1 < t_2 \le 0$ et $t_1 \le 0 \le t_2$ est évidente.

Comme une conséquence des étapes 1–3, avec le théorème d'Ascoli-Arzélà nous concluons que $P : C_0 \to C_0$ est continu et complètement continu.

Étape 4 : Nous montrons maintenant qu'il existe un ensemble ouvert $U \subseteq C_0$ avec $z \ne \lambda P(z)$ pour $\lambda \in]0,1[$ et $z \in \partial U$.

Soit $z \in C_0$ et $z = \lambda P(z)$ pour certain $0 < \lambda < 1$. Alors pour chaque $t \in [0,T]$ on a

$$
z(t) = \lambda \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, \bar{z}_s + x_s) \mathrm{d}s \right).
$$

Cela implique par (H2)

$$
\begin{aligned}
|z(t)| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \big(p(s) + q(s) \|\bar{z}_s + x_s\|_B\big) \mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} p(s) \mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} q(s) \|\bar{z}_s + x_s\|_B \mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} q(s) \|\bar{z}_s + x_s\|_B \mathrm{d}s + \frac{T^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}
$$

Mais

$$\begin{aligned}\|\bar{z}_s + x_s\|_B &\leq \|\bar{z}_s\|_B + \|x_s\|_B \\ &\leq K(t)\sup\{|z(s)| : 0 \leq s \leq t\} + M(t)\|z_0\|_B + \\ &\quad K(t)\sup\{|x(s)| : 0 \leq s \leq t\} + M(t)\|x_0\|_B \\ &\leq K_T\sup\{|z(s)| : 0 \leq s \leq t\} + M_T\|\phi\|_B. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Si on nomme $w(t)$ le coté droite de (3.30) on obtient

$$\|\bar{z}_s + x_s\|_B \leq w(t),$$

et par conséquent

$$|z(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}q(s)w(s)\mathrm{d}s + \frac{T^\alpha\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\ . \tag{3.31}$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus et la définition de w on trouve

$$\begin{aligned} w(t) &\leq M_T\|\phi\|_B + \frac{K_T T^\alpha\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K_T}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}q(s)w(s)\mathrm{d}s \\ &\leq M_T\|\phi\|_B + \frac{K_T T^\alpha\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K_T\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}w(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.7, il existe $K = K(\alpha)$ de sorte que nous avons

$$w(t) \leq M_T\|\phi\|_B + \frac{K_T T^\alpha\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + K(\alpha)\frac{K_T\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}R\mathrm{d}s,$$

où

$$R = M_T\|\phi\|_B + \frac{K_T T^\alpha\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\ .$$

D'où

$$\|w\|_\infty \leq R + \frac{RK(\alpha)T^\alpha K_T}{\Gamma(\alpha+1)} := \tilde{M}.$$

Alors, d'après (3.31)

$$\|z\|_\infty \leq \tilde{M}\|I^\alpha q\|_\infty + \frac{T^\alpha\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} := M^*.$$

Posons

$$U = \{z \in C_0 : \|z\|_T < M^* + 1\}.$$

$P : \overline{U} \longrightarrow C_0$ est continu et complètement continu. D'après le choix de U, il n'existe pas $z \in \partial U$ tel que $z = \lambda P(z)$, pour $\lambda \in]0, 1[$. D'après le théorème alternative non-linéaire de Leary-Schauder, on déduire que P admet un point fixe z dans U. □

3.4.2 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats. Considérons l'équation différentielle fractionnaire fonctionnelle

$$ {}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) = \frac{ce^{-\gamma t+t}\|y_t\|}{(e^t+e^{-t})(1+\|y_t)}, \quad t \in I =]-\infty, T],\ \alpha \in]0,1[\ , \tag{3.32} $$

$$ y(t) = \phi(t), \quad t \in]-\infty, 0], \tag{3.33} $$

où $c\Gamma(\alpha) = c_0 \int_0^T s^{\alpha-1}e^{-s}\mathrm{d}s$, et $c_0 > 1$ fixé.

Soit γ une constante réelle positive et

$$ B_\gamma = \{y \in C(]-\infty,0],\mathbb{R}) : \lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}y(\theta) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}. $$

La norme de B_γ est donnée par

$$ \|y\|_\gamma = \sup\{e^{\gamma\theta}|y(\theta)| : -\infty < \theta \leq 0\}. $$

Soit $y :]-\infty, T] \to \mathbb{R}$ tel que $y_0 \in B_\gamma$. Alors

$$ \lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}y_t(\theta) = \lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}y(t+\theta) = \lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma(\theta-t)}y(\theta) = e^{-\gamma t}\lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}y_0(\theta) < \infty. $$

Par conséquent $y_t \in B_\gamma$. Finalement nous prouvons que

$$ \|y_t\|_\gamma \leq K(t)\sup\{|y(s)| : 0 \leq s \leq t\} + M(t)\|y_0\|_\gamma, $$

où $K = M = 1$ et $H = 1$.

Nous avons $|y_t(\theta)| = |y(t+\theta)|$. Si $\theta + t \leq 0$, on obtient

$$ |y_t(\theta)| \leq \sup\{|y(s)| : -\infty \leq s \leq 0\}. $$

Pour $t + \theta \geq 0$, alors nous avons

$$ |y_t(\theta)| \leq \sup\{|y(s)| : 0 \leq s \leq t\}. $$

Donc pour tout $t + \theta \in [0, T]$, on a

$$ |y_t(\theta)| \leq \sup\{|y(s)| : -\infty < s \leq 0\} + \sup\{|y(s)| : 0 \leq s \leq t\}. $$

Alors

$$ \|y_t\|_\gamma \leq \|y_0\|_\gamma + \sup\{|y(s)| : 0 \leq s \leq t\}. $$

Il est clair que $(B_\gamma, \|.\|_\gamma)$ est un espace de Banach. On peut conclure que B_γ est l'espace de phase.

Posons

$$f(t,x) = \frac{e^{-\gamma t+t}x}{c(e^t+e^{-t})(1+x)}, \quad (t,x) \in [0,T] \times B_\gamma.$$

Soit $x, y \in B_\gamma$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-\gamma t+t}}{c(e^t+e^{-t})}\left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| \\
&= \frac{e^{t-\gamma t}|x-y|}{c(e^t+e^{-t})(1+x)(1+y)} \\
&\leq \frac{e^t e^{-\gamma t}|x-y|}{c(e^t+e^{-t})(1+x)(1+y)} \\
&\leq \frac{e^t|x-y|_{B_\gamma}}{c(e^t+e^{-t})} \leq \frac{1}{c}\|x-y\|_{B_\gamma}.
\end{aligned}$$

Par conséquent la condition (H) est satisfait. Il reste de vérifier que $\frac{T^\alpha K_T \ell}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$. Ici $K_T = 1$ et $\ell = 1/c$, donc on doit vérifier que $\frac{T^\alpha}{c\Gamma(\alpha+1)} < 1$. On a

$$c\Gamma(\alpha) = c_0 \int_0^T s^{\alpha-1}e^{-s}\mathrm{d}s \geq c_0 \int_0^T s^{\alpha-1}\mathrm{d}s = c_0\frac{T^\alpha}{\alpha}$$

Donc

$$\frac{c\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha} \geq c_0 \implies \frac{T^\alpha}{c\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{1}{c_0} < 1.$$

Alors d'après le Théorème 3.7 le problème (3.32)–(3.33) admet une solution unique sur $]-\infty, T]$.

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions des problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire, au sens de Caputo avec conditions locales, non locales et intégrales, et au sens de Riemann-Liouville avec retard infini.

Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Banach, Schaefer, Schauder et alternative non-linéaire de Leary-Schauder.

Bibliographie

[1] **M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas**, *boundary value problems for differential equations with fractional order*, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[2] **M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas and A. Ouahab**, *Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay*, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 1340-1350.

[3] **M. Benchohra and F.Ouaar**, *Existence results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions*, Math. Anal. Appl. 2 (2010), 7-15.

[4] **S. Dolecki**, *Analyse Fondamentale, Espaces métriques, topologiques et normés*, 2nd édition, Hermann Édition, Paris, 2013.

[5] **D. Li**, *Cours d'analyse fonctionnelle*, Ellipses Édition, 2013.

[6] **A. Granas et J. Dugundji**, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag New York, 2003.

[7] **l. Podlubny**, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, California, USA, 1999.

[8] **J-P. Ramis et A. Warusfel**, *Mathématiques Tout-en-Un pour la Licence, Niveau L2*, Dunod, Paris, 2007.

[9] , **M. Weilbeer**, *Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background*, Braunschweig Universitätsbibliothek Göttingen, 2005.

[10] **E. Zeidler**, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I : Fixed Point Theorems*, Springer-Verlag New York, 1986.