REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE JIJEL
Faculté des sciences
Département de Mathématique

N° d'ordre :
Série :

MEMOIRE
Présenté pour obtenir le diplôme de
MAGISTER
Spécialité Mathématiques
Option Analyse

Thème

Application de la Pettis intégration à la résolution de quelques problèmes d'évolution

par

IMEN BOUTANA

Soutenu le 09 / 04 / 2008 Devant le Jury

Président	A. AIBECHE	Prof.	Univ.	sétif
Rapporteur	D. AZZAM-LAOUIR	MC.	Univ.	Jijel
Examinateurs	M. YAROU	MC.	Univ.	Jijel
	T. ZERZAIHI	MC.	Univ.	Jijel
	W.CHIKOUCHE	Dr.	Univ.	Jijel

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES (LMPA)

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à **Dieu** tout puissant pour la volonté la santé et la patience qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Je remercie tout particulièrement :

Madame **Dalila Azzam-Laouir,** Maître de Conférences à l'université de Jijel de m'avoir donner le privilège de travailler sous sa direction, pour sa présence constante et pour toute son aide, Je voudrais qu'elle trouve ici tout mon respect quant à son soutien moral et scientifique.

A Monsieur **Aissa Aibeche**, Professeur à l'université de Sétif, qu'il me soit permis de le remercier d'avoir bien voulu présider le Jury de cette thèse.

A Monsieur **Mustafa Fateh Yarou**, Maître de Conférences à l'université de Jijel, A Monsieur **Tahar Zerzaihi** Maître de Conférences à l'université de Jijel, A Madame **Wided Chikouche**, Docteur à l'université de Jijel, je tiens à exprimer mes remerciements d'avoir bien voulu accepter de juger ce travail.

Mes chaleureux remerciements vont à toute **ma famille** et en particulier **mes parents**, **mes frères** et **mes sœurs**, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à tous ceux qui, directement ou indirectement, ont contribué à la réalisation de ce travail.

« Life is good only for two things, discovering mathematics and teaching mathematics »
Siméon Denis Poisson

Dédicace

je dédie ce travail

Premièrement à mes **parents**

A mes frères **Reda, Naim** et **Halim.**

A mes sœurs **Ilhem** et **Mounia.**

A mon beau frère **Mohamed.**

A mes neveux **Abderraouf** et **Badis**.

A toute **ma famille.**

A tous qui me connaissent…….

ملخص

تطبيق تكامل بيتيس في حل بعض المسائل التطويرية

يرتكز بحثنا هذا على تطبيق تكامل بيتيس في حل مسألة تطويرية. البداية كانت عبارة عن مقارنة بين تكامل بيتيس مع كل من تكامل بوخنر والتكامل الدرجي، بإبراز بعض الأمثلة عن توابع قابلة للمكاملة حسب بيتيس و لاتقبل حسب بوخنر. إضافة إلى استخراج تابع جزئي مستمر من تابع قيمه عبارة عن مجموعة في الفضاء التوابع القابلة للمكاملة حسب بيتيس $P_E^1([0,1])$. إضافة إلى برهان وجود حلول احتوائية تفاضلية (تعميم مصطلح معادلة تفاضلية في حالة توابع قيمها عبارة عن مجوعة) من الدرجة الثانية بشروط حدية عند ثلاثة قيم من الشكل $\ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t))+ H(t,u(t),\dot{u}(t))$, a.e. $t \in [0,1]$, حيث F ذو قيم محدبة نصف مستمر من الأعلى و H نصف مستمر من الأسفل، و $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t), H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$ ، حيث $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0,1] \rightrightarrows E$ قابلة للمكاملة بانتظام حسب بيتيس.

Abstract

Application of Pettis Integration to the resolution of a class of differential inclusions

The aim of this work is to present some existence solutions for differential inclusions. Firstly, we give a comparison between Pettis integration, Bochner and scalar ones. secondly, we have proved the existence of continuous selection for a multi-application with values in $P_E^1([0,1])$ which is the space of the Pettis integrable mapping defined on [0.1]. Finally we give an application of the Pettis integration to resolve a differential inclusion in Banach spaces with tree point boundary conditions of the form $\ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t))+ H(t,u(t),\dot{u}(t))$, a.e. $t \in [0,1]$, where F is a convex valued multifunction upper semi continuous on $E \times E$ and H is a lower semi continuous multifunction on $E \times E$, and the assumption that $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t), H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$, where the multifunctions $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0,1] \rightrightarrows E$ are uniformly Pettis integrables.

Résumé

Application de la Pettis intégration à la résolution de quelques problèmes d'évolution

Le but de ce travail et de présenter quelques résultats sur la Pettis-intégrabilité. Au début, on fait une comparaison entre la Pettis intégrabilité, la Bochner et la scalaire. En second lieu on construit une sélection continue d'une multi-application semi continue inférieurement, à valeurs fermées décomposables dans $P_E^1([0,1])$ (L'espace de toutes les applications Pettis intégrables définies sur [0,1] à valeurs dans E). Enfin, on donne une application de la Pettis-intégration aux inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en trois points, de la forme: $\ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t))+ H(t,u(t),\dot{u}(t))$, a.e. $t \in [0,1]$, où F est une multi-application à valeurs convexes compactes, semi continue supérieurement sur $E \times E$ et H une multi-application à valeurs non vides fermées, semi continue inférieurement sur $E \times E$, telles que $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t), H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$ avec $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0,1] \rightrightarrows E$ deux multi-applicationes mesurables scalairement Pettis uniformément intégrables.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction Générale

Les inclusions différentielles représentent un sujet beaucoup abordé ces dernières années. En effet, plusieurs problèmes de physique et d'économie aboutissent à des inclusions différentielles, d'où l'importance de cette branche en Mathématiques. L'étude revient souvent à déterminer les solutions, quand elles existent, ou à donner une étude analytique pour en dégager leurs propriétés.

La théorie de l'intégration multivoque peut être considérée comme une extension et une application de la théorie de l'intégration vectorielle. Elle soulève cependant de nouveaux problèmes bien spécifiques, tels ceux liés aux sélections. Par ailleurs, elle permet de modéliser un grand nombre de situations dans différents domaines allant de l'économie Mathématique à l'optimisation et au contrôle optimal.

Ces dernières années plusieurs auteurs se sont intéressés à l'intégrale de Pettis qui est l'une des extensions de l'intégrale de Lebesgue au cas vectoriel. Elle a été introduite par Pettis (1938) [39], et beaucoup étudiée ensuite, par Musial [38], Castaing [17] et de nombreux autres mathématiciens.

L'intégrale de Pettis est un concept plus général que celui de Bochner dans la théorie de l'intégration dans les espaces de dimension infinie, *en effet*, il est connu qu'un espace de Banach E est de dimension infinie si et seulement si il existe une application Pettis intégrable qui n'est pas Bochner intégrable.

Récemment, une attention spéciale a été donnée aux multi-applications Pettis intégrables, citons par exemple les contributions de Amrani [3], Amrani, Castaing et Valadier [4], et Castaing [17] qui traitent l'intégrale de Pettis pour des multi-applications à valeurs convexes faiblement compactes dans un espace de Banach séparable E, Voir aussi [25], [29], [34],[41] et leurs références.

Le but de ce travail est de présenter quelques résultats nouveaux dans ce domaine, se rapportant à la Pettis intégration. L'existence de sélections continues pour une muli-application à valeurs dans $\mathbf{P}^1_E([0,1])$ (L'espace de toutes les applications Pettis intégrables définies sur $[0,1]$ à valeurs dans E), et une application de la Pettis intégration à la résolution d'une classe d'inclusions différentielles avec somme de deux perturbations sont présentés dans ce mémoire.

L'étude des équations différentielles ordinaires du second ordre avec deux conditions aux limites semblent revenir à Hartman (1964). Cette étude a été généralisée par Gupta (1992), Marano (1992, 1994), Gomaa (2000), ils ont donné des résulats d'existence pour des équations et des inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en deux et trois points. Tous ces résultats ont été obtenus dans un espace de dimension finie. Azzam, Castaing et Thibault [9] ont généralisé ces résultats aux espaces de Banach séparables.

Notre mémoire se compose de quatre chapitres. Dans le premier, on donne des notions de base que nous utiliserons tout au long de ce travail.

Le chapitre 2, est consacré à l'étude de la Pettis intégration avec une comparaison avec la Bochner et la scalaire, qui coincident dans un espace de dimension finie, mais lorsque E est de dimension infinie on montre l'implication (f Bochner intégrable $\Rightarrow$ f Pettis intégrable), et par des contres exemples on montre que la réciproque est fausse, c'est à dire qu'il existe des fonctions Pettis intégrables mais non Bochner intégrables. Dans la dernière section de ce chapitre on donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction scalairement-intégrable soit Pettis intégrable.

Dans le chapitre 3, on construit une sélection continue d'une multi-application semi-continue inférieurement, à valeurs fermées décomposables dans $\mathbf{P}^1_E([0,1])$. Ce résultat généralise le théorème 1.4.2 d'existence de sélections continues de Fryskowski [27], qui est une version décomposable du théorème de sélection de Michael pour les multi-applications à valeurs dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$, semi continues inférieurement à valeurs convexes. Cependant, dans plusieurs cas, la condition de décomposabilité est un bon remplaçant de la convexité. Un ensemble décomposable a été considéré pour la première fois dans le champ d'analyse multivoque, par *Antosiewicz* et *Cellina* [5], en relation avec le problème d'existence d'une sélection continue pour une multi-application continue à valeurs non nécessairement convexes.

Le résultat de ce chapitre sera utilisé dans le chapitre 4, qui est une application de la Pettis-intégration aux inclusions différentielles du second order avec des conditions aux limites en trois points, de la forme :

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),\dot{u}(t)), & p.p.t \in [0,1], \\ u(0) = 0; \qquad u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

avec $\theta \in]0,1[$, $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs convexes compactes, Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$ et semi continue supérieurement sur $E \times E$.
$H : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées, $\mathcal{L}([0,1] \bigotimes \mathfrak{B}(E) \bigotimes \mathfrak{B}(E))$-mesurable et semi continue inférieurement sur $E \times E$, telles que $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t)$ et $H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$ pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$, avec pour tout $i = 1,2$, $\Gamma_i : [0,1] \rightrightarrows E$

est multi-application mesurable scalairement Pettis uniformément intégrable, à valeurs convexes $\|.\|$-compactes.

Le résultat de ce dernier chapitre (chapitre 4) a fait l'objet d'un article en collaboration avec D.Azzam-Laouir, paru dans Electronic Journal of Differntial Equation, Vol. 2007(2007), No. 173.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Pour élaborer notre travail, il est indispensable d'introduire tous les outils et notions de base nécessaires. *En effet*, Ce chapitre comprend les notations et les concepts de base liés à l'étude des multi-applications et des inclusions différentielles, ainsi que des résultats de l'analyse fonctionnelle que nous avons utilisé dans ce mémoire.

1.1 Notations

Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique, $\langle .,. \rangle$ leur produit de dualité, et $\|.\|$ la norme de $.E$.

On note par :

$\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E.

E_σ l'espace de Banach E muni de la topologie faible.

$\tau(E', E)$ la topologie de Mackey.

$\overline{B}_E$ la boule unité fermée de E.

$\overline{A}$ la fermeture de A (pour tout sous ensemble A de E).

$co(A)$ l'enveloppe convexe de A.

$\delta(.,A)$ la fonction indicatrice de A, definie par

$$\delta(x,A) = \begin{cases} 0, & si \quad x \in A; \\ +\infty, & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

$\delta^*(.,A)$ la fonction polaire de $\delta(.,A)$, appelée aussi fonction support de A, définie sur E' par

$$\delta^*(x',A) = \sup_{x\in A}\langle x',x\rangle, \quad \forall x' \in E'.$$

1_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in A; \\ 0, & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

$\mathcal{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur I (I un ensemble compact de $\mathbb{R}$).

μ ou dt la mesure de Lebesgue.

$epi(f)$ épigraphe de f définie par

$$epi(f) = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R}; \;\; f(x) \leq r\}$$

$\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties fermées d'un ensemble X.

$\mathcal{P}_k(X)$ l'ensemble des parties compactes de X.

$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ l'ensemble des points d'accumulation des suites (x_n) telles que $x_n \in A_n$.

$D(F)$ le domaine de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$, donné par

$$D(F) := Dom(F) = \{x \in X; \;\; F(x) \neq \emptyset\}$$

$gr(F)$ le graphe de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$,donnée par

$$gr(F) = \{(x,y) \in X \times Y; \;\; x \in D(F), \;\; y \in F(x)\}$$

$Im(F)$ l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$, donné par

$$Im(F) = \bigcup_{x\in D(F)} F(x)$$

S_Γ la famille des sélections mesurables de la multi-application Γ.

S^1_Γ la famille des sélections Bochner intégrables de la multi-application Γ.

S^{Pe}_Γ la famille des sélections Pettis intégrables de la multi-application Γ.

$\mathbf{L}^1_E(I)$ l'espace des applications Lebesgue Bochner-intégrables définies sur I à valeurs dans l'espace de Banach E.

$\mathbf{C}_E([0,1])$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $f:[0,1]\to E$, muni de la norme sup.

C_0 l'espace de toutes les suites convergentes vers 0.

$\mathbf{P}^1_E([0,1])$ l'espace de toutes les applications Pettis intégrables définies sur $[0,1]$ à valeurs dans E.

$W^{2,1}_{B,E}([0,1])$ l'espace de toutes les applications $u\in \mathbf{C}_E([0,1])$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$.

$W^{2,1}_{P,E}([0,1])$ l'espace de toutes les applications $u\in \mathbf{C}_E([0,1])$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $\mathbf{P}^1_E([0,1])$.

1.2 Quelques notions de mesurabilité

Définition 1.2.1 *Soient X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Σ est dite une tribu sur X si :*
1) $\emptyset\in\Sigma$,
2) $A\in\Sigma\Rightarrow X\setminus A\in\Sigma$,
3) $A_n\in\Sigma, \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow \bigcup_n A_n\in\Sigma$
*Le couple (X,Σ) est appelé **espace mesurable** .*

Définition 1.2.2 *Soient (X_1,Σ_1), (X_2,Σ_2) deux espaces mesurables. On dit que $g: X_1\longrightarrow X_2$ est (Σ_1,Σ_2)-**mesurable** si pour tout $A\in\Sigma_2, g^{-1}(A)\in\Sigma_1$.*

Soit E un espace de Banach, On note par :
*a) $\mathfrak{B}(E)$ la tribu **Borélienne** (la tribu engendrée par la Topologie forte de E).*

Si $f : (X, \Sigma) \longrightarrow (E, \mathfrak{B}(E))$ est $(\Sigma, \mathfrak{B}(E))$-mesurable on dit qu'elle est ***fortement mesurable.***

b) par $\Theta(E)$ on note la tribu ***Cylindrique*** *(la tribu engendrée par la topologie faible sur E $\sigma(E, E')$).*

c'est la plus petite tribu sur E rendant mesurables les fonctionnelles $\varphi \in E'$.

Si $f : (X, \Sigma) \longrightarrow (E, \Theta(E))$ est $(\Sigma, \Theta(E))$-mesurable, on dit qu'elle est ***faiblement mesurable.***

Proposition 1.2.1 *Si E est* ***séparable,*** *les tribus Borélienne et Cylindrique coincident.*

Démonstration.

On a toujours $\Theta(E) \subset \mathfrak{B}(E)$ car tout ouvert faible est un ouvert fort.

Pour établir la deuxième inclusion, on montre que tout ouvert fort appartient à $\Theta(E)$.

Il suffit de montrer que :

a) Tout ouvert fort de E est réunion **dénombrable** de boules ouvertes.

b) Toute **boule** ouverte appartient à $\Theta(E)$.

Preuve de a).

Soit W un ouvert fort de E, comme il hérite de la séparabilité de E, il existe une suite $\{x_i, i \in \mathbf{N}\}$ dense dans W.

Posons

$$V := \bigcup_{i \in \mathbf{N}, r \in \mathbf{Q}} B(x_i, r)$$

$B(x_i, r) \subset W$ où $B(x_i, r) := \{x \in X; \|x - x_i\| < r\}$, et montrons que $W = V$.

Par construction V est inclus dans W. pour montrer la deuxième inclusion, considèrons un élément x quelconque de W,

puisque W est ouvert, il existe un rationnel $r > 0$ suffisamment petit tel que $B(x, 2r) \subset W$.

Par la densité de la suite $\{x_i, i \in \mathbf{N}\}$ dans W, on peut trouver un x_{i_k} tel que $\|x_{i_k} - x\| < r$.

D'où, $\forall y \in B(x_{i_k}, r)$ on a

$$\|y - x\| \leq \|y - x_{i_k}\| + \|x_{i_k} - x\| < 2r$$

donc $y \in B(x, 2r) \subset W$. On en déduit que $B(x_{i_k}, r) \subset W$. Comme $x \in B(x_{i_k}, r)$, ceci montre que x appartient à V. et donc $V = W$.

Preuve de b).

Il est clair qu'il suffit de montrer que la boule unité $B(0,1)$ est dans $\Theta(E)$.

On sait que si E est de dimension infinie, $B(0,1)$ **n'est pas un ouvert** de la topologie $\sigma(E, E')$.

Comme $B(0,1) = \varphi^{-1}(]-\infty, 1[)$ avec $\varphi : E \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \|x\|$, il nous suffit en fait de montrer que φ est $(\Theta(E), \mathfrak{B}(\mathbf{R}))$-mesurable.

Par séparabilité de E, on dispose d'une suit $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$ dense dans E. On peut alors lui associer une suite $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ dans E' telle que pour tout i, $\|f_i\|_{E'} = 1$ et $f_i(x_i) = \|x_i\|$ (l'existence de cette suite est donnée par le *théorème de Hahn-banach*).

Nous allons vérifier que $\varphi = \sup_{i \in \mathbf{N}} |f_i|$, ce qui entrainera sa mesurabilité comme sup d'une famille **dénombrable** d'applications $(\Theta(X), \mathfrak{B}(\mathbf{R}))$-mesurables.

D'une part puisque les f_i sont de norme 1 dans E', on a pour tout $x \in E$, et tout $i \in \mathbb{N}$, $\|x\| \geq |f_i(x)|$ d'où $\|x\| \geq \sup_{i \in \mathbf{N}} |f_i(x)|$, autrement dit, $\varphi \geq \sup_{i \in \mathbf{N}} |f_i(x)|$.

D'autre part, pour chaque $x \in E$, il existe une sous suite $(x_{i_k})_{k \geq 1}$ convergeant fortement vers x. Cette convergence entraine celle des normes et on peut écrire :

$$\|x\|_E = \lim_{k \to +\infty} \|x_{i_k}\|_E = \lim_{k \to +\infty} f_{i_k}(x_{i_k}) = \lim_{k \to +\infty} f_{i_k}(x) \leq \sup_{i \in \mathbf{N}} |f_i(x)|$$

Pour la dernière équalité en utilise le fait que :

$$\begin{aligned} \|f_{i_k}(x_{i_k}) - f_{i_k}(x)\|_E &\leq \|f_{i_k}\|_{E'} . \|x_{i_k} - x\|_E \\ &= \|x_{i_k} - x\|_E \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

On déduit alors que $\varphi \leq \sup_{i \in \mathbf{N}} |f_i|$, finalement que $\varphi = \sup_{i \in \mathbf{N}} |f_i|$.

$\square$

Définition 1.2.3 *Soit (E, Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbf{R}}$ est une* ***mesure*** *sur E si*

1) $\nu(\emptyset) = 0$.

2) $\nu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$, *pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de Σ d'eux à d'eux disjoints.*

Le triplet (E, Σ, ν) est appelé ***espace mesuré.***

Si $\nu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, On dit que ν est une mesure positive ou que (E, Σ, ν) est un ***espace de mesure positif.***

Si $\nu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, On dit que ν est une mesure finie, où que (E, Σ, μ) est un ***espace de mesure finie.***

On dit que ν est une mesure de ***probabilité*** *si $\nu(E) = 1$.*

Définition 1.2.4 *Soit E un espace topologique séparé et ν une mesure Borélienne $(\nu : \mathfrak{B}(E) \to \overline{\mathbf{R}})$, Alors ν est dite* ***régulière*** *si pour tout $A \in \mathfrak{B}(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C est un fermé G de X, tels que : $G \subset A \subset C$ et $\nu(C \backslash G) \leq \varepsilon$.*

Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de ***Radon.***

Définition 1.2.5 *Soit (E, Σ, ν) un espace mesuré positif, soit Z un sous ensemble de X, On dit que Z est* ***ν-négligéable,*** *s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\nu(A) = 0$.*

On dit q'une propriété sur E est vraie ν-presque partout (ν.p.p), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est ν-négligéable.

La tribu Σ est dite ***complète*** *si*

$$\Sigma_\nu = \{A \cup Z : \quad A \in Z \ \text{ et } \ Z \ \ \nu - negligeable\}$$

c'est à dire si tout ensemble ν-négligeable apparient à Σ.

Définition 1.2.6 *Une fonction $f : X \to E$ est* ***fortement ν-mesurable*** *s'il existe une suite de fonctions simples $f_n : X \to E$ tel que*

$$\lim_n \|f_n(w) - f(w)\| = 0 \quad \nu.p.p \ \ surX$$

$f : X \to E$ est ***faiblement ν-mesurable*** *si la fonction*

$$\langle x', f \rangle : t \mapsto \langle x', f(t) \rangle$$

est mesurable pour tout $x' \in E'$.

Le théorème de mesurabilité de Pettis, donne une relation entre fortement mesurable et faiblement mesurable.

Théorème 1.2.2 *Une application $f : X \to E$ est **fortement μ-mesurable** si et seulement si,*

(i) f est faiblement mesurable,

(ii) f est à valeurs μ-essentiellement séparables i.e $\exists A \in \aleph(\mu)$ tel que $f(X \backslash A)$ est un sous ensemble séparable de E.

($\aleph(\mu)$, la collection des ensembles μ-négligeables).

Définition 1.2.7 *Deux applications $f, g : X \to E$ faiblement μ-mesurables sont **faiblement μ-équivalentes** si $\langle x', f \rangle = \langle x', g \rangle$ μ.p.p, pour chaque $x' \in E'$.*

*Si f et g sont fortement mesurables, alors elles sont **μ-équivalentes** si $f = g$ μ.p.p.*

Mesures de Borel et de Lebesgue

Définition 1.2.8 *Soit (X, Σ, ν) un espace mesuré avec ν finie. Notons $\Sigma^* := \Sigma_\nu$ et soit $\nu^* : \Sigma^* \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\nu^*(A \bigcup Z) = \nu(A)$; pour tout $A \in \Sigma$ et tout Z ν-négligeable. Alors (X, Σ^*, ν^*) est un espace mesuré avec ν^* finie et complète et on a $\nu^* = \nu$ sur Σ. (X, Σ^*, ν^*) est appelé l'extension de Lebesgue de l'espace mesuré (X, Σ, ν).*

Théorème 1.2.3 *Soit X un espace topologique compact, Σ une algèbre sur X, et $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction additive, régulière et bornée.*
Soit $\widetilde{\Sigma}$ la plus petite tribu sur X contenant Σ, Alors il existe une mesure unique $\widetilde{\nu} : \widetilde{\Sigma} \to \overline{\mathbb{R}}$ régulière, bornée et qui prolonge ν à $\widetilde{\Sigma}$

Soient t_0, t_1 deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$, $J = [t_0, t_1]$ et Σ la famille de tous les sous ensembles de J de la forme $\{t_0\} = [t_0, t_0]$, $]t', t'']$, pour $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$, et les unions finies de ces intervalles.

Il est claire que Σ est une algèbre sur J. définissons $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ par

$\nu(\{t_0\}) = 0$, $\nu(]t', t'']) = t'' - t'$ et $\nu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) = \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j)$; avec $k \in \mathbb{N}$ et A_j des intervalles disjoints de la forme considérée.

La mesure ν est une mesure additive, régulière et bornée.

Par le théorème 1.2.3, elle admet une unique extension à $\widetilde{\Sigma}$ qui est la plus petite tribu sur J contenant Σ, et qui n'est autre que la tribu Borélienne $B(J)$.

Cette extension notée $\widetilde{\nu}$ est appelée la mesure de Borel sur J.

Soit (J, Σ^*, ν^*) l'extension de Lebesgue de $(J, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\nu})$, Alors les éléments de Σ^* sont appelés ensembles Lebesgue-mesurables de J et ν^* est la mesure de Lebesgue sur J.

1.3 La distance de Hausdorff

Définition 1.3.1 *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d), l'écart entre A et B est défini par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$$

avec

$$d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b).$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$H(A, B) = \max\{e(A, B),\ e(B, A)\}$$

(i) $\mathcal{P}_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff H, est un espace métrique.

(ii) Si (X, d) est un espace métrique complet, Alors $(\mathcal{P}_f(X), H)$ l'est aussi.

(iii) Si X est séparable, $\mathcal{P}_K(X)$ muni de H est aussi séparable.

Définition 1.3.2 ***(Topologie de Mackey)***

$\tau_{co}^{w}(E)$ la topologie de la convergence uniforme sur les sous ensemble convexes faiblement compacts de E.

Restreinte à E', cette topologie est appelée topologie de Mackey et notée $\tau(E', E)$

1.4 Multi-applications et sélections

Définition 1.4.1 *Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multi-application F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y. On note $F : X \rightrightarrows Y$.*

Définition 1.4.2 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \rightarrow Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \ \forall x \in X.$$

Théorème 1.4.1 ***(Théorème de sélections continues de Michael)***
Soit X un espace métrique, Y un espace de Banach, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées convexes semi-continue inférieurement sur X. Alors il existe une sélection continue de F, $f : X \rightarrow Y$.

On donne un théorème analoque du théorème de Michael où la convexité est remplacée par la décomposabilité dans $\mathbf{L}^1$.

Définition 1.4.3 *On dite qu'une famille $K \subset \mathbf{L}^1_E$ est* ***décomposable*** *si, pour tous $u, v \in K$ et $A \in \Sigma$*

$$u\,1_A + v\,(1 - 1_A) \in K$$

ou 1_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A.

Théorème 1.4.2 ***(Théorème de sélections de Fryszkowski)***
Soit X un espace métrique compact, Y un espace de Banach, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées décomposables semi-continue inférieurement sur X. Alors il existe $f : X \rightarrow Y$ une sélection continue de F.

1.5 Mesurabilité des multi-applications

Pour plus de détails sur la mesurabilité des multi-applications on peut se référer à [20], [40], [44].

Définition 1.5.1 *soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $\Gamma : T \rightrightarrows X$. On dit que Γ est $(\Sigma, \mathfrak{B}(X))$-mesurable si pour tout ouvert V de X*

$$\Gamma^{-1}(V) = \{t \in T; \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma$$

Lemme 1.5.1 *soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $\Gamma : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées .*
Considérons les propriétés suivantes ;

1. $\Gamma^{-1}(B) \in \Sigma$, *pour tout Borélien* B *de* X,
2. $\Gamma^{-1}(C) \in \Sigma$, *pour tout fermé* C *de* X,
3. $\Gamma^{-1}(V) \in \Sigma$, *pour tout ouvert* V *de* X,
4. *il existe une suite* (σ_n) *de sélections mesurables de* Γ *telle que*

$$\forall t \in T, \Gamma(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}_{n\in\mathbb{N}}$$

5. $\forall x \in X$, *la fonction distance* $d(x, \Gamma(.))$ *est mesurable.*
6. *Le graphe de* Γ *appartient à* $\Sigma \bigotimes \mathfrak{B}(X)$.

Alors $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5) \Rightarrow (6)$

Si Γ *est à valeurs non vides complètes alors* $(3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$.

Si Γ *est à valeurs non vides compactes alors* $(3) \Rightarrow (1)$.

Si X *est un sepace de Banach séparable et* Γ *est à valeurs convexes compactes, alors la mesurabilité de* Γ *est équivalente à la mesurabilité de la fonction support* $\delta^*(x', \Gamma(.))$, *pour tout* $x' \in X'$.

Lemme 1.5.2 *Soit* (T, Σ, ν) *un espace mesuré, avec* $\nu \geq 0$, σ*-finie et* Σ ν*-complète. Soit* X *un espace métrique complet et* $\Gamma : T \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors* $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow (6)$

Définition 1.5.2 *Soient* (T, Σ, ν) *un espace mesuré fini,* X *un espace métrique séparable et* $\Gamma : T \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors l'ensemble de toutes les sélections Bochner intégrables de* Γ *est défini par*

$$S^1_\Gamma = \{f \in \mathbf{L}^1_X(T) : \ f(t) \in \Gamma(t), \ \ p.p.t \in T\}$$

Lemme 1.5.3 *Si* $\Gamma : T \rightrightarrows X$ *est mesurable. Alors* $S^1_\Gamma \neq \emptyset$ *si et seulement si*

$$\inf\{\|x\|; x \in \Gamma(t)\} \leq h(t), \ \ p.p.t \in T$$

où $h \in \mathbf{L}^1_X(T)$.

Proposition 1.5.4 *Si* $\Gamma : T \rightrightarrows X$ *est mesurable et* $S^1_\Gamma \neq \emptyset$. *Alors il existe une suite* $(f_n)_{n\geq 1} \subset S^1_\Gamma$ *tel que*

$$\Gamma(t) \subset \overline{\{f_n(t)\}}_{n\geq 1} \ , \ \ p.p.t \in T.$$

Proposition 1.5.5 *Si* $S_\Gamma^1 \neq \emptyset$, *alors* $\overline{S_\Gamma^1} = S_\Gamma^1$

Définition 1.5.3 *Soit* $\Gamma : T \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors* Γ *est dite intégrablement bornée si il existe une fonction* $m : T \to \mathbb{R}_+$ *tel que* $m \in \mathbf{L}_T^1(\mathbb{R})$ *et* $\Gamma(t) \subset \mathbf{B}_X(0, m(t)), p.p.t \in T$.

Définition 1.5.4 *Soit* $\Gamma : T \rightrightarrows E$ *une multi-application intégrablement bornée. Alors, on définit l'intégrale de* Γ *par*

$$\int_T \Gamma(t) d\nu(t) = \{ \int_T f(t) d\nu(t);\ f \in S_\Gamma^1 \}$$

Théorème 1.5.6 ***(Théorème de James)***
Soient E *un espace de Banach séparable,* K *un sous ensemble convexe fermé de* E. *Alors* K *est faiblement compact si et seulement si*

$$\exists k \in K : \delta^*(x', K) = \langle x', k \rangle, \quad \forall x' \in E'$$

Théorème 1.5.7 ***(Théorème de Banach Dieudonné)***
Soit E *un espace de Banach séparable, Alors sur* $\overline{B_{E'}}$ *la topolgie de la convergence faible coincide avec la topologie de la convergence compacte.*
$(\overline{B_{E'}}, \sigma(E', E))$ *est metrisable.*

Théorème 1.5.8 ***(Formule de Strassen)***
Soient E *un espace de Banach séparable,* $\Gamma : T \rightrightarrows X$ *une multi-application intégrablement bornée à valeurs non vides convexes compactes. Alors,*

$$\delta^*(x', \int_T \Gamma(t) d\nu(t)) = \int_T \delta^*(x', \Gamma(t)) d\nu(t), \quad \forall x' \in E'.$$

Théorème 1.5.9 ***(Théorème de Lusin)***
Soit T *un espace métrique compact et* (T, Σ, ν) *un espace mesuré de Radon avec* ν *positive. Soit* X *un espace de dimention finie. Alors pour toute fonction* $\varphi : T \to X$ ν*-mesurable et pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un compact* $T_\epsilon \subset T$ *tel que* $\nu(T/T_\epsilon) < \epsilon$ *et la restriction de* φ *à* T_ϵ *est continue.*

Lemme 1.5.10 *Soient* E *un espace de Banach séparable,* E' *son dual topologique muni de la topologie de Mackey. Soit* f *une fonction convexe sur* E', *finie et continue aux points* $x'_0 \in E'$. *Soit* D *un sous ensemble dense dans* E'. *Alors*

$$\inf\{f(y') : y' \in E'\} = \inf\{f(x') : x' \in D\}$$

Lemme 1.5.11 *Soient E un espace de Banach séparable, E' son dual topologique, $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E' pour la topologie de Mackey, et K un sous ensemble convexe fermé faiblement localement compact de E. Alors*

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in E : \langle e'_n, x\rangle \leq \delta^*(e'_n, K)\}.$$

Proposition 1.5.12 *Soit E un espace localement convexe, (T, Σ, ν) un espace mesuré, $\Gamma : T \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées convexes faiblement localement compactes. Soit $\sigma : T \to E$ une fonction à valeurs fermées convexes .*
Si $\forall x' \in E', \delta^*(x', \sigma(t)) \leq \delta^*(x', \Gamma(t))$, ν.p.p, alors $\sigma(t) \subset \Gamma(t)$, p.p.

Corollaire 1.5.13 *Soit E un espace localement convexe muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$, E' son dual topologique muni de la topologie de Mackey $\tau(E', E)$, C un sous ensemble non vide fermé convexe. Alors les propriétés suivantes sons équivalentes :*
a) Il existe $y'_0 \in E'$ tel que $\delta^*(., C)$ est finie et continue en y'_0.
b) C est localement compact.
c) Il existe $y'_0 \in E'$ tel que pour tout $b \in \mathbb{R}$; $\{y \in C : \langle y'_0, y\rangle \geq b\}$ est compact.

Lemme 1.5.14 ***(Lemme de Grothendieck)***
Soit E un espace de Banach, Soit H un sous ensemble de E vérifiant : pour tout nombre positif ε, il existe un ensemble K_ε faiblement compacte dans E, tel que $H \subset K_\varepsilon + \varepsilon B_E$ (B_E la boule unité de E). Alors H est relativement faiblement compact.

Théorème 1.5.15 *Soit Γ une multi-application mesurable de $[0,1]$ à valeurs convexes compactes dans un espace de Banach séparable E, telle que Γ est intégrablement bornée, c'est à dire $\Gamma(t) \subset g(t)B_E$, $\forall t \in [0,1]$, g une fonction de $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}_+}([0,1])$.*
Notons par S^1_Γ l'ensemble des sélections intégrables de Γ, et

$$\int_{[0,1]} \Gamma(t)dt = \{ \int_{[0,1]} \sigma(t)dt, \sigma \in S^1_\Gamma\}$$

On a alors
1) S^1_Γ est convexe $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$-compact.
2) $\int_{[0,1]} \Gamma(t)dt$ est fortement compact.

Démonstration.

Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in S^1_\Gamma$, $\alpha \in]0,1[$, nous avons :

$$[\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2](t) = \alpha\sigma_1(t) + (1-\alpha)\sigma_2(t)$$

Or $\Gamma(t)$ est convexe, et donc

$$\alpha\sigma_1(t) + (1-\alpha)\sigma_2(t) \in \Gamma(t.)$$

D'où

$$\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2 \in S^1_\Gamma$$

Montrons maintenant que S^1_Γ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$-compact.

Soit $g \in \mathbf{L}^\infty_{E'}([0,1])$,

$$\delta^*(g, S^1_\Gamma) = \delta^*(g, \int_{[0,1]} \Gamma(t)dt)$$

D'aprés la formule de **Strassen** 1.5.8, nous avons

$$\delta^*(g, \int_{[0,1]} \Gamma(t)dt) = \int_{[0,1]} \delta^*(g, \Gamma(t))dt$$

Le théorème d'existence de sélections mesurables, asssure l'existence de $f \in S^1_\Gamma \subset \mathbf{L}^1_E$ tel que

$$\delta^*(g, S^1_\Gamma) = \langle g, f\rangle.$$

Par conséquent et en vertu du théorème de **James** 1.5.6, S^1_Γ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$-compact.

Montrons que $\int_{[0,1]} \Gamma(t)dt$ est fortement compact.

D'aprés la formule de **Strassen** une deuxième fois, nous avons :

$$\delta^*(x', \int_{[0,1]} \Gamma(t)dt) = \int_{[0,1]} \delta^*(x', \Gamma(t))dt, \quad \forall x' \in E'.$$

L'ensemble $\Gamma(t)$ étant compact, donc l'application $x' \mapsto \delta^*(x', \Gamma(t))$ est continue sur $\overline{B}_{E'}$ par rapport à la topologie de la convergence compacte, et en vertu du théorème de **Banach-Dieudonné** 1.5.7, cette application est continue sur $\overline{B}_{E'}$ par rapport à la topologie de la convergence faible, sachant que $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E, E'))$ est métrisable.

Soit $(x'_n)_n$ une suite d'élèment de $\overline{B}_{E'}$ convergeant faiblement vers x', nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*(x'_n, \Gamma(t)) = \delta^*(x', \Gamma(t)).$$

Or, $|\delta^*(x', \Gamma(t))| \leq |\Gamma(t)|$, d'aprés le théorème de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \delta^*(x'_n, \Gamma(t))dt = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} \delta^*(x'_n, \Gamma(t))dt = \int_{[0,1]} \delta^*(x', \Gamma(t))dt.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*(x'_n, \int_{[0,1]} \Gamma(t))dt = \delta^*(x', \int_{[0,1]} \Gamma(t)dt).$$

Donc l'application $x' \mapsto \delta^*(x', \int_{[0,1]} \Gamma(t)dt)$ est continue sur $\overline{B}_{E'}$ par rapport à la topologie de la convergence faible. Le théorème de **Banch-Dieudonné** 1.5.7 assure la continuité de cette dernière par rapport à la topologie de la convergence compacte et par conséquent la compacité forte de la multi-application intégrale $\int_{[0,1]} \Gamma(t)dt$.

□

Théorème 1.5.16 *(Théorème d'existence de sélections mesurables de Castaing)*
Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable, $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.

1.6 Semi-continuité des multi-applications

Définition 1.6.1 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
F est dite semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$.
On dit que F est semi-continue supérieurement sur X si elle est semi-continue supérieurement en tout point $x \in X$.

Lemme 1.6.1 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé.*

Théorème 1.6.2 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors F est semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \to x$, et $(y_n)_n$ de Y avec $y_n \in F(x_n)$, il existe une sous suite (y_m) de (y_n) telle que*

$$\lim_{m \to \infty} y_m \in F(x).$$

Démonstration.

Soit F une multi-application semi-continue supérieurement sur X, et $(x_n)_n$ une suite de points de X convergeant vers x. L'ensemble

$$K := \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$$

est un ensemble compact et la restriction de F à K est semi-continue supérieurement, donc l'ensemble $F(K)$ est compact, par conséquent la suite (y_n) admet une sous suite (y_{n_k}) qui converge vers y quand k tend vers $+\infty$.

Supposons $y \notin F(x)$, alors il existe un voisinage fermé M de $f(x)$ ne contenant pas y mais pour n assez grand nous avons : $F(x_n) \subset M$ Vu la semi-continuité supérieure de F au point x on obtient $y_{n_k} \in M$ et par suite $y \in M$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Supposons maintenant que F n'est pas semi-continue supérieurement au point x. C'est à dire, il existe un voisinage ouvert U de $F(x)$ tel que pour chaque voisinage V de x contenant un point z de U il ne contient pas $F(z)$, alors il existe deux suite (x_n) convergeant vers x et (y_n) tel que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \notin U$.

D'aprés les hypothèses, il existe une sous suite (y_{n_k}) de (y_n) telle que $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \in F(x)$. mais $y_n \in U$ pour $n \in \mathbb{N}$ ce qui montre que $y_{n_k} \notin U$ et donc $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \notin F(x)$. Ceci achève la démonstration.

Définition 1.6.2 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un ouvert V de X tel que $x_0 \in V$ et $F(x) \cap U = \emptyset$, $\forall x \in V$.*
On dit que F est semi-continue inférieurement sur X si elle est semi-continue inférieurement en tout point $x \in X$.

Lemme 1.6.3 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$*
et pour tout $y_0 \in F(x_0)$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset Y$ tel que $y_n \in F(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Définition 1.6.3 *Soit f une application de l'espace de Banach E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est semi-continue inférieurement si et seulement si son épigraphe*

$$epi(f) = \{(x, r) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$$

est fermé.
On dit que f est semi-continue inférieurement au point $a \in E$ si et seulement si

$$\liminf_{x\to a} f(x) \geq f(a)$$

Définition 1.6.4 *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$, nous avons*

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$$

Théorème 1.6.4 *une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, c'est à dire*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.

Théorème 1.6.5 *(Théorème de fermeture)*
Soient E un espace de Banach séparable, X un espace topologique et Φ une multi-application définie sur $[0,T] \times X$ à valeurs non vides convexes compactes dans E et telle que pour tout $t \in [0,T]$ fixé, $\Phi(t,.)$ est semi-continue supérieurement.
Soient (x_n), x des fonctions définies sur $[0,T]$ à valeurs dans X et (y_n), y des fonctions intégrables définies sur $[0,T]$ à valeurs dans E.
Supposons que :
a) il existe une suite (e'_n) de E' séparant les points de E.
b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, p.p sur $[0,T]$.
c) (y_n) converge vers y $\sigma(\mathbb{L}^1_E, \mathbb{L}^\infty_{E'})$.
d) $y_n(t) \in \Phi(t, x(t))$, p.p sur $[0,T]$.
alors, $y(t) \in \Phi(t, x(t))$, p.p sur $[0,t]$.

1.7 Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan

Théorème 1.7.1 *Soient X un espace topologique séparé localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de X et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes fermées, alors F admet un point fixe dans S, c'est à dire, il existe $x \in S$ tel que $x \in F(x)$.*

Comme corollaire du théorème précédent, on obtient une version faible du théorème du point fixe.

Théorème 1.7.2 *(Corrolaire du théorème de Kakutani-Ky Fan)*
Soit E un espace de Banach, S un sous ensemble non vide convexe faiblement compact de E et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application faiblement-faiblement semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors F admet un point fixe dans S.

Démonstration.

Observons que l'existence d'un point fixe pour F, vient immédiatement du théorème de Kakutani-Ky Fan.

Si l'on peut prouver que F est semi-continue supérieurement sur S comme étant une multi-aplication définie sur un sous ensemble d'un espace topologique de Hausdorff localement convexe $(E, \sigma(E, E'))$ muni de la topologie $\sigma(E, E')$, il suffit de prouver que pour tout sous ensemble faiblement fermé B de S, l'ensemble $F^{-1}(B)$ est faiblement fermé.

Soit B un sous ensemble faiblement fermé de S. Comme F est faiblement-faiblement semi-continue supérieurement sur S, $F^{-1}(B)$ est séquentiellement faiblement fermé.

Or $F^{-1}(B) \subset S$ qui est faiblement compact, donc $F^{-1}(B)$ est relativement séquentiellement compact et le théorème d'Eberlein-Smûlian assure que $\overline{[F^{-1}(B)]}^{w}$ (la fermeture faible de $F^{-1}(B)$) est faiblement compacte.

Soit $x \in \overline{[F^{-1}(B)]}^{w}$, en vertue du théorème de Smûlian, il existe une suite notée (x_n) de $F^{-1}(B)$ qui converge faiblement vers x.

Or $F^{-1}(B)$ est séquentiellement faiblement fermé. il vient que $x \in F^{-1}(B)$, c.à.d $\overline{[F^{-1}(B)]}^{w} \subset F^{-1}(B)$.

Donc pour tout ensemble $B \subset S$ faiblement fermé, $F^{-1}(B)$ est faiblemnt fermé.

On déduit que F est semi-continue supérieurement de S qui est un convexe compact d'un espace topologique de Hausdorff localement convexe $(E, \sigma(E, E'))$ à valeurs non vides convexes compactes.

Donc d'aprés le théorème de Kakutani-Ky Fan, F admet au moins un point fixe .

1.8 Quelques résultats de convergence

Théorème 1.8.1 ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)***
Si la suite (f_n) de fonctions définies ν-p.p sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, converge ν-p.p vers une fonction f et si de plus les f_n supposées ν-integrables vérifient ν-p.p pour tout n

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

où g est une fonction ν-integrable indépendante de n, Alors f est ν-integrable et on a

$$\nu(f) = \lim_{n \to \infty} \nu(f_n)$$

Lemme 1.8.2 *(Lemme de Fatou)*
Soit (f_n) une suite majorée (resp. minorée) dans $L^1_E(\nu)$ telle que la suite $(\nu(f_n))$ est minorée (resp. majorée) dans $\mathbb{R}$. Alors la limite supérieure (resp.inférieure) de la suite (f_n) est ν-intégrable et on a :

$$\nu(\limsup_{n\to\infty} f_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \nu(f_n)$$

(resp.

$$\nu(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \nu(f_n))$$

Théorème 1.8.3 *Soit φ une fonction à valeurs réelles définie sur $V_s \times (E/A)$, où V_s est un voisinage d'un point $s \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^k$ et $A \subset E$ un sous ensemble ν-négligeable.*
Si pour chaque $t \in V_s$, la fonction $x \mapsto \varphi(t,x)$ est ν-intégrable sur E et si de plus sur $V_s \times (E/A)$, la fonction φ admet une dérivée partielle par rapport à t vérifiant l'inégalité

$$|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)| \leq g(x)$$

où g est ν- intégrable et indépendante de t, alors la fonction $t \mapsto \int \varphi(t,x)d\nu(x)$ est dérivable au point s et l'on a

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(s,x)d\nu(x) = \int \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,x)d\nu(x)$$

Théorème 1.8.4 *(Théorème d'Ascoli-Arzelà)*
Soient J un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $C(J,Y)$ (l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergenc uniforme).
Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$ est relativement compact.

Théorème 1.8.5 *(Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà)*
Soient J un ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banch de dimension finie et soit (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans E satisfaisant les conditions suivantes.
i) $\forall t \in J$, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est un sous ensemble relativement compact dans E.
ii) il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in L^1_{\mathbb{R}} + (J)$ tel que $\|f'(t)\| \leq h(t)$, p.p sur J.
Alors il existe une sous suite de $(f_n)_n$ qui converge vers une fonction absolument continue

$f : J \to E$ au sens suivant :

(1) $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

(2) $(f'_n)_n$ converge faiblement vers f' dans $\mathbf{L}^1_E(J)$, c'est à dire (f'_n) converge vers f' $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$.

Définition 1.8.1 *On dit qu'un espace topologique X est un espace **Polonais** s'il est séparable et métrisable par une métrique complète.*
On dit que X est un espace souslien s'il est métrisable et l'image continue d'un espace Polonais.

Définition 1.8.2 *Soit (e'_n) une suite d'élément du dual X' d'un espace topologique X. On dit que (e'_n) sépare les points de X si pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\langle e'_n, x\rangle \neq \langle e'_n, y\rangle$$

1.9 Quelques résultats de compacité

Théorème 1.9.1 ***(Théorème de Banach-Dieudonné)***
Soit E un sepace de Banch , $\overline{B}_{E'}$ la boule unité fermée de E'. Alors sur $\overline{B}_{E'}$ la topologie de la convergence faible coincide avec la topologie de la convergence compacte.
$(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ est métrisable.

Proposition 1.9.2 *Soit K un sous ensemble borné convexe de E, alors K est compact si et seulement si la fonction $x' \mapsto \delta^*(x', K)$ est continue sur $\overline{B}_{E'}$ muni de la topologie de la convergence compacte.*

Théorème 1.9.3 ***(Théorème d'Eberlein-Smûlian).***
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors les deux proprietés suivantes sont équivalentes :
i) S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.
ii) S est faiblement (relativement) compact.

Théorème 1.9.4 ***(Théorème de Smûlian)***
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach E, si S est relativement faiblement compact, alors pour chaque $x \in \overline{S}^w$ (fermeture faible de S) il existe une suite (x_n) d'éléments de S convergeant faiblement vers X.

Théorème 1.9.5 ***(Théorème de Hahn-Banach)***
Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :
(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall x \in E$ et $\forall \lambda > 0$,
(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.
Soit d'autre part $G \subset E$ un sous espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leq p(x), \ \forall x \in G.$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, i.e $g(x) = f(x)$, $\forall x \in G$ et telle que

$$f(x) \leq p(x), \ \forall x \in E.$$

Théorème 1.9.6 ***(Théorème du graphe fermé)***
Soient E, F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E vers F. On suppose que le graphe de T, $Gr(T)$ est fermé dans $E \times F$, Alors T est continu.

Théorème 1.9.7 ***(Théorème de Mazur)***
Soit E un espace de Banach et A un sous ensemble compact de E. Alors $\overline{co}(A)$ est compact.

Théorème 1.9.8 ***(Théorème de Banach-Mazur)***
Soit (x_n) une suite d'élèmentes de E convergeant faiblement vers x.
Alors, il existe une suite (z_n) (où z_n est une combinaison convexe des élèments x_n,x_{n+1},...) convergeant fortement vers x.

Définition 1.9.1 *Soit (Ω, Σ, ν) un espace mesurè, $A \in \Sigma$ est un atome si $\nu(A) > 0$ et pour tout $C \in \Sigma$ avec $C \subset A$, $\nu(C) = 0$ où $\nu(C) = \nu(A)$.*
La mesure ν est dite nonatomique si elle n'admet pas d'atomes.

Théorème 1.9.9 ***(Théorème de Lyapunov)***
Soit (T, Σ) un espace mesurable, $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ une mesure vectorielle dénombrable additive. i.e $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ et $\nu(A) = \nu_1(A)....\nu_n(A)$ pour tout $A \in \Sigma$.
Si ν est non atomique, Alors le rang de ν est

$$R_\nu(A) = \{\nu(A_1) : A_1, A \in \Sigma, A_1 \subset A\}$$

est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ compact convexe.

Théorème 1.9.10 ***(Théorème d'Egoroff)***

Soit (T, Σ, ν) un espace mesurable ($\nu(T) < \infty$), $(X, \|.\|)$ un espace de Banach.

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de T à valeurs dans X telle que (f_n) converge vers f ν.p.p sur T.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $E \subset T$ tel que $\nu(E) < \varepsilon$ et $\lim_{n\to\infty} \sup_{t \in T/E} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$.

ce théorème implique le corrolaire suivant.

Corollaire 1.9.11 *Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré, pour tout élément arbitraire $B \in \Sigma$, il existe $A \in \Sigma$ tel que $A \subset B$ et $\mu(A) = \frac{1}{2}\mu(B)$.*

Chapitre 2

Quelques résultats sur l'intégration au sens de Pettis et comparaison avec la Bochner et la scalaire intégration

Introduction.

Dans la théorie de l'intégration dans un espace E de dimension infinie, l'intégration au sens de Pettis des applications plus fortes que celles de l'intégration au sens de Bochner. *En effet*, dans un espace de Banach E de dimension infinie, il existe des fonctions Pettis-integrables qui ne sont pas Bochner-integrables.

Ce chapitre est consacrés à l'étude de l'intégration au sens de Pettis avec une comparaison avec la Bochner et scalaire.

Dans la section 1, On donne quelques définitions et propriétés de l'intégrale au sens de Bochner qui sont médées à comparer à ceux de l'intégrale au sens de Pettis.

La section 2, est consacrée à quelques résultats sur l'integrabilité au sens de Pettis.

Dans la section 3, une comparaison entre l'integrabilité au sens de Pettis et au sens de Bochner est établie. On donne les conditions pour qu'une fonction f fortement mesurable soit Pettis ou Bochner intégrable et on montre l'implication (f Bochner intégrable $\Rightarrow$ f Pettis intégrable). On montre par des contres exemples que dans un espace de dimension infinie la réciproque est fausse , c'est à dire qu'il existent des fonctions Pettis intégrable mais non Bochner intégrables.

Dans la section 4, la comparaison est ètablie entre l'intégrabilité au sens de Pettis et scalaire, on donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction scalaire-intégrable soit Pettis intégrable.

2.1 Intégrale au sens de Bochner

Définition 2.1.1 *(fonction Simple)*

*Une fonction $f : X \to E$ est dite **Simple** si elle peut s'écrire sous forme :*

$$f := \sum_{i=0}^{n} x_i 1_{A_i} \tag{2.1}$$

Où $A_0, ..., A_n \in \Sigma, x_0, ..., x_n \in E$, avec $\mu(A_i) < +\infty$ pour tout $i = 0, ..., n$ et les A_i deux à deux disjoints.

Notons que f est constante sur chaque A_i ($\forall w \in A_i, f(w) = x_i$) et nulle en dehors de $\bigcup_{0 \leq i \leq n} A_i$.

La décomposition ci-dessus n'est pas en général unique (on n'impose pas aux x_i d'être tous distincts).

Définition 2.1.2 *(intégrale au sens de Bochner d'une fonction simple)*

Si f est simple, on définit son intégrale de Bochner (sur Ω, relativement à μ) par

$$\int_\Omega f d\mu := \sum_{i=0}^{n} x_i \mu(A_i) \tag{2.2}$$

Où les x_i et les A_i sont ceux donnés par (2.1)

On voit immédiatement que cette définition pose un problème de cohérence liè à la non unicitè de la décomposition (2.1)

Réglons ce problème en montrant que si $f := \sum_{i=0}^{n} x_i 1_{A_i} = \sum_{j=0}^{m} 1_{B_j}$.

Les B_j étant deux à deux disjoints, alors

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \mu(A_i) = \sum_{j=0}^{m} \mu(B_j)$$

En effet : Posons $A_{n+1} := \Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{n} A_i$, $B_{m+1} := \Omega \setminus \bigcup_{j=0}^{m} B_j$

soit i un indice pour lequel $x_i \neq 0$. Remarquons que $\bigcup_{j=0}^{m+1} B_j = \Omega$.

On peut alors écrire

$$A_i = A_i \bigcap (\bigcup_{j=0}^{m+1} B_j) = \bigcup_{j=0}^{m+1} (A_i \bigcap B_j) = \bigcup_{j=0}^{m} (A_i \bigcap B_j)$$

car $A_i \bigcap B_{m+1} = \emptyset$. *En effet*, si $w \in A_i \bigcap B_{m+1}$, on aura $w \in A_i$ et donc $f(w) = x_i \neq 0$ et $w \in B_{m+1}$ et donc $f(w) = 0$. Ce qui est contradictoire.

En utilisant les mémes arguments si $y_i \neq 0$, $B_j = \bigcup_{i=0}^{n} (A_i \cap B_j)$.

Remarquons aussi que si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, nécessairement $x_i = y_j$ puisque si $w \in A_i \cap B_j$, $f(w) = x_i$ et $f(w) = y_j$.

Nous pouvons maintenant écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} x_i\mu(A_i) &= \sum_{i=0,x_i\neq 0}^{n} x_i\mu(A_i) \\
&= \sum_{i=0,x_i\neq 0}^{n} x_i\sum_{j=0}^{m}\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i\sum_{j=0}^{m}\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} y_j\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{j=0}^{m} y_j\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{j=0,y_j\neq 0}^{m} y_j\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{j=0,y_j\neq 0}^{m} y_j\mu(B_j) \\
&= \sum_{j=0}^{m} y_j\mu(B_j).
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.1 *Remarquons que l'intégrale de Bochner des fonctions simples est linéaire :*

$$\int_\Omega (af+bg)d\mu = a\int_\Omega f\,d\mu + b\int_\Omega g\,d\mu, \tag{2.3}$$

pour tous réels a et b et toutes fonctions simples f et g. De plus pour toute fonction Simple f, on a

$$\|\int_\Omega f\,d\mu\| = \|\sum_{i=0}^{n} x_i\mu(A_i\| \leq \sum_{i=0}^{n}\|x_i\|\mu(A_i) = \int_\Omega \|f\|\,d\mu \tag{2.4}$$

Cette dernière intégrale est une intégrale au sens classique.

Définition 2.1.3 *(Intégrale au sens de Bochner)*
*Soit $f : \Omega \to X$ une application fortement mesurable, on dit que f est μ-**Bochner integrable** s'il existe une suite de fonctions simples f_n telle que :*

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu.p.p} f \tag{2.5}$$

et

$$\int_\Omega \|f_n - f\| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.6}$$

On pose alors

$$\int_\Omega^{Bochner} f d\mu = \int_\Omega f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu. \tag{2.7}$$

Dans cette définition, l'intégrale utilisée dans (2.6) est une intégrale au sens de Lebesgue. Nous n'utiliserons la notation lourde $\int_\Omega^{Bochner}$ que lorsqu'il s'agira de comparer l'intégrale au sens de Bochner avec l'integrale au sens de Pettis.

La définition 2.1.3 nécessite quelques justifications que nous allons détaillé.

L'espace de Banach E étant complet. On établit l'existence de

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu$$

en vérifiant que la suite $(\int_\Omega f_n d\mu)_{n\geq 1}$ est de Cauchy.

Par les relations (2.3), (2.4) et (2.6), nous avons pour $n, m \geq \aleph(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\| \int_\Omega f_n d\mu - \int_\Omega f_m d\mu \| &= \| \int_\Omega (f_n - f_m) d\mu \| \\
&\leq \int_\Omega \|f_n - f_m\| d\mu \\
&\leq \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu + \int_\Omega \|f - f_m\| d\mu \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la limite $\int_\Omega f d\mu$ ne dépend pas du choix de la suite approximante $(f_n)_n$.

Soit donc $(g_n)_{n\geq 1}$ une autre suite de fonctions simples telles que

$g_n \overset{\mu-p.p}{\longrightarrow} f$ et $\|g_n - f\| \to 0$.

L'argument donné ci-dessus montre que $(\int_\Omega g_n d\mu)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans E.

Posons alors :

$$f := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu, \quad g := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu$$

Et définissons la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ de fonctions simples par $h_{2k} = f_k$, $h_{2k+1} = g_{k+1}$.

Comme la suite (h_n) vérifie elle aussi la condition (2.6), la suite des intégrales $(\int_\Omega h_n d\mu)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans E donc a une limite h dans E. Cette suite d'intégrales admet une sous suite convergeant vers f et une autre convergeant vers g donc $f = g = h$.

□

Lemme 2.1.1 *Si E est séparable et μ-finie, toute application fortement mesurable f : $(\Omega, \Sigma, \mu) \to (E, \mathfrak{B}(E))$ est limite μ-p.p. d'une suite (f_n) de fonctions simples.*

Démonstration.

Puisque E est séparable, nous disposons d'une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ par tout dense.

On a alors pour tout $\delta > 0$, un recouvrement dénombrable de E par des boules fermées de rayon δ

$$E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} \overline{B}(x_i, \delta)$$

On en déduit un recouvrement dénombrable de Ω par les ensembles $f^{-1}(\overline{B}(x_i, \delta)) \in \Sigma$.

Par la continuitè séquentielle croissante de la mesure μ, on a

$$\bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}(\overline{B}(x_i, \delta)) \to \Omega \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}(\overline{B}(x_i, \delta))) \to \mu(\Omega), (N \to +\infty)$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$ et comme $\mu(\Omega)$ est fini, on aura

$$\forall\delta > 0, \forall\eta > 0, \exists N = N(\delta, \eta), \mu(\bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}(\overline{B}(x_i, \delta))) > \mu(\Omega) - \eta$$

Prenant maintenant $\delta = \frac{1}{n}$ et $\eta = 2^{-n}$, on obtient

$$\forall n \geq 1, \exists N_n, \mu(\bigcup_{i=1}^{N_n} f^{-1}(\overline{B}(x_i, \frac{1}{n}))) > \mu(\Omega) - 2^{-n}$$

Posons

$$A_{1,n} := f^{-1}(\overline{B}(x_1, \frac{1}{n})), \ldots, A_{k,n} := \bigcap_{i=1}^{k-1} \complement_E^{A_{i,n}} \bigcap f^{-1}(\overline{B}(x_k, \frac{1}{n})), 2 \leq k \leq N_n.$$

Après élimination des $A_{k,n}$ vides, on construit une partition finie $\{A_{j,n}; j \in J_n\}$ de $\bigcup_{i=1}^{N_n} f^{-1}(\overline{B}(x_i, \frac{1}{n}))$. On choisit un w_j dans chacun des $A_{j,n}$ non vides et on pose $y_j := f(w_j)$. Notons que par construction, $y_j \in \overline{B}(x_j, \frac{1}{n})$. On définit alors la fonction simple f_n par :

$$f_n := \sum_{j \in J_n} y_j 1_{A_{j,n}}.$$

Par construction $\mu(\{w \in \Omega; \|f(w) - f_n(w)\| > \frac{1}{n}\}) < 2^{-n}$, d'où

$$\mu(\bigcup_{n \geq m} \{w \in \Omega; \|f(w) - f_n(w)\| > \frac{1}{n}\}) \leq \sum_{n \geq m} 2^{-n} = 2^{-m+1} \tag{2.8}$$

Posons

$$D := \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{w \in \Omega; \|f(w) - f_n(w)\| > \frac{1}{n}\}$$

En utilisant la continuite séquentielle décroissante de la mesure finie μ, on aura par la relation (2.8)

$$\mu(D) = \lim_{n \to \infty} \mu(\bigcup_{n \geq m} \{w \in \Omega; \|f(w) - f_n(w)\| > \frac{1}{n}\}) = 0$$

Remarquons maintenant que

$$w \in \complement_E^D = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \{w \in \Omega; \|f(w) - f_n(w)\| \leq \frac{1}{n}\}$$

si et seulement si :

$$\exists m \geq 1; \forall n \geq m, \|f(w) - f_n(w)\| \leq \frac{1}{n}$$

Ainsi l'appartenance de w à $\complement_E^D$ implique la convergence de $f_n(w)$ vers w.

On déduit alors que $E := \{w \in \Omega; f_n(w) \quad \textit{ne converge pas vers} \quad f(w)\} \subset D$. D'où $\mu(E) = 0$, ce qui traduit exactement la convergence μ-presque partout de f_n vers f.

$\square$

on donne maintenant une Condition nécessaire et suffisante de Bochner intégrabilité

Théorème 2.1.2 *Soit $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (E, \mathcal{B}(E))$ une application fortement mesurable. Si f est μ-Bohner intégrable. Alors $\int_\Omega \|f\| < +\infty$.*
Lorsque E est ***séparable,*** *cette condition équivaut à la μ-Bohner intégrabilité de f.*

Démonstration.

1) f μ-Bochner intégrable $\Rightarrow \int_\Omega \|f\| < +\infty$.

La μ-Bohner intégrabilité de f nous fournit par la définition 2.1.3 une suite (f_n) de fonctions simples telles que :

$$f_n \overset{\mu-p.p}{\longrightarrow} f$$

et

$$\|f_n - f\| d\mu \longrightarrow 0$$

Ceci implique en particulier que pour n_0 assez grand

$$\int_\Omega \|x_{n_0} - x\| d\mu < +\infty$$

(on ne peut pas exlure a priori que $\int_\Omega \|f_n - f\| d\mu$ vaille $+\infty$ pour les premières valeurs de n, mais comme cette intégrale tend vers 0 quand n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, elle est forcément finie pour n assez grand).

Par inégalitè triangulaire pour la norme de E, la croissance et additivité de l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives, on aura

$$\int_\Omega \|f\| d\mu \leq \int_\Omega \|f_{n_0} - f\| d\mu + \int_\Omega \|f_{n_0}\| d\mu$$

Or f_{n_0} étant simple, on a

$$\int_\Omega \|f_{n_0}\| d\mu = \sum_{i \in I_0} \|x_{n_0,i}\| \mu(A_{n_0,i}),$$

Pour un certain ensemble fini d'indisces I_0, avec les $A_{n_0,i} \in \Sigma$ de μ-mesure finie.

Donc $\int_\Omega \|f_{n_0}\| d\mu < +\infty$ et finalement $\int_\Omega \|f\| d\mu < +\infty$.

Notons que nous n'avons pas suppose E séparable dans cette première partie de la preuve.

Pour la reciproque lorsque E est séparable, nous distinguerons 2 cas selon que μ est finie ou non.

2) $(\int_\Omega \|f\| d\mu < +\infty) \Rightarrow f$ μ-Bochner intégrable.

$a)$ cas ou $\mu(\Omega) < +\infty$.

Par la séparabilite de E, le lemme 2.1.1 nous fournit une suite (f_n) de fonctions simples convergeant μ-presque partout sur Ω vers f. Definissons alors la suite (g_n) par

$$g_n(w) := \begin{cases} f_n(w) & Si \quad \|f_n(w)\| < 2\|f(w)\|; \\ 0 & si \quad \|f_n(w)\| \geq 2\|f(w)\|. \end{cases} \tag{2.9}$$

Soit $\Lambda := \{w \in \Omega; \quad f_n(w) \to f(w)\}$ et notons que $\mu(\complement^\Lambda) = 0$. Alors (g_n) converge vers f μ-p.p sur Ω.

En effet, si $w \in \Lambda \bigcap \{\|f\| > 0\}$, on a $2\|f(w)\| > \|f(w)\|$ et comme $f_n(w)$ converge vers $f(w)$, $\|f_n(w)\| < 2\|f(w)\|$ pour tout n supérieur à un certain $N(w)$.

Donc pour $n > N(w)$, $g_n(w) = f_n(w)$ et $(g_n(w))$ converge vers $f(w)$.

Si $w \in \Lambda \bigcap \{f = 0\}$, on a pour tout entier n, $\|f_n(w)\| \geq 2\|f(w)\| = 0$, donc $g_n(w) = 0 = f(w)$ pour tout n et la convergence de $(g_n(w))$ vers $g(w)$ est triviale.

D'autre part, l'inégalité $\|g_n - f\| \leq 3\|f\|$ est vraie sur tout Ω car si

$$\|f_n(w)\| < 2\|f(w)\|$$

on aura

$$\|g_n(w)\| = \|f_n(w)\| < 2\|f(w)\|$$

et si

$$\|f_n(w)\| \geq 2\|f(w)\|$$

On aura

$$\|g_n(w)\| = 0.$$

On peut donc appliquer le théorème de la *convergence dominee de Lebesgue* à la suite de fonctions mesurables positives $\|g_n - f\|$ avec la fonction dominante $3\|f\|$ qui est μ-intégrable sur Ω par hypothese.

On deduit que $\|g_n - f\|d\mu$ tend vers 0 et comme g_n tend μ-p.p. vers f, on conclut la Bochner integrabilite de f.

b) cas où $\mu(\Omega) = +\infty$

On se ramène au cas précèdent en découpant Ω en une famille dénombrable de traches de mesure finie et la tranche $\{f = 0\}$ qui peut être de mesure infinie.

Plus précisemment, définissons

$$D_0 := \{\|f\| > 1\}, D_k := \{2^{-k} < \|f\| \leq 2^{-k+1}\}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

On a alors une partition dénombrable de Ω constituée par $\{f = 0\}$ et les D_k. Chaque D_k est de μ-mesure finie en raison de la μ-intégrabilité de $\|f\|$ et grâce a l'inégalité de *Markov* :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mu(D_k) \leq \mu(\{\|f\| > 2^{-k}\}) \leq 2^k \int_\Omega \|f\| d\mu < +\infty.$$

Notons μ_k la mesure de densité 1_{D_k} par rapport à μ et Σ_k la tribu trace de Σ sur D_k. En appliquant le cas $\mu(\Omega)$ fini avec l'espace mesuré (D_k, Σ_k, μ_k), on peut construire une suite $(g_{k_n})_{n\geq 1}$ de fonctions simples définies sur D_k vers f telles que $(g_{k,n})$ converge μ_k-p.p. sur D_k vers la restriction de f à D_k et

$$\|g_{k,n}(w) - f(w)\| \leq 3\|f(w)\|$$

pour tout $w \in D_k$.

On prolonge $g_{k,n}$ à tout Ω en posant $g_{k,n}(w) := 0$ pour $w \notin D_k$ et ce prolongement verifie

$$g_{k,n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\, 1_{D_k} \quad \mu - p.p$$

et

$$\|g_{k,n} - f\| \leq 3\|f\|1_{D_k}$$

Finalement, on definit une nouvelle suite de fonctions simples g_n en posant :

$$g_n := \sum_{k=1}^{n} g_{k,n}$$

et on voit que (g_n) converge vers f μ-p.p. De plus

$$\|g_n - g\| = \sum_{k=1}^{n} \|g_{k,n} - f\| 1_{D_k} \leq 3\|f\| 1_{D_k} \leq 3\|f\|.$$

On peut finalement appliquer le *théorème de convergence dominee* pour obtenir la convergence vers 0 de $\int\limits_{\Omega} \|g_n - f\| d\mu$ et conclure la Bochner intégrabilité de f.

□

Corollaire 2.1.3 1. *Si $f : \Omega \to E$ est μ-Bochner intégrable, on a*

$$\|\int\limits_{\Omega} f d\mu\| \leq \int\limits_{\Omega} \|f\| d\mu < +\infty \tag{2.10}$$

2. *Si E est séparable et $\int\limits_{\Omega} \|f\| d\mu < +\infty$, alors f est μ-Bochner intégrable et verifie* (2.10).

Démonstration. Démontrons le premier point. Puisque f est μ-Bochner intégrable, $\int\limits_{\Omega} \|f\| d\mu < +\infty$ et nous avons au moins une suite (f_n) de fonctions simples convergent μ-p.p. vers f. à partir de cette suite, nous pouvons definir par 2.9) une suite (g_n) de fonctions simples verifiant

a) $\int\limits_{\Omega} f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} g_n d\mu$,

b) $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu-p.p} f$.

c) $\|g_n\| \leq 2\|f\|$.

Comme g_n est simple, on a par (2.4),

$$\|\int\limits_{\Omega} g_n d\mu\| \leq \int\limits_{\Omega} \|g_n\| d\mu, \tag{2.11}$$

et par *a)*

$$\|\int\limits_{\Omega} f d\mu\| = \lim_{n\to\infty} \|\int\limits_{\Omega} g_n d\mu\|, \tag{2.12}$$

Via le théorème de la converegence dominée et en utilisant $b)$ et $c)$ on a

$$\int_{\Omega} \|g_n\| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} \|f\| d\mu. \tag{2.13}$$

En utilisant (2.12) et (2.13) pour passer a la limite dans (2.11), on obtient la premiere inegalite de (2.10).

Le deusième point est évident à partir du premier.

$\square$

Corollaire 2.1.4 *Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, E_2 étant séparable. Soit $T : E_1 \to E_2$ un opérateur linéaire continu et $f : (\Omega, \Sigma, \nu) \to (E_1, \mathcal{B}(E_1)$ une application μ-Bochner intégrable. Alors*

$$T(f) = Tof : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (E_2, \mathcal{B}(E_2))$$

est μ-Bochner intégrable et

$$\int_{\Omega} T(f) d\mu = T(\int_{\Omega} f d\mu) \tag{2.14}$$

Démonstration.

f étant Bochner intégrable et $(\Sigma, \mathcal{B}(E_1))$-mesurable et T est borélienne parce que continue, donc $(\mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2))$-mesurable Ainsi Tof est $(\Sigma, \mathcal{B}(E_2))$-mesurable.

La μ-Bochner intégrabilite de $T(f)$ découle facilement de celle de f, de la continuité de T et du Théorème 2.1.2 en écrivant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|T(f)\| d\mu &\leq \int_{\Omega} \|T\| \|f\| d\mu \\ &= \|T\| \int_{\Omega} \|f\| d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

La finitude de cette derniere intégrale provient de la premiere partie du théorème (2.1.2) appliquée à f et l'espace $\mathcal{B}(E_1)$. L'espace $\mathcal{B}(E_2)$ étant séparable, la finitude de $\int_{\Omega} \|T(f)\| d\mu$ implique la μ-Bochner intégrabilité de $T(f)$, par la deuxième partie du Théorème (2.1.2) appliquée à $T(f)$ et l'espace $\mathcal{B}(E_2)$. Vérifions maintenant (2.14). Par la μ-Bochner intégrabilité de f, nous disposons d'une suite de fonctions simples (f_n), $f_n : \Omega \to \mathcal{B}(E_1)$, telle que

$$\int\limits_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.15}$$

et

$$\int\limits_{\Omega} f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\Omega} f d\mu \tag{2.16}$$

par la continuité de f, on déduit

$$T(\int\limits_{\Omega} f_n d\mu) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T(\int\limits_{\Omega} f d\mu) \tag{2.17}$$

La fonction simple f_n peut s'écrire

$$f_n = \sum_{i\in I_n} f_{n,i} 1_{A_{n,i}}$$

avec I_n fini, les $A_{n,i}$ deux à deux disjoints pour n fixé et $\mu(A_{n,i}) < +\infty$.

Pour tout $w \in \Omega$

$$(Tof_n)(w) = T(f_n(w)) = T(\sum_{i\in I_n} f_{n,i} 1_{A_{n,i}}(w)) = \sum_{i\in I_n} 1_{A_{n,i}}(w) T(f_{n,i}),$$

par la linéarité de T (les $f_{n,i}$ sont des vecteurs de $\mathcal{B}(E_1)$, et pour w fixé les $1_{A_{n,i}}(w)$ sont des scalaires).

Cette égalité vraie pour tout $w \in \Omega$ peut se réécrire sous la forme de l'égalité fonctionnelle

$$T(f_n) = \sum_{i\in I_n} f_{n,i} 1_{A_{n,i}},$$

qui montre que $T(f_n)$ est une fonction simple définie de Ω à valeurs dans $\mathcal{B}(E_2)$. En particulier l'intégrale de Bochner $\int\limits_{\Omega} T(f_n) d\mu$ a bien un sens. Elle peut se calculer comme suit.

$$\int\limits_{\Omega} T(f_n) d\mu = \sum_{i\in I_n} T(f_{n,i}) \mu(A_{n,i}) = T(\sum_{i\in I_n} f_{n,i} \mu(A_{n,i})) = T(\int\limits_{\Omega} f_n d\mu)$$

La première et la troisième égalité ci-dessus expriment la définition de l'intégrale de Bochner d'une fonction simple, la deuxième égalité vient de la linéaritè de T.

Pour établir 2.14, nous allons passer à la limite dans l'égalité

$$\int_\Omega T(f_n)d\mu = T(\int_\Omega f_n d\mu)$$

Par 2.17,le second membre converge vers $T(\int_\Omega f d\mu)$.

Pour justifier la convergence du premier membre vers $\int_\Omega T(f)d\mu$, on écrit les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\|\int_\Omega T(f_n)d\mu - \int_\Omega T(f)d\mu\| &= \|\int_\Omega T(f_n - f)d\mu\| \\ &\leq \int_\Omega \|T(f_n - f)\|d\mu \\ &\leq \int_\Omega \|T\|\|f_n - f\|d\mu \\ &= \|T\|\int_\Omega \|f_n - f\|d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.2 *L'examen de la preuve ci-dessus montre que la séparabilité de $\mathcal{B}(E_2)$ n'a été utilisée que pour vérifier la μ-Bochner integrabilité de $T(f)$. Par conséquent si $\mathcal{B}(E_2)$ n'est pas séparable, (2.14) reste valide à condition de rajouter l'hypothèse de μ-Bochner intégrabilité de $T(f)$.*

2.2 Intégrale au sens de Pettis

Définition 2.2.1 *Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, E un espace de Banach , $f : \Omega \to E$ une application faiblement mesurable, On dit que f est* **scalairement μ-intégrable** *si*

$$\forall x' \in E', \quad \int_\Omega |\langle x', f(t)\rangle| d\mu < +\infty$$

Pour construire l'intégrale au sens de Pettis de f, on commence par montrer que si f est scalairement intégrable, l'application $x' \mapsto \int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu$ est un èlèment ξ du bidual topologique E'' de E. Si on peut identifier ξ avec un élément ν_f de E, alors on dit que f est **Pettis intégrable** et son intégrale au sens de Pettis est précisément cet élément ν_f de E.

Proposition 2.2.1 *Si f est scalairement μ-intégrable, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \xi : & E' & \to & \mathbb{R} \\ & x' & \mapsto & \int_\Omega \langle x', f(t)\rangle d\mu \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur E', donc un élément du bidual topologique E''.

Démonstration.

La linéarite de ξ découle immédiatement de la linéarité de la forme de dualité (par rapport à la première variable) et de celle de l'intégrale au sens de Lebesgue des fonctions définies de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour prouver sa continuite. nous introduisons l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & E' & \to & \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu) \\ & x' & \mapsto & \langle x', f\rangle \end{array}$$

Nous allons verifier que Ψ est continue grâce au *théorème du graphe fermé*.

Cela revient à montrer que si $(x'_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans E' vérifiant : $x'_n \to x'$ et

$$\Psi(x'_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega,\Sigma,\mu)}{\longrightarrow}} z$$

ou $x' \in E'$ et $Z \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$, alors $\Psi(x') = z$

La convergence de x'_n vers x' dans E' implique en particulier

$$\forall w \in \Omega, \langle x'_n, f(w)\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x', f(w)\rangle$$

autrement dit

$$\forall w \in \Omega, (\Psi(x'_n))(w) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\Psi(x'))(w) \tag{2.18}$$

d'autre part comme $\Psi(x'_n)$ converge vers z dans $\mathbf{L}^1_{\mathbf{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$, on peut extraire une sous-suite $(\Psi(x'_{n_k}))$ qui converge vers z μ-p.p sur Ω.

On déduit de (2.18) que $z = \Psi(x)$ μ-p.p sur Ω,

Autrement dit ces deux applications sont égales en tant qu'éléments de l'espace $\mathbf{L}^1_{\mathbf{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

La continuitè de Ψ est ainsi établie.

Cette continuité se traduit par l'inégalité

$$\forall x' \in E', \|\Psi(x')\| \leq \|\Psi\| \|x'\|$$

ce qui s'ècrit encore

$$\int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu \leq \|\Psi\| \|x'\|$$

d'où

$$\forall x' \in E', |\xi(x')| = |\int_\Omega \langle x', f\rangle d\mu| \leq \int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu \leq c\|x'\|$$

ce qui établit la continuité de ξ.

□

Remarque 2.2.1 *Si f est* ***Bochner intégrable****, l'appartenance de ξ à E'' est immédiate en ècrivant pour tout $x' \in E'$,*

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \langle x', f\rangle d\mu| &\leq \int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu \\ &\leq \int_\Omega \|x'\| \|f\| d\mu \\ &= \|x'\| \int_\Omega \|f\| d\mu \end{aligned} \tag{2.19}$$

et en notant que par la μ-Bochner intégrabilité de f, $\int_\Omega \|f\| d\mu$ est finie (et constante relativement à x'). Comme sous-produit de (2.19)*, notons au passage que la μ-***Bochner intégrabilité** *de f implique son intégrabilité scalaire.*

Définition 2.2.2 *(intégrale au sens de Pettis)*

Soit $f : \Omega \to E$ une application scalairement μ-intégrable et ξ l'élément de E'' associé à *f par*

$$\langle \xi, x' \rangle_{E'',E'} := \int_\Omega \langle x', f \rangle d\mu$$

On dit que f est ***Pettis intégrable*** *si* $\xi \in J(E)$, *image canonique isométrique de E dans son bidual, autrement dit si*

$$\exists \nu_f \in E, \forall x' \in E', \langle x', \nu_f \rangle_{E',E} = \int_\Omega \langle x', f \rangle_{E',E} d\mu \tag{2.20}$$

On définit alors l'intégralè au sens de Pettis de f en posant

$$\int_\Omega^{Pettis} f d\mu = \int_\Omega f d\mu := \nu_f \tag{2.21}$$

Autrement dit, lorsqu'elle existe, l'intégrale au sens de Pettis $\int_\Omega f d\mu$ est **l'unique** vecteur ν_f de E vérifiant

$$\forall x' \in E', \langle x', \nu_f \rangle = \int_\Omega \langle x', f \rangle d\mu. \tag{2.22}$$

Notons que si un tel ν_f existe, il est forcément unique puisque les formes linéaires continues sur E séparent les points de E, c'est à dire

si $\langle x', \nu_f \rangle = \langle x', \delta_f \rangle$ pour tout $x' \in E'$, nécessairement $\nu_f = \delta_f$.

Par contruction l'intégrale au sens de Pettis commute avec les formes linéaires continues puisque lorsque f est Pettis intégrable, (2.22) peut se réécrire

$$\forall x' \in E', \ \ \langle x', \int_\Omega f d\mu \rangle = \int_\Omega \langle x', f \rangle d\mu. \tag{2.23}$$

Proposition 2.2.2 *L'ensemble des fonctions Pettis intégrables définies de* (Ω, Σ, μ) *à valeurs dans E noté* $P_e(\mu, E)$ *est un* ***espace vectoriel****, et l'intégrale de Pettis est un opérateur linéaire de cet espace dans E. De plus pour toute f Pettis-intégrable*

$$\| \int_\Omega^{Pettis} f d\mu \|_X \leq \int_\Omega \|f\| d\mu \leq +\infty \tag{2.24}$$

Preuve de (2.24).

Soit $\nu_f := \int_\Omega^{Pettis} f d\mu$. Par *le théorème de Hahn-Banach*, il existe $x' \in E'$ telle que

$\langle x', \nu_f\rangle = \|\nu_f\|_E$ et $\|x'\|_{E'} = 1$.

Nous avons alors,

$$\begin{aligned}\|\int_\Omega^{Pettis} f d\mu\|_X &= \langle x', \nu_f\rangle \\ &= \int_\Omega \langle x', f\rangle d\mu \\ &\leq \int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu \\ &\leq \int_\Omega \|x'\|\|f\| d\mu \\ &= \int_\Omega \|f\| d\mu \leq +\infty\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.2 *Soit $f \in P(\mu, E)$. on définie la Pettis-norme de f par*

$$\|f\|_{P_e} = \sup_{x'\in\overline{B}_{E'}} \int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu \tag{2.25}$$

qui est équivalente à la norme

$$\sup_{E\in\Sigma} \|\int_E f d\mu\|. \tag{2.26}$$

En effet.

$$\begin{aligned}\sup_{E\in\Sigma} \|\int_E f d\mu\| &= \sup_{E\in\Sigma}(\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}} |\langle x', \int_E f d\mu\rangle|) \\ &\leq \sup_{x'\in\overline{B}_{E'}} |\langle x', \int_\Omega f d\mu\rangle| \\ &= \sup_{x'\in\overline{B}_{E'}} \int_\Omega |\langle x', f d\mu\rangle| \\ &= \|f\|_{P_e}.\end{aligned}$$

D'autre part :

Si on prendr $\Pi = \{E_i, ..., E_n\}$ une partition de Ω par des éléments de Σ deux à deux disjoint, On obtient :

$$\begin{aligned}
|\langle x', \int_\Omega f d\mu\rangle| &= |\langle x', \sum_{E_i\in\Pi} \int_{E_i} f d\mu\rangle| \\
&\leq \sum_{E_i\in\Pi} |\langle x', \int_{E_i} f d\mu\rangle| \\
&= \sum_{E_i\in\Pi^+} \langle x', \int_{E_i} f d\mu\rangle - \sum_{E_i\in\Pi^-} \langle x', \int_{E_i} f d\mu\rangle \\
&= \langle x', \sum_{E_i\in\Pi^+} \int_{E_i} f d\mu\rangle - \langle x', \sum_{E_i\in\Pi^-} \int_{E_i} f d\mu\rangle \\
&\leq 2 \sup_{E\in\Sigma} |\langle x', \int_E f d\mu\rangle|
\end{aligned}$$

avec $\Pi^+ = \{E_i : \langle x', \int_{E_i} f d\mu\rangle \geq 0\}$

$\Pi^- = \{E_i : \langle x', \int_{E_i} f d\mu\rangle < 0\}$

Nous obtenons alors :

$$\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}} |\langle x', \int_\Omega f d\mu\rangle| \leq 2 \sup_{x'\in\overline{B}_{E'}} (\sup_{E\in\Sigma} |\langle x', \int_E f d\mu\rangle|)$$

$$\|f\|_{P_e} \leq 2 \sup_{E\in\Sigma} \| \int_E f d\mu\|$$

par conséquent

$$\sup_{E\in\Sigma} \| \int_E f d\mu\| \leq \|f\|_{P_e} \leq 2 \sup_{E\in\Sigma} \| \int_E f d\mu\|$$

Théorème 2.2.3 *Une fonction $f : [0,1] \to E$ scalairement intégrable est Pettis integrabe si et seulement si*

$$\{\langle x', f\rangle : \|x'\| \leq 1\}$$

est uniformement intégrable.

2.3 Comparaison de l'intégration au sens de Pettis avec l'intégration au sens de Bochner

Théorème 2.3.1 *Soit $f : \Omega \to E$ une fonction fortement mesurable*

a) f est ***Pettis intégrable*** *si et seulement si il existe une fonction g bornée fortement* *mesurable, et une suite (E_n) d'éléments de Σ deux à deux disjoints, et une suite (x_n) d'èlèments de E tels que :*

$$f = g + \sum_{n=1}^{\infty} x_n 1_{E_n}$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ ***converge inconditionnels****, et on a*

$$\int_E^{Pettis} f d\mu = \int_E^{Pettis} g d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n)$$

b) f est ***Bochner intégrable*** *si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ est* ***absolument convergente****, et on a*

$$\int_E^{Bohner} f d\mu = \int_E^{Bohner} g d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n).$$

Pour la démontration de ce théorème nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.3.2 *Si $f : \Omega \to E$ est une fonction fortement mésurable, alors :*
il existe une fonction $g : \Omega \to E$ bornée fortement mesurable et une fonction $h : \Omega \to E$ fortement mesurable vérifiant

$$h(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 1_{E_n}$$

Pour toute famille $(E_n)_n$ d'éléments de Σ deux à deux disjoint, et $(x_n) \subset E$, tel que :

$$f = g + h$$

Démonstration.

D'après le théorème (1.2.2) de mesurabilité de Pettis, on a $f(\Omega)$ est un sous ensemble séparable de E.

Soit (x_n) une suite dénombrable dense dans $f(\Omega)$. Soit

$$E_n = \{ \, w \in \Omega : f(w) \in [x_n + \overline{B}_E] \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} [x_k + \overline{B}_E] \, \}$$

et

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 1_{E_n}$$

alors h est fortement mesurable d'après la définition et

$$\|f(w) - h(w)\| \leq 1,$$

alors si on prend $g = f - h$ on a g fortement mesurable de plus g est bornée.

$\square$

Démonstration du théorème 2.3.1.

a) pour démontrer la nécessité, on pose f μ-Pettis integrable, alors d'après le lemme 2.28 et la mesurabilité forte de$f$, il existe $g, h : \Omega \to E$, g bornée fortement mesurable , h fortement mesurable, telles que $h(E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n 1_{E_n}$, $(E_n)_n \subset \Sigma$ deux à deux disjoints, et $f = g + h$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_E^{Pettis} f d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E \cap E_n} f d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\int_{E \cap E_n} g d\mu + \int_{\Omega \cap E_n} \sum_{n=1}^{\infty} x_n 1_{E_n} d\mu) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E \cap E_n} g d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n) \\
&= \int_E g d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n).
\end{aligned}$$

Il est claire que la série $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est incoditionnel convergente.

Pour montrer la suffissance, on prende pour simplifier, $\mu(E_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $E \in \Sigma$ alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n) \frac{\mu(E \cap E_n)}{\mu(E_n)}$$

et $\frac{\mu(E \cap E_n)}{\mu(E_n)} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n)$ est inconditionnelle convergente.

En particulier, pour chaque $x' \in E'$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x', x_n \rangle| \mu(E \cap E_n) < \infty$$

et puisque $\langle x', h\rangle$ est μ-integrable, Alors :

$$\begin{aligned}\langle x', \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n)\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x', x_n\rangle \mu(E \cap E_n) \\ &= \int_E x' h d\mu.\end{aligned}$$

Par conséquent : h est Pettis μ-integrable de plus, f est Pettis μ-integrable.

b) Soit f Bochner μ-integrable alors f est μ-integrable.

Soit g une fonction bornée alors g est Bochner μ-integrable, d'où

$$\int_\Omega \|g\| d\mu < \infty,$$

et

$$\int_\Omega \| \sum_{n=1}^{\infty} x_n 1_{E_n} \| < \infty$$

puisque les E_n sont deux à deux disjoints. On a alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \mu(E_n) < \infty$$

i.e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \mu(E_n)$ est absolument convergente.

Corollaire 2.3.3 *Soit $f : \Omega \to E$ une fonction de la forme :*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 1_{E_n}$$

$(E_n) \subset \Sigma$ deux à deux disjoints, Alors :
*i) f est **Pettis intégrable** si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ est **inconditionnel convergente**, et ona :*

$$\int_E^{Pettis} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n)$$

*ii) f est **Bochner intégrable** si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ est **absolument convergente**, et ona :*

$$\int_E^{Bochner} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n)$$

Remarque 2.3.1 *Si $f : \Omega \to E$ est une fonction fortement mesurable, Alors :*

i) f est ***Bochner intégrable*** *si et seulement si ν_f est à variation finie.*

ii) Si f est ***Pettis intégrable*** *, la fonction ν_f peut être à variation infinie (mais σ-finie).*

Proposition 2.3.4 *a) Si $f : \Omega \to E$ est μ-Bochner intégrable, alors f est μ-Pettis intégrable.*

et

$$\int_{\Omega}^{Bochner} f d\mu = \int_{\Omega}^{Pettis} f d\mu \tag{2.27}$$

b) la réciproque est fausse.

Démonstration.

a) Posons $x_0 := \int_{\Omega}^{Bochner} f d\mu$.

On a si f est Bochner intégrable, Alors elle est scalairement intégrable,

En effet,

$$\begin{aligned} |\int_{\Omega} \langle x', f\rangle d\mu| &\leq \int_{\Omega} |\langle x', f\rangle| d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \|x'\| \|f\| d\mu \\ &\leq \|x'\| \int_{\Omega} \|f\| d\mu \end{aligned}$$

f Bohner intégrable alors $\int_{\Omega} \|f\| d\mu$ est finie, et donc f est scalairement intégrable .

En appliquant le corolaire 2.1.4 avec $T = x'$ et $E_2 = \mathbb{R}$ séparable, On obtient.

$$\forall x' \in E', \int_{\Omega} \langle x', f\rangle d\mu = \langle x', \int_{\Omega}^{Bochner} f d\mu\rangle = \langle x', \nu_f\rangle$$

Donc f est μ-Pettis intégrable et $\int_{\Omega}^{Pettis} f d\mu = \nu_f$, ce qui justifie (2.27).

Pour le *b)* et pour montrer que la réciproque est fausse on donne les contres exemples suivants.

2.3.1 Exemples de fonctions Pettis intégrables et non Bochner intégrables

Exemple 1 :

Supposons que E est de dimension infinie.

Alors d'aprés le théorème de ***Dvoretzky-Roger's*** il existe une série **convergente inconditionnelle** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \infty$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition mesurable dénombrable de Ω tel que

$\mu(A_n) > 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, et soit $f : \Omega \to E$ définie par :

$$f(.) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{\mu(A_n)} 1_{A_n}(.)$$

Il est claire que

$$\|f\|_{P_e} < \infty$$

et

$$\|f\| = \infty$$

i.e f est Pettis intégrable mais non Bochner intégrable.

$\square$

Exemple 2 :

Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ est définie par $\mu(\{n\}) = 2^{-n}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, et soit la fonction $f : \mathbb{N} \to E$ donnée par $f(n) = 2^n x_n$.

Nous avons ν_f est σ-finie mais n'est pas finie.

Alors d'aprés la remarque 2.3.1, f est Pettis-intégrable mais non Bochner intégrable.

$\square$

Exemple 3 :

Soit E un espace de Banach de dimention infinie. et soit $(I_n^2 = [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}[)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de $[0,1]$. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on définit $f_n : [0,1] \to E$, par :

$$f_n(w) = \sum_{k=1}^{2^n} e_k^n 1_{I_n^K}(w)$$

avec :

- E_n sont des sous espaces de dimention 2^n tel que la distance de Banach- mazur entre E_n et $I_2^{2^n}$ est 2
- $T_n : I_2^{2^n} \to E_n$ telle que la norme de T_n est 2 et la norme de l'inverse de T_n est 1.
- $\{e_k^n, k = 1, ..., 2^n\}$ les images des vecteurs unités standards $\{U_k^n, k = 1, ..., 2^n\}$ de $I_2^{2^n}$.

Soit $g_n : \Omega \to E$ la fonction support de f_n sur I_2^n i.e

$$g_n(w) = 2^n f_n(2^n w - 1) 1_{I_2^n}(w)$$

On définie la fonction $f : \Sigma \to X$ par

$$f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(w) 1_{I_2^n}(w)$$

On a f fortement mesurable mais non Bochner intégrable. *En effet*, Pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \|f\| d\mu &\geq \sum_{n=1}^{N} \int_{I_2^n} \|g_n\| d\mu \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} 2^n = N,
\end{aligned}$$

mais f est Pettis intégrable.

En effet, nous avons $\langle x', f\rangle \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$ pour tout $x' \in E'$. Pour x' fixé dans $\mathfrak{B}(X')$ On a

$$\begin{aligned}
\int_{I_2^n} |\langle x', f\rangle| d\mu &= \int_{I_2^n} |\langle x', g_n\rangle| d\mu \\
&= \int_{\Omega} |\langle x', f_n\rangle| d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{2^n} \int_{I_k^n} |\langle x', e_k^n\rangle| d\mu \\
&= 2^{-n} \sum_{n=1}^{2^n} |\langle x', e_k^n\rangle| \\
&= 2^{-n} \sum_{n=1}^{2^n} |\langle y_n', T_n U_k^n\rangle| \\
&= 2^{-n} \sum_{n=1}^{2^n} |\langle T_n' y_n', U_k^n\rangle| \\
&\leq 2^{-n} \|T_n' y_n'\|_{l_2^{2^n}} \|\sum_{n=1}^{2^n} U_k^n\|_{l_2^{2^n}} \\
&\leq 2^{-n}.2.\sqrt{2^n} = 2.2^{\frac{-n}{2}}.
\end{aligned}$$

avec : y_n la restriction de x sur E_n. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\langle x', f\rangle| d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_2^n} |\langle x', f\rangle| d\mu \\
&\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{-n}{2}} = 2(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

D'où la Pettis intégrabilité de f

$\square$

Example 4 :

On prend $E = l^2(\mathbb{N}^*)$ et un espace probabilisé (Ω, Σ, μ) sur lequel on peut définir une fonction $f = (f_i)_{i\geq 1} : \Omega \to l^2(\mathbb{N}^*)$ vérifiant :

$$f(\Omega) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}^*} \{u_j\}, \quad u_j = (u_{j,i})_{j\geq 1}$$

$$u_{i,j} = j1_{\{|j|\}}(i)$$

et

$$\mu(f = u_j) = \frac{c}{j^2}$$

Où

$$c.\sum_{j\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{j^2} = 1$$

Nou avons f n'est pas Bochner intégrable. *En effet*, il suffit de vérifier que $\int_\Omega \|f\|d\mu = +\infty$.

Pour cela, introduisons $g_n := \Pi_n(f) = (f_i)_{1\leq i\leq n}$, où Π_n est la projection orthogonale de $l^2(\mathbb{N}^*)$ sur $l^2(\{1,...,n\})$.Il est clair que $\|g_n\| \leq \|f\|$.

On va calculer $\int_\Omega \|g_n\|d\mu$ pour voir qu'elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Ce calcul se réduit à celui de l'espérance d'une variable aléatoire (applications mesurables d'un espace $(E,\ \mu)$ dans $\mathbb{R}$ munie de leur tribu borélienne) positive discrète :

$$\int_\Omega \|g_n\|d\mu = \int_\Omega \|\Pi_n(f)\|d\mu = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*}\|\Pi_n(u_j)\|\mu(f = u_j) \tag{2.28}$$

Or

$$\|\Pi_n(u_j)\| = (u_{j,n}^2 + ... + u_{j,n}^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} |j| & si \quad n \geq |j|; \\ 0 & si \quad n < |j|. \end{cases}$$

d'où en reportant dans (2.28),

$$\int_\Omega \|g_n\|d\mu = \sum_{0<|j|\leq n}|j|\frac{c}{j^2} = 2c\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On en déduit que $\int_\Omega \|f\|d\mu = +\infty$ et donc que f n'est pas μ-Bochner intégrable.

Pour la Pettis-intégrabilité, notons $x^* = (x_i^*)_{i\geq 1}$ un élément quelconque du dual $l^2(\mathbb{N}^*)' = l^2(\mathbb{N}^*)$.

En rappelant que pour l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N}^*)$, la forme de dualité est donnée par $\langle x', h\rangle = \sum_{i\geq 1} h_i x_i'$.

En particulier on a pour tout $j \in \mathbb{Z}^*$, $\langle x', u_j\rangle = jx'_{|j|}$.

Vérifions d'abord que f est μ-scalairement intégrable.

En effet,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu &= \sum_{j\in\mathbf{Z}^*} |\langle x', u_j\rangle| \mu(f = u_j) \\ &= 2c\sum_{n=1}^{\infty} |x_j^*| \frac{1}{j} \\ &\leq 2c(\sum_{n=1}^{\infty} x_j'^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j^2})^{\frac{1}{2}} < +\infty.\end{aligned}$$

Puisque $(\langle x', u_j\rangle \mu(f = u_j))_{j\in\mathbf{Z}^*}$ est une famille de réeles, on peut sommer par paquets indexés par $\{-j, j\}$, d'où

$$\int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (jx_j' - jx_j') \frac{c}{j^2} = 0.$$

Nous venons ainsi d'établir que

$$\forall x' \in (l^2)', \int_\Omega |\langle x', f\rangle| d\mu = 0 = x'(0).$$

Autrement dit, f est μ-Pettis intégrable et $\int_\Omega^{Pettis} f d\mu = 0$.

□

2.4 Comparaison de l'intégration au sens de Pettis avec l'intégration scalaire

Dans ce théorème on donne une condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions scalairement intégrable soient Pettis intégrable.

Théorème 2.4.1 *Soit $f : \Omega \to E$ une fonction scalairement intégrable, alors f est Pettis intégrable si et seulement si :*

$$\begin{aligned} T_f : E' &\to \mathbf{L}^1_\mu \\ x' &\mapsto \langle x', f\rangle \end{aligned}$$

est faiblement−faiblement continue.*

Démonstration.

a) Soit f Pettis intégrable, nous avons :

$$\langle x', \nu_f(E)\rangle = \int_E \langle x', f\rangle d\mu = \langle T_f\, x', 1_E\rangle,$$

pour chaque $E \in \Sigma$ et chaque $x' \in X$.

Alors $\langle T_f(.), 1_E\rangle$ est faiblement* continue dans X', et pour $h \in \mathbf{L}_\infty(\mu)$ la fonction $\langle T_f(.), h\rangle$ est faiblement continue.

On prend une fonction arbitraire $g \in \mathbf{L}_\infty(\mu)$, une suite $(x^*_\alpha) \subset \overline{B}_{E'}$ faiblement* convergent vers x' un élément positive de Σ.

On définie une fonction simple $h \in \mathbf{L}_\infty(\mu)$ tel que $\|g - h\|_{\mathbf{L}_\infty(\mu)} < \infty$.

D'après la continuité faible* de $\langle T_f(.), h\rangle$, il existe α_0 tel que : $|\langle T_f(x'_\alpha), h\rangle - \langle T_f(x'), h\rangle| \leq \varepsilon$.

Pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, On a

$$\begin{aligned}
|\langle T_f(x'_\alpha), g\rangle - \langle T_f(x'), g\rangle| &\leq |\langle T_f(x'_\alpha), g\rangle - \langle T_f(x'_\alpha), h\rangle| + |\langle T_f(x'_\alpha), h\rangle - \langle T_f(x'), h\rangle| \\
&\quad + |\langle T_f(x'), h\rangle - \langle T_f(x'), g\rangle| \\
&\leq \varepsilon + \int_\Omega |\langle x'_\alpha, f\rangle||g - h|d\mu + \int_\Omega |\langle x', f\rangle||g - h|d\mu \\
&\leq \varepsilon(1 + 2\|f\|).
\end{aligned}$$

Donc $\langle T_f(.), g\rangle$ est faiblement* continue.

b) On prend f scalairement intégrable et on fixe $E \in \Sigma$.

Soit $\nu_f(E) \in E''$, on doit montrer que $\nu_f(E) \in E$, Pour cela on montre que $\nu_f(E)$ est faiblement* continue.

Soit $x'_\alpha \to 0$ dans la topologie faible* de E', alors $T_f(x'_\alpha) \to 0$ faiblement dans $\mathbf{L}_1(\mu)$, et donc :

$$\langle x'_\alpha, \nu(E)\rangle = \int_E \langle x'_\alpha, f\rangle d\mu = \int_E T_f x'_\alpha d\mu \to 0$$

□

Corollaire 2.4.2 *Si $f : \Omega \to E$ est* ***Pettis*** ***μ-intégrable****, alors : $T_f : X' \to \mathbf{L}_1(\mu)$ est* ***faiblement compact****.*

Corollaire 2.4.3 *$f : \Omega \to E$ est* ***Pettis μ-intégrable*** *si et seulement si*

$$\{x' \in E'; \langle x', f\rangle = 0 \;\; \mu.p.p\}$$

est faiblement fermé.

Théorème 2.4.4 *Soit $f : \Omega \to E$ une fonction fortement mesurable, f est* ***Pettis-intégrable*** *si et seulement si $\{\langle x', f\rangle, x' \in \overline{B}_{E'}\}$ est relativement faiblement compact dans $\mathbf{L}_1(\mu)$.*

Démonstration.

a) soit f Pettis intégrable, d'après le corolaire 5.1, $T_f : X^* \to \mathbf{L}_1(\mu)$ est faiblement compact.

b) Puisque f est fortement mesurable on peut supposer E séparable.

Pour montrer que T_f est faiblement*-faiblement continue, il suffit de montrer qu'il est séquentiellement faiblement*- faiblement continue.

On prend une suite (x'_n) tel que $x'_n \to x'$ faiblement* dans $\overline{B}_{E'}$, alors : $\langle x'_n, f\rangle \to \langle x', f\rangle$ simplement, puisque $\langle x'_n, f\rangle$ est faiblement relativement compact dans $\mathbf{L}_1(\mu)$.

Soit $\langle x'_{n_k}, f\rangle$ une sous suite de $(\langle x'_n, f\rangle)$ convergeant faiblement vers $h \in \mathbf{L}_1(\mu)$.

On prenant une combinaison convexe des fonction $\langle x'_{n_k}, f\rangle$, $k \in \mathbb{N}$, la suite $\langle x'_{n_k}, f\rangle$ converge vers h en norme de $\mathbf{L}_1(\mu)$ et $h = \langle x', f\rangle$ μ.p.p. Alors $(\langle x'_{n_k}, f\rangle)$ converge faiblement vers $\langle x', f\rangle$ dans $\mathbf{L}_1(\mu)$. Donc $(\langle x'_n, f\rangle)$ converge faiblement vers $\langle x', f\rangle$ dans $\mathbf{L}_1(\mu)$.

□

On donne un autre théorème sur la condition nécessaire et suffissante pour la intégration au sens de Pettis des fonctions fortement mesurables, Pour çela nous avons besoin des résultats suivants.

Proposition 2.4.5 *(Lavalée Poussin)*
Un ensemble $W \subset L_1(\mu)$ est ***faiblement relativement compact*** *si et seulement si :*

i) W est bornnés.

ii) il existe une fonction croissante et convexe $\varphi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ telle que :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$$

et

$$M = \sup_{f \in W} \int_{\Omega} \varphi(|f(w)|)\mu(dw) < \varepsilon.$$

Définition 2.4.1 *(fonction de Young)*
$\Phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est une fonction de ***Young*** *si elle est une fonction convexe croissante tel que :*

$$\Phi(0) = 0.$$

*Pour chaque Φ on définit l'espace d'**Orticz** $\mathbf{L}^{\Phi}$, s'est l'espace des classes d'équivalence des fonctions à valeurs réeles tel que :*

$$\int_{\Omega} \Phi(k(f)) < \infty$$

pour tout $k > 0$ (dépendant de f).
On définit la norme de $\mathbf{L}^{\Phi}$ par :

$$\|f\|_{\Phi} = \sup\{\int_{\Omega} f(w)g(w)\mu(dw) : \int_{\Omega} \Psi(|g(w)|)\mu(dw) \leq 1\},$$

avec Ψ est la fonction complementaire de Φ aux sens du Young.

Théorème 2.4.6 *Soit $f : \Omega \to E$ une fonction fortement mesurable, f est* ***Pettis intégrable*** *si et seulement si il existe une fonction de* ***Young*** *Φ tel que :*

$$\langle X', f \rangle \in \mathbf{L}^{\Phi}(\mu)$$

pour chaque $x' \in E'$ et

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$$

Corollaire 2.4.7 *Soit $f : \Omega \to E$ une fonction fortement mesurable, si $p > 0$ tel que : $\langle X', f \rangle \in \mathbf{L}_p(\mu)$, pour chaque $x' \in E'$, Alors f est* ***Pettis intégrable.***

Théorème 2.4.8 *Soit $f : \Omega \to E$ une fonction fortement mesurable et scalairement intégrable, si E ne contient aucun* ***isomorphe de*** *$\mathcal{C}_0$, alors f est Pettis intégrable.*

Démonstration.

D'aprés le théorème 2.27, il suffit de prendre une fonction $f : \Omega \to E$ de la forme

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 1_{E_n}$$

avec $E_n \in \Omega$ deux à deux disjoints. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x', x_n \rangle \mu(E_n) = \int_{\Omega} |\langle x', f \rangle| d\mu < \infty$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$$

est faiblement inconditionnelle de Cauchy.

Puisque E ne contient aucun isomorphisme de $\mathcal{C}_0$, alors $\sum x_n$ est convergente, i.e f est Pettis intégrable.

□

2.4.1 Exemples de fonctions scalairement intégrables et non Pettis intégrables

Cet exemple montre que l'inverse est faux.

Exemple : Soit

$$\begin{aligned} f :]0,1] &\to \mathcal{C}_0 \\ t &\mapsto f(t) = (2 1_{]2^{-1},1]}(t), 2^2 1_{]2^{-2},2^{-1}]}(t), \ldots, 2^n 1_{]2^{-n},2^{-n+1}]}(t), \ldots) \end{aligned}$$

On prend $x' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \mathcal{C}^* = \mathbf{L}_1$.

Alors

$$\langle x', f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^n 1_{]2^{-n},2^{-n+1}]}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\langle x', f\rangle| d\mu &= \int_0^1 |\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^n 1_{]2^{-n},2^{-n+1}]}| d\mu \\
&\leq \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n 2^n| 1_{]2^{-n},2^{-n+1}]} d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n 2^n| \int_0^1 1_{]2^{-n},2^{-n+1}]} d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| 2^n \mu([0,1] \cap]2^{-n}, 2^{-n+1}]) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| 2^n \mu(]2^{-n}, 2^{-n+1}]) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty.
\end{aligned}$$

Alors $\langle x', f\rangle \in L_1$ i.e f est scalairement μ-intégrable.

D'autre part : il est claire que pour chaque $E \in \Sigma$

$$\int_E f d\mu = \{2\mu(E \cap]2^{-1}, 1]), 2^2\mu(E \cap]2^{-2}, 2^{-1}]), ..., 2^n\mu(E \cap]2^{-n}, 2^{-n+1}]), ...\}$$

En particulie, pour $E =]0,1]$

$$\int_E f d\mu = \{1, 1, ..., 1\} \notin C_0$$

. i.e f n'est pas Pettis intégrable.

□

Chapitre 3

Existence de sélections continues pour une muli-application à valeurs dans $\mathbf{P}_E^1([0,1])$.

Introduction.

Dans ce chapitre nous allons construire une sélection continue d'une multi-application semi-continue inférieurement, à valeurs fermées décomposables dans $\mathbf{P}_E^1([0,1])$.

Ce résultat généralise celui de [27], pour le cas d'une multi-application semi-continue inférieurement, à valeurs fermées décomposables dans $\mathbf{L}_E^1([0,1])$.

Rappelons tout d'abord q'une famille $K \subset \mathbf{P}_E^1([0,1])$ de fonctions définies sur $([0,1],\Sigma,\mu)$ est dite **décomposable** si, pour tout

$$u, v \in K \ \ et \ \ A \in \Sigma : \ \ u\,1_A + v\,(1 - 1_A) \in K$$

ou 1_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A.

Cette notion est dans un sens, similaire à la convexité, mais il existe aussi des différences majores.

Cependant, dans plusieurs cas, la condition de décomposabilité est un bon remplaçant de la convexité.

Un ensemble décomposable a été consideré pour la première fois dans le champ d'analyse multivoque, par *Antosiewicz* et *Cellina* [5], en relation avec le problème d'existence d'une selection continue pour une multi-application continue à valeurs non nécessairement convexes.

Il existe plusieurs résultats dans l'analyse multivoque où la convexité peut être remplacée par la décomposabilité, certains de ces théorèmes seront considérés par la suite [27], [13], est une version décomposable du théorème de sélection de Michael théorème 1.4.1, pour une multi-application semi-continue inférieurement à valeurs convexes.

Définition 3.0.2 *Soit* $([0,1],\Sigma,\mu)$ *un espace mesuré positif,* $\nu : \Sigma \to E$ *une mesure vectorielle.* ν *est dite* ***μ-continue*** *si* $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \nu(A) = 0$, *pour tout* $A \in \Sigma$.

Définition 3.0.3 *Soit* $([0,1],\Sigma,\mu)$ *un espace mesuré positif,* $\nu : \Sigma \to E$ *une mesure vectorielle.* ***La variation de*** ν *est la fonction non-négative* $|\nu|$ *dont la valeur sur un ensemble* $E \in \Sigma$ *est donnée par*

$$|\nu|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|\nu(A)\|,$$

où le suprémum est sur toutes les partitions π *de* E *contenant un nombre fini de d'adhérents deux à deux disjoints de* Σ.
Si $|\nu|([0,1]) < \infty$, *alors* ν *est une mesure de* ***Variation bornée.***

Proposition 3.0.9 *Soit* $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ *une mesure vectorielle dénombrable additive*
$(\mu = (\mu_1, ..., \mu_n))$.
Alors il existe une famille $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ *de sous ensembles mesurables de* $[0,1]$ *tel que :*
(i) $A_\alpha \subset A_\beta$ *pour* $\alpha < \beta$,
(ii) $\mu(A_\alpha) = \alpha\mu([0,1])$.

Démonstration.

D'aprés le corrolaire 1.9.11 on peut construire une famille d'ensembles A_α satisfaisant (i) et (ii) pour $\alpha = \frac{k}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, ..., 2^n$.

En effet, D'aprés le corrolaire (1.9.11), pour B arbirtraire dans Σ, il existe $A \in \Sigma$ tel que

$A \subset B$ et $\mu(A) = \frac{1}{2}\mu(B)$.

On prend $B = [0,1]$ et A_1^1 un sous ensemble de B mesurable tel que

$$\mu(A_1^1) = \frac{1}{2}\mu(B) = \frac{1}{2}\mu([0,1]).$$

On prenant $A_1^2 = [0,1]\backslash A_1^1$, on obtient

$$\mu(A_1^2) = \frac{1}{2}\mu(B) = \frac{1}{2}\mu([0,1]).$$

Supposons que les ensembles A_m^k sont définis pour $m = 1, ..., n$ et $k = 1, ..., 2^m$ tels que

$$\mu(A_m^k) = (\frac{1}{2})^m\mu([0,1])$$

En applique une deuxième fois le corrolaire 1.9.11 sur A_n^k, en prenant l'ensemble mesurable

$A_{n+1}^k \subset A_n^k$ tel que

$$\mu(A_{n+1}^k) = \frac{1}{2}\mu(A_n^k).$$

Soit $A_{n+1}^l = A_{n+1}^k$ pour $l = 2k-1$. et $A_{n+1}^l = A_n^k\backslash A_{n+1}^k$ pour $l = 2k$.

Donc on définit A_{n+1}^l pour $l = 1, ..., 2^{n+1}$ tel que

$$\mu(A_{n+1}^l) = (\frac{1}{2})^{n+1}\mu([0,1]).$$

Pour $\alpha = \frac{k}{2^n}$, en posant

$$A_{\frac{k}{2^n}} = \bigcup_{l=1}^{k} A_n^l.$$

On obtient (i) et (ii).

Finalement pour α arbirtraire dans [0,1] on définit

$$A_\alpha = \bigcup_{\frac{k}{2^n} \leq \alpha} A_{\frac{k}{2^n}}.$$

D'aprés la continuité de la mesure de *Lebesgue* (ii) est satisfaite.

$\square$

Proposition 3.0.10 *Supposons que la fonction : $s \mapsto \mu_s$ définie sur l'espace topologique compact S à valeurs dans l'espace M (de tout les mesures vectorielles dénombrables additives, μ muni de la topologie induite par la norme égale à la variation de μ) est continue. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille d'ensemble mesurables $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ satisfaisant :*
(i) $A_\alpha \subset A_\beta$ pour $\alpha < \beta$,
(ii) $|\mu_s(A_\alpha) - \alpha\mu_s([0,1])| < \varepsilon$ pour tout $\alpha \in [0,1]$ et $s \in S$,
(iii) $\mu(A_\alpha) = \alpha$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, $\{V_{s0}\}_{s0\in S}$ une famille d'ensemble ouverts définis par :

$$V_{s_0} = \{s \in S : |\mu_s - \mu_{s0}| < \frac{1}{2}\varepsilon\}$$

$\{V_{s_0}\}_{s0\in S}$ est un recouvrement ouvert de l'espace compact S.

Soient $s_1, ..., s_k \in S$ tel que $S = V_{s_1} \cup ... \cup V_{s_k}$. D'après la proposition 3.0.9 pour la mesure $\nu = (\mu_{s_1}, ..., \mu_{s_k}, \mu)$, il existe une famille d'ensemble mesurables $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ tel que $A_\alpha \subset A_\beta$ pour tout $\alpha < \beta$ et $\nu(A_\alpha) = \alpha\nu([0,1])$ pour tout $\alpha \in [0,1]$. et on a $\mu(A_\alpha) = \alpha$.

Pour (ii), pour α arbirtraire dans $[0,1]$ et $s \in S$ ona

$$\begin{aligned} |\mu_s(A_\alpha) - \alpha\mu_s([0,1])| &\leq |\mu_s(A_\alpha) - \mu_{s_i}(A_\alpha)| \\ &\quad + |\mu_{s_i}(A_\alpha) - \alpha\mu_{s_i}([0,1])| + |\alpha\mu_{s_i}([0,1])) - \alpha\mu_s([0,1])| \end{aligned}$$

pour s_i choisi tel que $s \in V_{s_i}$, et donc $|\mu_s(A_\alpha) - \mu_{s_i}(A_\alpha)| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

$\mu(A_\alpha) = \alpha\mu([0,1])$ et donc $|\mu_{s_i}(A_\alpha) - \alpha\mu_{s_i}([0,1])| = 0$, c'est à dire (ii) est satisfaite.

□

Proposition 3.0.11 *Soit $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ une famille d'ensembles mesurables vérifiant :*
i) $A_\alpha \subset A_\beta$ pour tout $\alpha < \beta$.
ii) $\mu(A_\alpha) = \alpha$.
Soit $P : S \to [0,1]$, $g : S \to \mathrm{P}_E^1([0,1])$ deux fonctions continues. Alors la multi-application $l(s) = g(s).1_{A_{P(s)}}$ est continue.

Démonstration.

Soit s_0 arbirtraire dans S, pour $s \in S$ on a

$$\begin{aligned}
\|l(s) - l(s_0)\|_{Pe} &= \|g(s)1_{A_{P(s)}} - g(s_0)1_{A_{P(s_0)}}\|_{Pe} \\
&\leq \|g(s)1_{A_{P(s)}} - g(s_0)1_{A_{P(s)}}\|_{Pe} + \|g(s_0)1_{A_{P(s)}} - g(s_0)1_{A_{P(s_0)}}\|_{Pe} \\
&= \sup_{x' \in \overline{B'}} \int_{[0,1]} |\langle x', (g(s) - g(s_0)1_{A_{P(s)}}\rangle| d\mu \\
&\quad + \sup_{x' \in \overline{B'}} \int_{[0,1]} |\langle x', (g(s_0)(1_{A_{P(s)}} - 1_{A_{P(s_0)}})\rangle| d\mu \\
&= \sup_{x' \in \overline{B'}} \int_{A_{P(s)}} |\langle x', (g(s) - g(s_0))| d\mu + \sup_{x' \in \overline{B'}} \int_{[0,1]\setminus A_{P(s_0)}} |\langle x', g(s_0)\rangle| d\mu \\
&\quad + \sup_{x' \in \overline{B'}} \int_{A_{P(s)} - A_{P(s_0)}|} \langle x', g(s_0)\rangle| d\mu + \sup_{x' \in \overline{B'}} \int_{A_{p(s_0)}} |\langle x', (g(s_0))| d\mu \\
&\leq \|g(s) - g(s_0)\|_{Pe} + \|g(s_0)\|_{Pe} \mu(A_{P(s)} - A_{P(s_0)}) \\
&= \|g(s) - g(s_0)\|_{Pe} + \|g(s_0)\|_{Pe} |P(s) - P(s_0)|
\end{aligned}$$

P et g sont continues, d'où la continuité de l.

$\square$

Lemme 3.0.12 *Soit K un ensemble fermé décomposable non vide de $\mathbf{P}^1_E([0,1])$.*
Soit

$$e(K)(t) := \inf\{|u(t)|, u \in K\} \quad p.p.t \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Alors il existe une suite de fonctions $u_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$ telles que :

$$|u_1(t)| \geq |u_2(t)| \geq \ldots$$

i.e $|u_n| \searrow$ p.p.t $\in [0,1]$ et $e(K)(t) = \lim_{n\to\infty} |u_n(t)|$ p.p.t $\in [0,1]$.

Démonstration.

D'aprés la relation 3.1, il existe une suite (v_n) de K telle que $e(K)(t) = \inf_{n\geq 0} |v_n(t)|$, p.p.$t \in [0,1]$.

En prenant $u_1 = v_1$, $u_{n+1} = u_n 1_{T_n} + v_{n+1}(1 - 1_{T_n})$

avec

$$T_n = \{t, |u_n(t)| < |v_{n+1}(t)|\},$$

on a

$$|u_n(t) \leq \inf\{|v_1(t)|, ..., |v_{n+1}(t)|\} \;\; p.p.t \in [0,1],$$

alors

$$|u_1(t)| \geq |u_2(t)| \geq ...$$

et $e(K)(t) = \lim\limits_{n\to\infty} |u_n(t)|$.

□

Proposition 3.0.13 *Soit $K \subset P^1_E([0,1])$ non vide, fermé et décomposable. Alors $\exists u_0 \in K$ tel que $e(K)(t) = |u_0(t)|$ $p.p.t \in [0,1]$.*

Démonstration.

Soit (u_n) une suite d'élements de K tel que $(u_n) \searrow$

$$e(K)(t) = \lim_{n\to\infty} |u_n(t)| \;\; p.p.t \in [0,1].$$

Considérons la multi-application P définie par :

$$P(t) = \overline{\{u_n(t), n \in \mathbb{N}\}} \bigcap \overline{B}(0, e(K)(t))$$

$P(t)$ est non vide.

En effet. $e(K)(t) = \lim\limits_{n\to\infty} |u_n(t)|$, alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0; |u_n(t)| - e(K)(t)| < \varepsilon.$$

Alors

$$-\varepsilon + e(K)(t) < |u_n(t)| < \varepsilon + e(K)(t),$$

i.e,

$$|u_n(t)| \in \overline{B}(0, \varepsilon + e(K)(t)).$$

D'où

$$\bigcup_{k \geq n_0} \{u_k(t)\} \in \overline{B}(0, e(K)(t)),$$

i.e,

$$\overline{\{u_n(t)\}} \bigcap \overline{B}(0, \varepsilon + e(K)(t)) \neq \varnothing$$

D'autre part P est mesurable p.p.$t \in [0,1]$.

En effet, $P : [0,1] \to \mathbb{R}$. Soit B un ouvert de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
P^{-1}(B) &= \{t \in [0,1] : P(t) \cap B \neq \varnothing\} \\
&= \{t \in [0,1] : \overline{\{u_n(t)\}} \cap \overline{B}(0, e(K)(t)) \cap B \neq \varnothing\} \\
&= \{t \in [0,1] : \overline{\{u_n(t)\}} \cap \overline{B}(0, r) \neq \varnothing\} \\
&= \{t \in [0,1] : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; |u_n(t)| < r\} \\
&= \bigcap_{k \geq n_0} \{t \in [0,1] : |u_k(t)| < r\} \\
&= \bigcap_{k \geq n_0} u_k^{-1}(] - \infty, r[) \in \Sigma.
\end{aligned}$$

$P(t) \neq \varnothing$ et P mesurable, d'après le théorème *d'existence de sélections mesurables* théorème 1.5.16,

$$\exists u_0 \in \Sigma : u_0(t) \in P(t), \quad p.p.t \in [0,1].$$

On doit montrer que $u_0 \in K$.

On fixe $i \in \mathbb{N}$, pour $n \in \mathbb{N}$ on prend

$$T_n = \{t \in [0,1] : |u_n(t) - u_0(t)| \leq \frac{1}{i}\},$$

alors

$$\mu([0,1] \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} T_n) = 0.$$

En effet, on a $u_0 \in p(t)$ p.p.$t \in [0,1]$ alors $u_0(t) \in \overline{\{u_n(t)\}}$.

Soit

$$v_i(t) = u_1(t)1_{T_1} + u_2(t)1_{T_2/T_1} + \ldots + u_n(t)1_{T_n/\bigcup_{k\leq n} T_k} + \ldots,$$

puisque $u_n \in K$ et K décomposable alors $v_i \in K$ et

$$\begin{aligned} |v_i(t) - u_0(t)| &\leq |(u_1(t) - u_0(t))1_{T_1}| + \ldots + |(u_n(t) - u_0(t))1_{T_n/\bigcup_{k\leq n} T_k}| + \ldots \\ &\leq \frac{1}{i} \ \ p.p.t \in [0,1]. \end{aligned}$$

D'où $u_0(t) = \lim_{i\to\infty} v_i(t)$ i.e. $u_0 = \lim_{i\to\infty} v_i$. $v_i \in K$ et K fermé alors $u_0 \in K$, et on a $e(K)(t) = \lim_{n\to\infty} |u_n(t)| = \lim_{i\to\infty} v_i(t) = u_0$.

□

Proposition 3.0.14 *Soient S un espace compact, $K : S \rightrightarrows \mathbf{P}^1_E([0,1])$ une multi-application semi-continue inférieurement à valeurs fermées décomposables.*
Alors la multi-application $P : S \rightrightarrows \mathbf{P}^1_E([0,1])$ définie par $s \in S$

$$P(s) := \{v \in \mathbf{P}^1_E([0,1]) : v(t) \geq e(K(s))(t) \ \ p.p.t \in [0,1]\}, \ \ \forall s \in S$$

est semi-continue inférieurement à valeurs décomposable convexe.

Démonstration.

Il est claire que P est à valeurs décomposables, d'aprés la décomposabilité des valeurs de K.

Pour la semi-continuité inférieure, on considère A un ensemble fermé de $\mathbf{P}^1_E([0,1])$. On doit monter que pour toute suite (s_n) de S telle que $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s_0$ et $P(s_n) \subset A$ alors

$$P(s_0) \subset A$$

Soit $v_0 \in P(s_0)$ arbirtraire, $v_0(t) \geq e(K(s_0))(t)$, d'aprés la proposition 3.0.13 $\exists u_0 \in K(s_0)$ tel que

$$|u_0(t)| = e(K(s_0))(t) \ \ p.p.t \in [0,1],$$

alors

$$v_0(t) \geq |u_0(t)|, \quad p.p.t \in [0,1].$$

Puisque $K(s)$ est semi-continue inférieurement, d'aprés le lemme 1.6.3 il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbf{P}_E^1([0,1])$, avec $u_n \in K(s_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|u_n - u_0\|_{Pe} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors la suite (v_n) de la forme

$$v_n(t) = |u_n(t)| - v_0(t) - |u_0(t)|, \quad p.p.t \in [0,1],$$

converge vers v_0 pour $n \to \infty$, et $v_n \in P(s_n) \subset A$

En effet,

$$u_n \in K(s_n) \subset \mathbf{P}_E^1([0,1]),$$

$$u_0 \in K(s_0) \subset \mathbf{P}_E^1([0,1]),$$

$$v_0 \in P(s_0) \subset \mathbf{P}_E^1([0,1]).$$

Alors

$$v_n \in \mathbf{P}_E^1([0,1]).$$

$v_0 \in P(s_0)$, alors $v_0(t) > |u_0(t)|$ donc $v_n(t) > |u_n(t)| > e(K(s_n))(t)$

Puisque, A fermé, on aura $v_0 \in A$. v_0 etant arbirtraire dans $P(s_0)$ et donc $P(s_0) \subset A$, par conséquent P est semi continue inférieurement.

□

Proposition 3.0.15 *Soit $K : S \rightrightarrows \mathbf{P}_E^1([0,1])$ une multi-application semi-continue inférieurement à valeurs fermées décomposables et $\varphi : S \to \mathbf{P}_E^1([0,1])$, $g : S \to \mathbf{P}_E^1([0,1])$ deux applications continues telles que l'ensemble*

$$L(s) = \{u \in K(s) : \| u(t) - g(s)(t) \|_{Pe} < \| \varphi(s)(.) \|_{Pe}, \; p.p.t \in [0,1]\}$$

est non vide pour tout $s \in S$, alors la multi-application

$$L : S \rightrightarrows \mathbf{P}^1_E([0,1])$$

est semi-continue inférieurement est à valeurs décomposables.

Démonstration.

D'après la décomposabilité des valeurs de K il est claire que L est à valeurs décomposables.

Pour montrer la semi-continuité inférieure de L, on considère un ensemble arbirtraire F fermé dans $\mathbf{P}^1_E([0,1])$, et on montre que pour toute suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S telle que

$$\|s_n - s_0\|_{Pe} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $L(s_n) \subset F$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $L(s_0) \subset F$.

Soit $u_0 \in L(s_0)$, alors $u_0 \in K(s_0)$, d'aprés la semi-continuité inférieure de K, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{P}^1_E([0,1])$ telle que $u_n \in K(s_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_{Pe} = 0$.

Sans perdre de Généralités nous pouvons assumer que $u_n(t)$, $g(s_n)(t)$ et $\varphi(s_n)(t)$ convergent vers $u_0(t)$, $g(s_0)(t)$ et $\varphi(s_0)(t)$, p.p.$t \in [0,1]$ respectivement.

D'après le théorème de *Lusin* théorème 1.5.9 et *Egoroff* théorème 1.9.10, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il exist un compact $I_i \subset [0,1]$ que les restrictions des fonctions u_n, $g(s_n)$ et $\varphi(s_n)$ à I_i sont continues et les suites (u_n), $(g(s_n))$ et $(\varphi(s_n))$ convergent uniformément vers u_0, $g(s_0)$, $\varphi(s_0)$ respectivement.

En supposant

$$\|\varphi(s_0)(t))\|_{Pe} < \frac{1}{i}$$

pour $t \in I_i$, puisque $u_0 \in L(s_0)$, alors

$$\|u_0(t) - g(s_0)(t)\|_{Pe} < \|\varphi(s_0)(t)\|_{Pe}$$

et $|u_n(t) - g(s_n)(t)| - \varphi(s_n)(t) \longrightarrow |u_0(t) - g(s_0)(t)| - \varphi(s_0)(t)$ uniformément pour $n \to \infty$.

Alors, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_i$ et pour tout $t \in I_i$;

$$\|u_n(t) - g(s_n)(t)\|_{Pe} < \|\varphi(s_n)(t)\|_{Pe}$$

Nous pouvons en plus supposer que $n_1 < n_2 < \ldots.$

Posons $v_n = u_n 1_{I_i} + w_n 1_{[0,1]/I_i}$; pour $n_i \leq n < n_{i+1}$, où w_n sont des éléments arbirtraires mais fixés dans $L(s_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

i.e $\|w_n(t) - g(s_n)(t)\|_{Pe} < \|\varphi(s_n)(t)\|_{Pe}$ p.p.$t \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_0.

En effet, Pour $n_i \leq n < n_{i+1}$ et pour $x' \in \overline{B'}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} |\langle x', v_n(t) - u_0(t)\rangle| dt &\leq \int_{I_i} |\langle x', u_n(t) - u_0(t)\rangle| dt + \int_{[0,1]/I_i} |\langle x', w_n(t) - u_0(t)\rangle| dt \\
&\leq \int_{I_i} |\langle x', u_n(t) - u_0(t)\rangle| dt + \int_{[0,1]/I_i} |\langle x', w_n(t) - g(s_n)(t)\rangle| dt \\
&\quad + \int_{[0,1]/I_i} |\langle x', g(s_n)(t) - g(s_0)(t)\rangle| dt \\
&\quad + \int_{[0,1]/I_i} |\langle x', g(s_0)(t) - u_0(t)\rangle| dt \\
&\leq \int_{I_i} |\langle x', u_n(t) - u_0(t)\rangle| dt + \int_{[0,1]/I_i} |\langle x', \varphi(s_n)(t)\rangle| dt \\
&\quad + \int_{[0,1]/I_i} |\langle x', g(s_n)(t) - g(s_0)(t)\rangle| dt \\
&\quad + \int_{[0,1]/I_i} |\langle x', \varphi(s_0)(t)\rangle| dt \\
&\leq \int_{I_i} |\langle x', u_n(t) - u_0(t)\rangle| dt + \int_{[0,1]/I_i} |\langle x', \varphi(s_n)(t) - \varphi(s_0)(t)\rangle| dt \\
&\quad + \int_{[0,1]/I_i} |\langle x', g(s_n)(t) - g(s_0)(t)\rangle| dt \\
&\quad +2 \int_{[0,1]/I_i} |\langle x', \varphi(s_0)(t)\rangle| dt
\end{aligned}$$

Alors $\|v_n - u_0\|_{Pe} \leq \|u_n - u_0\| + \|g(s_n) - g(s_0)\|_{Pe} + \|\varphi(s_n) - \varphi(s_0)\|_{Pe}$

D'où la convergence de (v_n) vers u_0.

D'autre part, u_n, $w_n \in L(s_n) \subset K(s)$, $K(s)$ étant décomposable, alors $v_n \in L(s_n) \subset F$.

Comme F est fermé on aura $u_0 \in F$.

u_0 étant arbirtraire dans $L(s_0)$, alors $L(s_0) \subset F$ et par conséquent L est semi continue inférieurement.

$\square$

Lemme 3.0.16 *Soit $K : S \rightrightarrows \mathbf{P}^1_E([0,1])$ une multi-application semi continue inférieurement à valeurs fermées décomposables.*
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, ils existe deux fonctions continues

$$g : S \to \mathbf{P}^1_E([0,1])$$

et

$$\varphi : S \to \mathbf{P}^1_E([0,1])$$

telle que

$$\|\varphi(s)\|_{Pe} < \varepsilon, \quad pour \ \ chaque \quad s \in S,$$

et

$$L(s) = \{u \in K(s) : \|u(t) - g(s)(t)\|_{Pe} < \|\varphi(s)(t)\|_{Pe}, \quad p.p.t \in [0,1]\}$$

est non vide pour tout $s \in S$.

Démonstration.

On fixe $\varepsilon > 0$, soit $s_0 \in S$, $u_0 \in K(s_0)$ et soit

$$P_{s_0,u_0}(s) := \{v \in \mathbf{P}^1_E([0,1])/v(t) \geq e(K(s) - u_0)(t), \quad p.p.t \in [0,1]\}$$

d'aprés la Proposition 3.0.14, $P_{s_0,u_0} : S \rightrightarrows \mathbf{P}^1_E([0,1])$ est semi-continue inférieurement à valeurs fermées convexes.

De plus $0 \in P_{s_0,u_0}(s_0)$ puisque

$$e(k(s_0) - u_0)(t) = \inf\{|u(t) - u_0(t)|, \ u(t) \in K(s_0)\} = 0 \quad p.p.t \in [0,1],$$

alors d'aprés le théorème de sèlection continue de Michael théorème 1.4.1, il existe une fonction continue

$$\varphi_{s_0,u_0} : S \to \mathbf{P}^1_E([0,1])$$

telle que

$$\varphi_{s_0,u_0}(s) \in P_{s_0,u_0}(s), \quad \forall s \in S$$

i.e

$$\varphi_{s_0,u_0}(s)(t) \geq e(K(s) - u_0)(t) \quad p.p.t \in [0,1], \tag{3.2}$$

pour tout $s \in S$, et

$$\varphi_{s_0,u_0}(s_0) = 0$$

Considérons la famille

$$\{V_{s_0,u_0}; s_0 \in S, u_0 \in K(s_0)\}$$

tel que

$$V_{s_0,u_0} = \{s \in S; \|\varphi_{s_0,u_0}(s)\|_{Pe} < \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

On a $s_0 \in V_{s_0,u_0}$ et les ensembles V_{s_0,u_0} sont ouverts, et donc la famille

$$\{V_{s_0,u_0}; s_0 \in S, u_0 \in K(s_0)\}$$

est un recouvrement ouvert de l'espace compact S, donc on peut construire une partition finie de l'unité sub alterne à ce recouvrement, $P_1(s), ..., P_N(s)$.

Soit V_{s_i,u_i} tel que $P_i^{-1}(]0,1]) \subset V_{s_i,u_i}$ pour $i = 1, 2, ..., N$.

Alors, pour chaque $s \in S$ et $i = 1, 2, ..., N$, l'inégalité suivante est satisfaite

$$P_i(s)\|\varphi_i(s)(t)\|_{Pe} < \frac{\varepsilon}{4} P_i(s) \tag{3.3}$$

pour $\varphi_i(s) = \varphi_{s_i,u_i}$.

On considère la mesure μ_s avec les dérivés de *Radon-Nikodym* $(\varphi_1(s)(t), ..., \varphi_N(s)(t))$. Puisque les fonctions φ_i sont continues sur S par rapport à la norme $\|.\|_{Pe}$: μ_s est continue dans l'espace M (de mesures de vecteur completes nonatomiques avec la topologie induite par la norm égale à variation de μ).

Alors d'aprés la proposition (3.0.10), il existe une famille $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ d'ensembles mesurables telle que :

(i) $A_\alpha \subset A_\beta$ pour $\alpha < \beta$

(ii) $|\mu_s(A_\alpha) - \alpha\mu_s([0,1])| < \frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{N}$ pour tout $s \in S$, $\alpha \in [0,1]$

et $\mu(A_\alpha) = \alpha$.

On définit les fonctions φ et g par :

$$\varphi(s) := \sum_{i=1}^{N} (\varphi_i(s) + \frac{\varepsilon}{4}) 1_{A_{Z_i(s)}/A_{Z_{i-1}(s)}}$$

et

$$g(s) := \sum_{i=1}^{N} u_i 1_{A_{Z_i(s)}/A_{Z_{i-1}(s)}}$$

avec $Z_0(s) = 0$ et $Z_i(s) = p_1(s) + ... + p_i(s)$ pour $i = 1, ...N$, et $s \in S$.

D'après la proposition 3.0.11, g et φ sont continues dans S.

On doit montrer que

$$\|\varphi(s)\|_{Pe} < \varepsilon$$

pour tout $s \in S$.

D'aprés la formule (ii) pour $x' \in \overline{B'}$:

$$|\int_{A_\alpha} \langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle dt - \alpha \int_{[0,1]} \langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle dt| \leq \frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{N}$$

pour tout $\alpha \in [0,1]$. De plus

$$\begin{aligned}
\int_{A_{Z_i(s)}/A_{Z_{i-1}}(s)} |\langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle| dt &\leq |\int_{A_{Z_i(s)}} |\langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle dt - Z_i(s) \int_{[0,1]} \langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle dt| \\
&+ |-\int_{A_{Z_{i-1}(s)}} \langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle dt + Z_{i-1}(s) \int_{[0,1]} \langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle dt| \\
&+ (Z_i(s) - Z_{i-1}(s)) \int_{[0,1]} |\langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle dt| \\
&\leq (Z_i(s) - Z_{i-1}(s)) \int_{[0,1]} |\langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle dt| + \frac{\varepsilon}{2N} \\
&\leq p_i(s) \int_{[0,1]} |\langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle dt| + \frac{\varepsilon}{2N}.
\end{aligned}$$

D'après la définition de φ, on a

$$\int_{[0,1]} |\langle x', \varphi(s)(t)\rangle| dt \leq \sum_{i=1}^{N} p_i(s) \int_{[0,1]} |\langle x', \varphi_i(s)(t)\rangle| dt + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$$

et d'après (3.3)

$\|\varphi(s)\|_{Pe} < \varepsilon$ pour tout $s \in S$.

Maintenant on doit montrer que $L(s) \neq \emptyset$ pour tout $s \in S$.

D'après la proposition 3.0.13, pour tout $s \in S$ et $i = 1, ..., N$, il existe $u_s^i \in K(s)$, tel que

$$|u_s^i(t) - u_i(t)| = e\left(K(s) - u_i\right)(t), \quad p.p.t \in [0, 1,]$$

alors la fonction

$$u_s = \sum_{i=1}^{N} u_s^i 1_{A_{Z_i(s)}/A_{Z_{i-1}(s)}}$$

appartient à $K(s)$ grâce à la décomposabilité de $K(s)$.

D'autre part, puisque

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{N} (\varphi_i(s) + \frac{\varepsilon}{4}) 1_{A_{Z_i(s)}/A_{Z_{i-1}(s)}}$$

et

$$|u_s^i(t) - u_i(t)| = e(K(s) - u_i)(t)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_s(t) - g(s)(t)\|_{Pe} &= \|\sum_{i=1}^{N} (u_s^i(t) - u_i(t)) 1_{A_{Z_i(s)}/A_{Z_{i-1}(s)}}\|_{Pe} \\
&= \|\sum_{i=1}^{N} e(K(s) - u_i(t)) 1_{A_{Z_i(s)}/A_{Z_{i-1}(s)}}\|_{Pe} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(s)(t) 1_{A_{Z_i(s)}/A_{Z_{i-1}(s)}}\|_{Pe} \\
&\leq \|\varphi(s)(t)\|_{Pe}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $u_s \in L(s)$, i.e, $L(s) \neq \emptyset$

□

Dans ce qui suit on donne le résultat principal de ce chapitre, i.e existence de sélections continues pour une multi-application Pettis intégrable semi-continue inférieurement à valeurs fermées décomposables.

Théorème 3.0.17 *Soit S un espace compact, Soit $K : S \rightrightarrows \mathbf{P}_E^1([0,1])$ une multi-application semi-continue inférieurement à valeurs fermées décomposables. Alors, il existe une sélection continue de K.*

Démonstration.

On définit une suite décroissante de multi-applications $K_n : S \rightrightarrows \mathbf{P}_E^1([0,1])$ semi-continue inferieurement à valeurs fermées décomposables pour tout $n = 0, 1, \ldots..$; et deux suites de fonctions continues $g_n : S \to \mathbf{P}_E^1([0,1])$, $\varphi_n : S \to \mathbf{P}_E^1[0,1])$, pour $n \in \mathbb{N}$

avec

$$\|\varphi_n(s)\|_{pe} < \frac{1}{2^n},$$

et

$$L_{n+1}(s) = \{u \in K_n(s) : \| u_n(t) - g_n(s)(t) \|_{Pe} < \| \varphi_n(s)(t) \|_{Pe}, \quad p.p.t \in [0,1]\}$$

est non vide pour tout $s \in S$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on prend $K_0(s) = K(s)$.

Si pour $n \geq 0$ fixé, la multi-application $K_n(s)$ est définie, alors les fonctions continues g_{n+1} et φ_{n+1} sont définies, D'aprés le lemme 3.0.16, avec $\epsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$, et pour $s \in S$ l'ensemble

$$L_{n+1}(s) = \{u \in K_n(s) : \|u(t) - g_{n+1}(s)(t)\|_{Pe} < \|\varphi_{n+1}(s)(t)\|_{Pe}, \quad p.p.t \in [0,1]\}$$

et non vide.

et

$$\|\varphi_{n+1}(s)\|_{Pe} < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Alors d'après la proposition 3.0.15, la multi-application $L_{n+1} : S \rightrightarrows \mathbf{P}_E^1([0,1])$ est semi-continue inferieurement à valeurs décomposables. Alors on peut prendre $K_{n+1}(s) = \overline{L_{n+1}(s)}$.

On a, $K_{n+1}(s) \subset K_n(s)$ pour tout $s \in S$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soit u_n^s un point arbirtraire de $K_n(s)$.

Puisque $K_{n+p}(s) \subset K_n(s)$ on a $u_{n+p}^s \in K_n(s)$ pour chaque $p \geq 0$.

De plus, d'après la définition de $L_{n+1}(s)$ on a pour chaque n et $p \geq 0$ l'inégalité

$$\|g_n(s)(t) - u_{n+p}^s(t)\|_{Pe} \leq \|\varphi_n(s)(t)\|_{pe}, \quad p.p.t \in [0,1],$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|g_n(s)(t) - g_{n+p}(s)(t)\|_{Pe} &\leq \|g_n(s)(t) - u_{n+p}^s(t)\|_{Pe} + \|u_{n+p}^s(t) - g_{n+p}(s)(t)\|_{Pe} \\
&\leq \|\varphi_n(s)(t)\|_{pe} + \|\varphi_{n+p}(s)(t)\|_{pe} \\
&\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+p}}.
\end{aligned}$$

Ceci implique la convergence de $g_n(s)$ par rapport à la norme de pettis vers la fonction continue $g_0(s)$, de plus

$$\begin{aligned}
\|g_n(s) - u_n^s\|_{Pe} &\leq \|\varphi_n(s)\|_{Pe} \\
&\leq \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

i.e

$$\|g_n(s) - u_n^s\|_{Pe} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent $g_0(s) \in K_0(s) = K(s)$, d'ou $g_0(s)$ est une sélection continue de $K(s)$.

Ce qui achève la démonstration.

$\square$

Chapitre 4

Application de la Pettis intégration à la résolution d'une classe d'inclusions différentielles avec somme de deux perturbations.

Introduction.

Dans ce chapitre, On donne une application de la Pettis-intégration aux inclusions différentielles du second order avec des conditions aux limites en trois points, de la forme

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) + H(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.p.t \in [0,1], \\ u(0) = 0; \qquad u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

avec $\theta \in]0,1[$, ou $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs convexes compactes, Lebesque-mesuable sur $[0,1]$ et semi continue supérieurement sur $E \times E$.
$H : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées $\mathcal{L}([0,1] \bigotimes \mathfrak{B}(E) \bigotimes \mathfrak{B}(E))$-mesurable et semi continue inférieurement sur $E \times E$, et telles que $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t)$ et $H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$ pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$,
avec, pour tout $i = 1, 2$, $\Gamma_i : [0,1] \rightrightarrows E$ deux multi-applications mesurables scalairement Pettis uniformément integrables, à valeurs convexes uniformement-compactes.

Notre théorème d'existence généralise le résultat obtenu dans [10], au cas Pettis.

Ces dernières années , plusieurs travaux on été consacrés à la Pettis-intégration et ses applications, nous citons par exemple [7], [3], [4], [16], [29], [34], [38].

On commence par donner deux lemmes préliminaires où nous démontrons quelques propriétés d'un fonction de **Green** nous permettant de résoudre notre problème d'existence. Voir [7], [10].

Lemme 4.0.18 *Soient E un espace de Banach séparable , $\theta \in]0,1[$ et soit $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$G(t,s) = \begin{cases} -s & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ -t & si \quad t < s \leq \theta, \\ t\frac{s-1}{1-\theta} & si \quad \theta < s \leq 1; \end{cases} \tag{4.1}$$

si $0 \leq t < \theta$

$$G(t,s) = \begin{cases} -s & si \quad 0 \leq s < \theta, \\ \frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{1-\theta} & si \quad \theta \leq s \leq t, \\ t\frac{s-1}{1-\theta} & si \quad t < s \leq 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

si $\theta \leq t \leq 1$

Alors :

(i) $G(.,s)$ est dérivable sur $[0,1]$, pour tout $s \in [0,1]$, et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ -1 & si \quad t < s \leq \theta, \\ \frac{s-1}{1-\theta} & si \quad \theta < s \leq 1; \end{cases} \tag{4.3}$$

si $0 \leq t < \theta$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq s \leq \theta, \\ \frac{s-\theta}{1-\theta} & si \quad \theta \leq s \leq t, \\ \frac{s-1}{1-\theta} & si \quad t < s \leq 1; \end{cases} \tag{4.4}$$

si $\theta \leq t \leq 1$

(ii) $G(.,.)$ *et* $\frac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ *vérifient*

$$\sup_{t,s\in[0,1]} |G(t,s)| \leq 1, \quad \sup_{t,s\in[0,1]} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \leq 1, \tag{4.5}$$

Soit $f \in P^1_E([0,1])$ *et* $u_f : [0,1] \to E$ *la fonction definie par*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds \quad ,\forall t \in [0,1] \tag{4.6}$$

alors on a les résultats suivants

1) $t \longmapsto u_f(t)$ *est une fonction continue de* $[0,1]$ *vers* E, *i.e* $u_f \in \mathbf{C}_E([0,1])$.

2) $u_f(0) = 0; \quad u_f(\theta) = u_f(1)$.

3) *La fonction* u_f *est scalairement dérivable, i.e, pour tout* $x' \in E'$, *la fonction scalaire* $\langle x', u_f(.)\rangle$ *est dérivable, et sa dérivée* $\dot{u}_f$ *satisfait*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\langle x', \frac{u_f(t+h)-u_f(t)}{h}\rangle &= \langle x', \dot{u}_f(t)\rangle \\ &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\langle x', f(s)\rangle ds \\ &= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s), f(s)ds\rangle\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et pour tout* $x' \in E'$.

Par conséquent

$$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,1] \tag{4.7}$$

et $\dot{u}_f$ *est une fonction continue de* $[0,1]$ *vers* E.

4) *La fonction* $\dot{u}_f$ *est scalairement dérivable, i.e pour tout* $x' \in E'$, *la fonction scalaire* $\langle x', \dot{u}_f(.)\rangle$ *est dérivable, et la dérivée faible de* $\dot{u}_f$ *notée* $\ddot{u}_f$ *et égale à* f *p.p.*

Pour la démonstration de notre lemme nous avons besoin du résultat suivant

Lemme 4.0.19 *(Grothendieck 1964)*

Soit (g_n) *une suite de fonctions bornées dans* $\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}}([0,T])$, *telle que* $g_n(t) \to 0$ *ponctuellement, Alors pour toute partie* H *uniformément intégrable dans* $\mathbf{L}^1_{\mathbf{R}}([0,T])$ *la suite*

$$(\langle g_n, h\rangle) = (\int_0^T g_n(t)h(t)dt)$$

converge uniformément vers 0, *pour tout* $h \in H$.

Démonstration du Lemme 4.0.18

1) Soit $f \in \mathrm{P}^1_E([0,1])$, Pour tout $x' \in E'$ la fonction :

$$(t,s) \mapsto G(t,s)\langle x', f(s)\rangle$$

est une fonction de Garathéodory sur $[0,1] \times [0,1]$, c'est à dire mesurable par rapport à s et continue par rapport à t avec

$$|G(t,s)\langle x', f(s)\rangle| \leq |\langle x', f(s)\rangle|$$

et

$$\langle x', u_f(t)\rangle = \langle x', \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\rangle = \int_0^1 G(t,s)\langle x', f(s)\rangle ds$$

En effet

pour : $0 \leq t < \theta < s \leq 1$:

$$\begin{aligned} |G(t,s)| &= \left| \frac{t(s-1)}{1-\theta} \right| \\ &= \frac{t(1-s)}{1-\theta} \\ &< \frac{t(1-\theta)}{1-\theta} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Alors

$$|G(t,s)\langle x', f(s)\rangle| \leq |\langle x', f(s)\rangle|.$$

Pour : $\theta < s \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned}
|G(t,s)| &= \left| \frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{1-\theta} \right| \\
&\leq \frac{\theta(t-s)}{1-\theta} + \frac{s(1-t)}{1-\theta} \\
&\leq \frac{t-s}{1-\theta} + \frac{1-t}{1-\theta} \\
&\leq \frac{1-s}{1-\theta} \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Alors

$$|G(t,s)\langle x', f(s)\rangle| \leq |\langle x', f(s)\rangle|.$$

Pour : $\theta \leq t < s \leq 1$:

$$\begin{aligned}
|G(t,s)| &= \left| \frac{t(s-1)}{1-\theta} \right| \\
&= \frac{t(1-s)}{1-\theta} \\
&\leq \frac{t(1-\theta)}{1-\theta} \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Alors

$$|G(t,s)\langle x', f(s)\rangle| \leq |\langle x', f(s)\rangle|.$$

Par le théorème de *Lebesgue*, On déduit que la fonction $t \mapsto \langle x', u_f(t)\rangle$ est continue sur $[0,1]$, $\forall x' \in E'$. Donc, u_f est une fonction continue sur $[0,1]$ dans l'espace faible E_σ i.e. $u_f \in \mathrm{C}_{E_\sigma}([0,1])$.

Montrons que $u_f \in \mathrm{C}_E([0,1])$.

Puisque $f \in \mathbf{P}^1_E([0,1])$, l'ensemble

$$\{h_{x'}(.) := |\langle x', f(.)\rangle|;\ \|x'\| \leq 1\}$$

est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_{\mathbf{R}}([0,1])$.

Soit (t_n) une suite de points de $[0,1]$ convergeant vers $t \in [0,1]$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_f(t_n) - u_f(t)\| &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} |\langle x', u_f(t_n) - u_f(t)\rangle| \\
&= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} |\langle x', \int_0^1 (G(t_n, s)f(s) - G(t,s)f(s))ds\rangle| \\
&\leq \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t_n, s) - G(t,s)||\langle x', f(s)\rangle| ds \\
&= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t_n, s) - G(t,s)| h_{x'}(s) ds.
\end{aligned}$$

Comme la suite $(v_n(.)) = (|G(t_n, .) - G(t, .)|)$ est uniformément bornée et converge ponctuellement vers 0(grâce à la continuité de $G(t,s)$), et comme l'ensemble

$$H := \{h_{x'}(.) := |\langle x', f(.)\rangle|;\ \|x'\| \leq 1\}$$

est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_{\mathbf{R}}([0,1])$.

D'après le lemme 4.0.19, on conclut que $(v_n(.))$ converge uniformément vers 0 sur H dans la dualité $\langle \mathbf{L}^\infty_{\mathbf{R}}, \mathbf{L}^1_{\mathbf{R}}\rangle$, c'est à dire

$$\langle v_n(.), h_{x'}(.)\rangle = \int_0^1 v_n(s) h_{x'}(s) ds$$

converge uniformement vers 0, pour tout $h_{x'} \in H$.

Par conséquent

$$\|u_f(t_n) - u_f(t)\| = \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t_n, s) - G(t,s)| h_{x'}(s) ds$$

tend vers 0, d'où la continuité de u_f, i.e. $u_f \in \mathbf{C}_E([0,1])$.

2) On a $u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds$,

d'aprés la définition de la fonction G, $G(0,s) = 0$, $\forall s \in [0,1]$ d'où $u_f(0) = 0$ et

$$u_f(1) = \int_0^\theta -sf(s)ds + \int_\theta^1 \frac{\theta(s-1)}{1-\theta} f(s)ds = u_f(\theta)$$

3) On doit démontrer que u_f est scalairement dérivable, i.e pour tout $x' \in E'$, la fonction scalaire $\langle x', u_f \rangle$ est dérivable.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\langle x', \frac{u_f(t+h)-u_f(t)}{h}\rangle &= \lim_{h\to 0}\langle x', \int_0^1 \frac{G(t+h,s)-G(t,s)}{h} f(s)ds\rangle \\
&= \lim_{h\to 0}\int_0^1 \frac{G(t+h,s)-G(t,s)}{h}\langle x', f(s)\rangle ds \\
&= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\langle x', f(s)\rangle ds \\
&= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s)ds\rangle
\end{aligned}$$

i.e.$\langle x', \dot{u}_f(t)\rangle = \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds\rangle$ pour tout $t \in [0,1]$.

Comme E est séparable on déduit que

$$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Nous démontrons la continuité de $\dot{u}_f$ en utilisant les mêmes arguments de la démonstration de la continuité de u_f et en unant compte du fait que

$$\sup_{t,s\in]\theta,1]} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \leq 1$$

4) On veut démontrer que $\dot{u}_f$ est scalairement dérivable, i.e, pour tout $x' \in E'$, la fonction scalaire $\langle x', \dot{u}_f(.)\rangle$ est dérivable.

Puisque

$$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,1]$$

et d'après les relations de $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ on a

$$\dot{u}_f(t) = \int_\theta^t f(s)ds + \frac{1}{1-\theta}\int_\theta^1 (s-1)f(s)ds$$

pour $0 \leq t < \theta$.

D'où, pour tout $x' \in E'$

$$\begin{aligned}
\langle x', \ddot{u}_f(t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle x', \dot{u}_f(t)\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\langle x', \int_\theta^t f(s)ds + \frac{1}{1-\theta}\int_\theta^1 (s-1)f(s)ds\rangle \\
&= \langle x', \frac{\partial}{\partial t}(\int_\theta^t f(s)ds + \frac{1}{1-\theta}\int_\theta^1 (s-1)f(s)ds)\rangle \\
&= \langle x', f(t)\rangle \;\; p.pt \in [0,\theta[
\end{aligned}$$

Soit (e'_n) une suite d'éléments de E' qui sépare les points de E. Alors nous avons

$$\langle e'_n, \ddot{u}_f(t)\rangle = \langle e'_n, f(t)\rangle$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour p.p $t \in [0,\theta[$.

On conclut donc que $\ddot{u}_f = f$ sur $[0,\theta[$.

On a aussi

$$\dot{u}_f(t) = \frac{1}{1-\theta}\int_\theta^t (s-\theta)f(s)ds + \frac{1}{1-\theta}\int_t^1 (s-1)f(s)ds$$

pour tout $\theta \leq t \leq 1$.

D'où, pour tout $x' \in E'$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle x', \ddot{u}_f(t)\rangle &= \langle x', \frac{t-\theta}{1-\theta}f(t) + \frac{1-t}{1-\theta}f(t)\rangle \\
&= \langle x', f(t)\rangle \;\; p.p.t \in [\theta, 1]
\end{aligned}$$

Par suite $\ddot{u}_f(t) = f(t)$ p.p $t \in [\theta, 1]$.

Par conséquent $\ddot{u}_f(t) = f(t), \quad p.p.t \in [0,1]$.

□

On donne maintenant notre résultat principal dans ce chapitre i.e, l'existence des solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ pour l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),\dot{u}(t)) & p.p.t \in [0,1], \\ u(0) = 0; \quad u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

Théorème 4.0.20 *Soit E un espace de Banach séparable. Soit $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs convexes compactes, Lebesgue-mesuable sur $[0,1]$ et semi continue supérieurement sur $E \times E$. Soit $H : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées, $\mathcal{L}([0,1] \bigotimes \mathfrak{B}(E) \bigotimes \mathfrak{B}(E))$-mesurable et semi continue inférieurement sur $E \times E$.*
Soient pour tout $i = 1, 2$, $\Gamma_i : [0,1] \rightrightarrows E$ deux multi-applications mesurables scalairement Pettis uniformément integrables, à valeurs convexes $\|.\|$-compact, telles que $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t)$ et $H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$ pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$.
Alors l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),\dot{u}(t)) & p.p.t \in [0,1], \\ u(0) = 0; \quad u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

admet au moins une solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$.

Démonstration.

Etape 1.

On suppose que $0 \in \Gamma_i(t)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $i = 1, 2$ quitte à prendre $\overline{co}(\{0\} \cup \Gamma_i(t))$.
Soit pour tout $t \in [0,1]$,

$$\Gamma(t) = \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t).$$

Remarquons que la multi-application Γ hérite les mêmes propriétés de Γ_1, Γ_2 ,i.e ; Γ est mesurable, scalairement Pettis uniformément intégrable, à valeurs convexes $\|.\|$-compactes.
En effet, Puisque Γ_1, Γ_2 sont scalairement Pettis uniformément intégrable, les ensemble

$\{\langle x', \Gamma_1(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\}$ et $\{\langle x', \Gamma_2(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\}$ sont uniforméments integrable dans $L^1_E([0,1])$, on conclut que l'ensemble

$$\begin{aligned}\{\langle x', \Gamma(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\} &= \{\langle x', \Gamma_1(.) + \Gamma_2(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\} \\ &= \{\langle x', \Gamma_1(.)\rangle + \langle x', \Gamma_2(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\} \\ &= \{\langle x', \Gamma_1(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\} + \{\langle x', \Gamma_2(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\}\end{aligned}$$

et uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$. D'où Γ est scalairement Pettis uniformément intégrable.

Montrons que $\Gamma(t)$ est convexe, pour tout $t \in [0,1]$.

Soient $x, y \in \Gamma(t)$ et $\alpha \in [0,1]$, alors $\exists x_1 \in \Gamma_1(t)$, $\exists x_2 \in \Gamma_2(t)$ telque

$$x = x_1 + x_2$$

et $\exists y_1 \in \Gamma_1(t)$, $\exists y_2 \in \Gamma_2(t)$ telque

$$y = y_1 + y_2$$

$$\alpha x + (1-\alpha)y = [\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1] + [\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2]$$

Comme Γ_1 et Γ_2 sont à valeurs convexes nous avons $\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 \in \Gamma_1(t)$ et $\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2 \in \Gamma_2(t)$ alors $\alpha x + (1-\alpha)y \in \Gamma(t)$, d'où la convexité de $\Gamma(t)$.

D'autre part, $\Gamma(t)$ est compacte, pour tout $t \in [0,1]$.

En effet, Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des points de $\Gamma(t)$. Alors, il existe deux suite (y_n) de points de $\Gamma_1(t)$ et (z_n) de points de $\Gamma_2(t)$, telles que $x_n = y_n + z_n$.

Comme Γ_1, Γ_2 sont à valeurs compactes, alors on peut extraire de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $(y_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$ qui converge vers $y \in \Gamma_1(t)$.

et de $(z_{n_k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ une sous suite $(z_{n_{k'}})_{n\in\mathbb{N}}$, $k' \in \mathbb{N}$ qui converge vers $z \in \Gamma_2(t)$.

Alors, la suite $(x_{n_{k'}})$ tel que $x_{n_{k'}} = y_{n_{k'}} + z_{n_{k'}}$ converge vers $x = y + z \in \Gamma(t)$ d'où la compacité de $\Gamma(t)$.

Considérons l'inclusion différentielle :

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in \Gamma(t), & p.p.t \in [0,1], \\ u(0) = 0; & u(\theta) = u(1). \end{cases} \tag{4.8}$$

On doit montrer que l'ensemble $\mathbf{X}_\Gamma$ des solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ de (4.8) est non vide et convexe compact dans l'espace de Banach $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_{C^1}$.

En effet, soit

$$\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma = \{f \in \mathbf{P}^1_E : f(t) \in \Gamma(t)\}$$

l'ensemble des sélections Pettis-intégrables de Γ.

On a $\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$ est non vide et séquentiellement compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbf{L}^\infty_\mathbb{R} \bigotimes E'$. De plus, l'intégrale multivoque :

$$\int_0^1 \Gamma(t)dt = \{\int_0^1 f(t)dt : \ f \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma\}$$

est convexe compacte pour la norme de E. (Voir [3], [4], [16]).

D'après le lemme 4.0.18, l'ensemble $\mathbf{X}_\Gamma$ des solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ de 4.8 est non vide et est donné par

$$\mathbf{X}_\Gamma = \{u_f : [0,1] \to E, u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \ \forall t \in [0,1]; \ f \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma\}.$$

Il est claire que $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact.

En effet, si (t_n) est une suite de points de $[0,1]$, convergeant vers $t \in [0,1]$ on aura

$$\begin{aligned} \|u_f(t_n) - u_f(t)\| &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} |\langle x', u_f(t_n) - u_f(t)\rangle| \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} |\langle x', \int_0^1 G(t_n,s)f(s) - G(t,s)f(s))ds\rangle| \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} |\int_0^1 G(t_n,s) - G(t,s)\langle x', f(s)\rangle ds| \\ &\leq \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t_n,s) - G(t,s)||\delta^*(x', \Gamma(s))|ds, \end{aligned}$$

et

$$\|\dot{u}_f(t_n) - \dot{u}_f(t)\| \leq \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t_n, s) - \frac{\partial G}{\partial t}(t, s)||\delta^*(x', \Gamma(s))|ds,$$

pour tout $f \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$.

Comme Γ est scalairement Pettis-intégrable, l'ensemble

$$\{|\delta^*(x', \Gamma(.)|; \|x'\| \leq 1\}$$

est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, et les suites $(v_n(.)) := (|G(t_n, .) - G(t, .)|)$ et $(w_n(.)) := (|\frac{\partial G}{\partial t}(t_n, .) - \frac{\partial G}{\partial t}(t, .)|)$ sont uniformément bornées et convergeant ponctuellements vers 0. en appliquant le lemme 4.0.19, on obtient

$$\sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t_n, s) - G(t, s)||\delta^*(x', \Gamma(s))|ds$$

et

$$\sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t_n, s) - \frac{\partial G}{\partial t}(t, s)||\delta^*(x', \Gamma(s))|ds$$

convergeant vers 0.

Par conséquent $\mathbf{X}_\Gamma$ et $\{\dot{u}_f : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont équicontinus dans $\mathbf{C}_E([0,1])$.

D'autre part, pour chaque $t \in [0,1]$,

$$\mathbf{X}_\Gamma(t) = \{u_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$$

et

$$\{\dot{u}_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$$

sont relativement compacts dans E puisque

$$\mathbf{X}_\Gamma(t) \subset \{\int_0^1 G(t, s)\Gamma(s)ds\}$$

et

$$\{\dot{u}_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\} \subset \{\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s)\Gamma(s)ds\}$$

et $\{\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds\}$, $\{\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds\}$ sont compacts dans E.

En effet, d'après les propriétés de la fonction G, On voit bien que les multi-application $G(t,.)\Gamma(.)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(t,.)\Gamma(.)$ vérifient les mêmes hypothèses qu'on a supposé sur la multi-application $\Gamma(.)$.

On déduit que $\{\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds\}$ et $\{\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds\}$ sont compacts dans E.

Alors $\mathbf{X}_\Gamma(t)$ et $\{\dot{u}_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont relativement compacts dans E.

D'aprés le théorème *d'Ascoli-Arzelà* $ref1.12$, $\mathbf{X}_\Gamma$ est relativement $\|.\|_{C^1}$-compact dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.

Démontrons maintenant que $\mathbf{X}_\Gamma$ est fermé dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$. Comme $\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$ est séquentiellement compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbf{L}^\infty_\mathbb{R} \bigotimes E'$, et la suite (u_{f_n}) est relativement compact dans $\mathbf{C}_E([0,1])$. on peut alors extraire de (f_n) une suite qu'on note aussi (f_n) qui converge $\sigma(\mathbf{P}^1_E, \mathbf{L}^\infty_\mathbb{R} \bigotimes E')$ vers une fonction $f \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$, et telle que (u_{f_n}) converge uniformément vers une fonction continue $\xi \in \mathbf{C}^1_E([0,1])$.

La convergence faible de (f_n) vers f nous permet d'écrire pour chaque $y' \in E'$

$$\lim_{n\to\infty} \langle y', f_n\rangle = \langle y', f\rangle$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle y', f_n(s)\rangle ds &= \lim_{n\to\infty} \langle y', \int_0^1 f_n(s)ds\rangle \\ &= \langle y', \int_0^1 f(s)ds\rangle\end{aligned}$$

En particulier, pour $y' = G(t,.)x' \in E'$, avec $x' \in E'$ et pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle G(t,s)x', f_n(s)\rangle ds \\ &= \int_0^1 \langle G(t,s)x', f(s)\rangle ds \\ &= \langle x', \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\rangle\end{aligned}$$

Comme l'intégrale multivoque $\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds$, ($t \in [0,1]$) est $\|.\|$-compacte, alors

$$(u_{f_n}(\cdot)) = (\int_0^1 G(.,s)f_n(s)ds)$$

converge vers $u_f(.) = \int_0^1 G(.,s)f(s)ds$.

D'autre part, (u_{f_n}) converge uniformément vers $\xi \in \mathbf{C}_E^1([0,1])$, on conclut alors que $\xi = u_f$, et donc $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact dans $\mathbf{C}_E^1([0,1])$.

Etape 2.

On doit montrer, que pour toutes applications Lebesgue-mesurables

$$v,\ \ w : [0,1] \longrightarrow E,$$

il existe une sélection Pettis-intégrable $s \in \mathbf{S}_{\Gamma_1}^{pe}$ telle que

$$s(t) \in F(t, v(t), w(t)), \quad p.p.t \in [0,1].$$

En effet, v et w étant Lebesgue-mesurables, il existe deux suites de fonctions étagées dans E, (v_n), (w_n) qui convergent ponctuellement vers v et w respectivement, pour E muni de la topologie de la convergence uniforme.

Comme les multi-applications $F(.,v_n(.),w_n(.))$ sont Lebesgue-mesurables à valeurs fermées, alors il existe une suite de sélections Lebesgue-mesurable de $F(.,v_n(.),w_n(.))$ qu'on note (s_n).

$$s_n(t) \in F(t, v_n(t), w_n(t)) \subset \Gamma_1(t); \quad \forall t \in [0,1]$$

et donc $s_n \in \mathbf{S}_{\Gamma_1}^{pe}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Or, $\mathbf{S}_{\Gamma_1}^{pe}$ est séquentiellement $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L^\infty \otimes E')$-compact, d'après le théorème *d'Eber-Ŝmulian* Théorème 1.9.4, on peut extraire de (s_n) une suite (s'_n) qui converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_{\mathbb{R}}^\infty \otimes E')$ vers une fonction $s \in \mathbf{S}_{\Gamma_1}^{pe}$.

On doit montrer que

$$s(t) \in F(t, v(t), w(t)),\ p.p.t \in [0,1]$$

Soit $(e_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dense pour la topologie de *Mackey* $\tau(E', E)$.

On applique le théorème de *Banach-Mazur* Théorème (1.9.8) à la suite $(\langle e_k^*, s_n'(.)\rangle)_n$, $k \in \mathbb{N}$.

On conclut l'existence de la suite (z_n), $z_n \in co\{\langle e_k^*, s_m'(.)\rangle : m \geqslant n\}$ telle que (z_n) converge fortement p.p vers $\langle e_k^*, s(.)\rangle$.

Soit $A \subset [0,1]$ un ensemble Lebesgue-mesurable, comme $F(., v(.), w(.))$ est mesurable, on utilisant le lemme de *Fatou* Lemme(1.8.2) et la semi continuité supérieure de $F(t,.,.)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int_A \langle e_k^*, s(t)\rangle dt &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_A \langle e_k^*, z_n(t)\rangle dt \\
&\leqslant \limsup_{n\longrightarrow\infty} \int_A \delta^*(e_k^*, F(t, v_n(t), w_n(t)))dt \\
&\leqslant \int_A \limsup_{n\longrightarrow\infty} \delta^*(e_k^*, F(t, v_n(t), w_n(t)))dt \\
&= \int_A \delta^*(e_k^*, F(t, v(t), w(t)))dt.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\langle e_k^*, s(t)\rangle \leqslant \delta^*(e_k^*, F(t, v(t), w(t)), p.p.t \in [0,1]; \forall k \in \mathbb{N}$$

D'autre part, grâce au lemme (1.5.10) et le corolaire (1.5.13), nous avons

$$\sup_{x'\in E'} [\langle x', s(t)\rangle - \delta^*(x', F(t, v(t), w(t)))] = \sup_{k\in\mathbb{N}} [\langle e_k^*, s(t)\rangle - \delta^*(e_k^*, F(t, v(t), w(t)))],$$

et donc

$$\begin{aligned}
d(s(t), F(t, v(t), w(t))) &= \sup_{x'\in \overline{B}_{E'}} [\langle x', s(t)\rangle - \delta^*(x', F(t, v(t), w(t)))] \\
&\leqslant \sup_{x'\in E'} [\langle x', s(t)\rangle - \delta^*(x', F(t, v(t), w(t)))] \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} [\langle e_k^*, s(t)\rangle - \delta^*(e_k^*, F(t, v(t), w(t)))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent $s(t) \in F(t, v(t), w(t))$, $p.p.t \in [0,1]$.

Etape 3.

Considérons la multi-application :

$$\Phi : \mathbf{X}_\Gamma \rightrightarrows \mathbf{P}^1_E([0,1])$$

définie par

$$\Phi(u_f) = \{v \in \mathbf{P}^1_E([0,1]) : v(t) \in H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)),\ p.p.t \in [0,1]\}$$

On doit montrer que, pour $\mathbf{X}_\Gamma$ muni de la norme $\|.\|_{C^1}$, la multiapplication Φ admet une sélection continue.

Il est claire que Φ est non vide à valeurs fermées décomposables.

D'après le théorème de sélections continues Théorème 3.0.17, il suffit de montrer que Φ est semi continue inférieurement.

Soient $u_{f_0} \in \mathbf{X}_\Gamma$, $v_0 \in \Phi(u_{f_0})$ et (u_{f_n}) une suite dans $\mathbf{X}_\Gamma$ convergeant vers u_{f_0} dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{C^1})$.

Grâce à la mesurabilité de $H(., u_{f_n}(.), \dot{u}_{f_n}(.))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et à la compacité de ses valeurs, la multi-application : $\Omega_n : [0,1] \rightrightarrows E$ définie par :

$$\Omega_n(t) = \{w \in H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)) : \|w - v_0(t)\| = d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)))\}$$

est mesurable à valeurs non vides fermées.

Alors d'après le théorème d'existence de sélection mesurable Théorème 1.5.16, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application mesurable $v_n : [0,1] \to E$ telque $v_n(t) \in \Omega_n(t)$, pour tout $t \in [0,1]$, c'est à dire $v_n(t) \in H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))$ et

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} \| v_n(t) - v_0(t) \| &= \lim_{n\longrightarrow\infty} d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))) \\ &\leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} e(H(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t)), H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))) = 0.\end{aligned}$$

D'où (v_n) converge simplement vers v_0.

Comme $H(t, x, y) \subset \Gamma_1(t)$ pour tout $(t, x, y) \in [0,1] \times E \times E$, la convergence est forte dans $\mathbb{P}^1_E([1,0])$.

En effet, pour $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} \| v_n(t) - v_0(t) \|_{Pe} &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x'\in\overline{B}'} \int_0^1 |\langle x', v_n(t) - v_0(t)\rangle| dt \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x'\in\overline{B}'} \int_0^1 |\langle x', v_n(t)\rangle - \langle x', v_0(t)\rangle| dt\end{aligned}$$

$\forall n, v_n(t) \in \Gamma_1(t)$ et Γ_1 est scalairement Pettis uniformément intégrable, alors les ensembles

$$\{\langle x', v_n(.)\rangle : \|x'\| \leq 1\}$$

sont uniformément intégrables, dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où :

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} \| v_n(t) - v_0(t) \|_{Pe} &= \sup_{x'\in\overline{B}'} \int_0^1 \lim_{n\longrightarrow\infty} |\langle x', v_n(t)\rangle - \langle x', v_0(t)\rangle| dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

On obtient alors la semi continuité inférieure de Φ.

En appliquant le théorème d'éxistence de sélections continues, Théorème 3.0.17, on obtient, pour $\mathbf{X}_\Gamma$ muni de la topologie de la convergence uniforme, l'existence d'une application continue $\varphi : \mathbf{X}_\Gamma \longrightarrow \mathbf{P}^1_E([0,1])$ telle que $\varphi(u) \subset \Phi(u)$, pour tout $u \in \mathbf{X}_\Gamma$ c'est à dire

$$\varphi(u)(t) \in H(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad p.p.t \in [0,1]$$

Etape 4.

pour tout $u \in \mathbf{X}_\Gamma$ Considérons la multi-application $\Psi : \mathbf{X}_\Gamma \rightrightarrows \mathbf{X}_\Gamma$ définie par

$$\Psi(u) = \{v \in \mathbf{X}_\Gamma : \ddot{v}(t) \in \mathrm{F}(t, u(t), \dot{u}(t)) + \varphi(u)(t) \ , p.p.t \in [0,1]\}$$

$\Psi(u)$ est non vide, *en effet*, d'aprés l'étape 2 et puisque $\varphi(u) \in \mathbf{S}^{Pe}_{\Gamma_2}$ pour tout $u \in \mathbf{X}_\Gamma$, pour toute sélection mesurable s de $F(., u(.), \dot{u}(.))$ l'application

$$g := s + \varphi(u)$$

est dans $\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$, puisque $g(t) = s(t) + \varphi(u)(t)) \in \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) = \Gamma(t)$, pour tout $t \in [0,1]$.

Alors, l'application v telle que $v(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds$ est dans $\Psi(u)$.

D'autre part $\Psi(u)$ est convexe, *en effet*, soit $v_1, v_2 \in \Psi(u)$, $\alpha \in [0,1]$,

$$\ddot{v}_1(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) + \varphi(u)(t) \;\; p.p \; sur[0,1]$$

$$\ddot{v}_2(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) + \varphi(u)(t) \;\; p.p \; sur[0,1]$$

i.e

$$\ddot{v}_1(t) - \varphi(u)(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) \;\; p.p \; sur[0,1]$$

$$\ddot{v}_2(t) - \varphi(u)(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) \;\; p.p \; sur[0,1].$$

Comme $F(t, u(t), \dot{u}(t))$ est convexe, en aura :

$$\begin{aligned}(\alpha v_1(t) + (1-\alpha)v_2(t))'' - \varphi(u)(t) &= (\alpha v_1(t) + (1-\alpha)v_2(t))'' - \\ &\quad (\alpha\varphi(u)(t) + (1-\alpha)\varphi(u)(t)) \\ &= \alpha(\ddot{v}_1(t) - \varphi(u)(t)) + (1-\alpha)(\ddot{v}_2(t) - \varphi(u)(t)) \\ &\in F(t, u(t), \dot{u}(t))\end{aligned}$$

i.e

$$(\alpha v_1(t) + (1-\alpha)v_2(t))'' \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) - \varphi(u)(t)$$

alors

$$\alpha v_1(.) + (1-\alpha)v_2(.) \in \Psi(u)$$

d'où la convexité de $\Psi(u)$.

Nous avons aussi, pour tout $u \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$, $\Psi(u)$ est compacte, puisque si on considère une suite (v_n) de $\Psi(u)$, on aura

$$v_n(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{v}_n(s)ds, \;\; \forall t \in [0,1]$$

avec $\ddot{v}_n(s) \in \Gamma(s)$, i.e. $\ddot{v}_n \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$.

Puisque $\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ est séquentiellement $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_\mathbb{R}^\infty \bigotimes E')$-compact, d'aprés le théorème *d'Eber-Ŝmulian* Théorème 1.9.3, on peut extraire de $(\ddot{v}_n)$ une sous suite qu'on note aussi $(\ddot{v}_n)$ et qui converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_\mathbb{R}^\infty \bigotimes E')$ vers $f \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$.

La suite (v_n) est relativement compacte, donc on peut lui extraire une sous suite notée aussi (v_n) convergeant uniformement vers v, d'après le lemme 4.0.18, $\ddot{v} = f$, p.p sur $[0, 1]$.

Nous avons

$$\ddot{v}_n(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) + \varphi(u)(t)$$

et $(\ddot{v}_n)$ converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_\mathbb{R}^\infty \bigotimes E')$ vers $\ddot{v}$.

La semi-continuité supérieure de F, nous permet d'avoir

$$\ddot{v}(t) - \varphi(u)(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.p.t \in [0, 1],$$

c'est à dire $v \in \Psi(u)$ et par conséquent $\Psi(u)$ est compact pour tout $u \in \mathbf{X}_\Gamma$

Montrons maintenant la semi-continuité supérieure de Ψ, ceci revient à montrer que son graphe

$$gr(\Psi) = \{(u, v) \in \mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma : v \in \Psi(u)\}$$

est fermé dans $\mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$.

Soit (u_n, v_n) une suite d'éléments du graphe de Ψ convergeant vers $(u, v) \in \mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$.

D'après le lemme 4.0.18, (u_n, v_n) converge uniformément vers (u, v), et $(\dot{u}_n, \dot{v}_n)$ converge ponctuellement vers $(\dot{u}, \dot{v})$ pour E muni de la norme de la convergence uniforme et $(\ddot{u}_n, \ddot{v}_n)$ converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_\mathbb{R}^\infty \bigotimes E')$ vers $(\ddot{u}, \ddot{v})$.

comme

$$\ddot{v}_n(t) - \varphi(u_n)(t) \in F(t, u_n(t), \dot{u}_n(t)), p.p.t \in [0, 1],$$

en utilisant le théorème de *fermeture* Théorème 1.6.5, on obtient

$$\ddot{v}(t) - \varphi(u)(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.p.t \in [0,1]$$

i.e

$$\ddot{v}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) + \varphi(u)(t), \quad p.p.t \in [0,1]$$

Et donc $v \in \Psi(u)$, i.e. $(u, v) \in gr(\Psi)$.

Donc $gr(\Psi)$ est fermé dans $\mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$, par conséquent Ψ est semi-continue supérieurement.

En appliquant le théorème du point fixe de *Kakutani-Ky Fan* Théorème 1.7.1, on obtient l'existence d'un élément $u \in \mathbf{X}_\Gamma$, tel que $\Psi(u) = u$

i.e

$$\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) + \varphi(u)(t), \quad p.p.t \in [0,1]$$

comme $\varphi(u)(t) \in H(t, u(t), \dot{u}(t))$, on obtient

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) + H(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.p.t \in [0,1] \\ u(0) = 0; \;\; u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

Ce qui achève la démonstration de notre théorème.

□

Bibliographie

[1] **A. Amrani.**, *Lemme de Fatou pour l'intégrale de Pettis.* Publications Mathématiques, Vol. 42, pp. 67-79, (1998).

[2] **A. Amrani, A. Bourass et K. Elamri.**, *Critère de Bocce et convergence en norme de Pettis dans* $\mathbf{P}^1_E(\nu)$. AMS (2000).

[3] **A. Amrani. C. Castaing.**, *Weak Compactness in Pettis integration.* Bulletin of the Polish Academy of sciences mathics, vol. 44, No 2, (1996).

[4] **A. Amrani, C. Castaing, M. Valadier.**, *Convergence in Pettis norm under extreme point conditions*, Vietnam Journal of Mathematics 26 : 4, 323 – 335, (1998).

[5] **H. A. Antosie and A. Cellina.**, *Continuous Selections and Differential Relations.* Journal of Differential Equations, 19, 386 – 398. (1975).

[6] **J. P. Aubin and A. Cellina.**, *Differential inclusion.* Springer, Berlin, (1984).

[7] **D. Azzam-Laouir.**, *Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre.* Thèse pour obtenir le diplôme de doctorat d'état, Constantine, Algérie, (2003).

[8] **D. Azzam-Laouir, I. Boutana.**, *Application of Pettis intégration to differential inclusions with three-point Boundary conditions in Banach spaces.* J.Differential Equations, vol. 2007 N°. 173, pp.1 – 8 (2007).

[9] **D. Azzam-Laouir, C. Casting and L. Thibault.**, *Three boundary value problems for second order differential inclusions in Banach spaces.* Control and cybernetics, vol. 31N°. 3, (2002).

[10] **D. Azzam-Laouir, S. Lounis and L. Thibault.**, *Existence solutions for second order differential inclusions with nonconvex perturbations.* Applicable Analysis, Vol. 86, No. 10, 1199 – 1210. October (2007).

[11] **G. Beer,** *Topologie on closed and closed convex sets.* Mathematics and its applications, Kluwer academic publishers, ISBN 0679 23 – 253161, (1993).

[12] **H. Brezis,** *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Masson, Paris, Milan, Barcelone, (1993).

[13] **A. Bressan, G. Colombo.**, *Extensions and selections maps with decomposable values.* Studia Math, 90 69 – 85, (1988).

[14] **A. Bressan and A. Cortes.**, *Directionally continuous and selections in Banach spaces.* Nonlinear Analysis, Vol. 13, No. 8, pp. 987 – 992, (1989).

[15] **N. Boccara.**, *Analyse fonctionnelle.* Ellipses, Aubin, 86240, Liguge D.L, ISBN 2 – 7298 – 9605 – 8, Août (1984).

[16] **C. Castaing.**, *Weak compactness Criteria in set-valued integration.* Universitè de Montpellier *II*, Laboratoire d'Analyse Convexe, Pré-publication, 1995 – 03, (1996).

[17] **C. Castaing.**, *Weak compactness and Convegence in Bochner and Pettis integration.* Vietnam Journal of Mathematics, Volume 24, Number 3, 1996.

[18] **C. Castaing.**, *Weak compactness criteria in set valued integration.* case 051, Université Montpellier II, F-34095, France, (1991).

[19] **C. Castaing, P. Raynaud de Fitte.**, *σ-Uniform Scalar Integrability and Strong laws of large Numbers for Pettis integrable Functions with values in a Separable locally

convex space. Publication de l'upresa 6085, Analyse et Modeles Stochastiques, AMS : 60F15, 60B05, 60B12, (1991).

[20] **C. Castaing, M. Valadier.**, *Convex analysis and measurable multi-functions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580, Springer-Verlag, Berlin, (1977).

[21] **A. Cernea and V. Staicu.**, *Directionally continuous selections and Nonconvex Evolution Inclusions*. Set-Valued Analysis, $11 : 9 - 20$, (2003).

[22] **N. D. Chakraborty et Sk. Jaker Ali.**, *On strongly Pettis integrable fuctions in Locally convex spaces*. Mathematics , 28B05, 46G10, Editorial complutence. Madrid, (1993).

[23] **G. Choquet**. *Cours de topologie*. Masson, Paris, Milan Bacelone, Bonn, (1992).

[24] **S. J. Dilworth and M. Girardi.**, *Bochner Vs. Pettis norm : exemple and results*. contenp, Math, $144 - 6980$, (1998).

[25] **K. El Amri. C. Hess.**, *On the Pettis Integral of closed valued multifunctions*. Kluwer Academic Publishers, Set-valued Analysis 8, 329-360, (2000).

[26] **A. Fryszkowski.**, *Existence of solutions of functional-differential inclusions in non-convex case*. Annales Polonici Mathematici XLV, (1985).

[27] **A. Fryszkowski.**, *Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps*. Dia Mathematica, T.L$XXVI$, (1983).

[28] **A. Fryszkowski.**, *Continuous selections of Aumann integrals*. Journal of Mathematical Analysis And applications, $145, 431 - 446$, (1990).

[29] **R. F. Geitz.**, *Pettis integration*. Proceedings of the American mathematical Society, Volume 82, Number 1, May (1981).

[30] **J. R. Giles and M. O. Bartlett.**, *Modified Continuity and a Generalisation of Michael's selection Theorem*. Set-Valued Analysis $1 : 365 - 378$, (1993).

[31] **V. Gutev.**, *Selections for Quasi-L.S.C. Mappings with uniformly Equi-LC^n Range.* Set-Valued Analysis 1 : 319 – 328, (1993).

[32] **W. Hangartner, M. Laubert, C. Reischer.**, *introduction à l'analyse fonctionnelle.* Les presses de l'université de Québec, C.P.250, Sillery, Québec G1T2R1, (1981).

[33] **C. Hess. H. Ziat.**, *Théorème de Komlòs pour des multifonctions Pettis-intégrables.* (1993).

[34] **R. Huff.**, *Remarks on Pettis integrability.* Proceedings of the American mathématical society, Volume 96, Number 3, March (1986).

[35] **R. Jean.**, *Mesure et intégration.* Presses de l'université du Québec, C.P.250, Sillery, Québec G1T2R1, (1982).

[36] **M. Kisielewicz.**, *Differential Inclusions and Optimal control.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

[37] **K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzewski.**, *A General theorem on selectors.* Bulletin de L'Academie Polonaise des sciences, Série des sciences math, astr. et phys, vol. $XIII$, No. 6, (1965).

[38] **K. Musial.**, *Topics in the theory of Pettis integration.* Rendiconti dell'istitutodi Matematica dell'Università di Trieste, School on Measure Theory and Real Analysis. Grado(Itaty), October 14 – 25, (1992).

[39] **B. Pettis.**, *On integration in vector spaces.* Trans.Amer.Math.Soc.44, 277 – 304, (1938).

[40] **A. Petruçel.**, *Operatorial inclusions.* House of the Book of Science, Cluj-Napoca, (2002).

[41] **B. Satco.**, *Contributions à l'étude des intégrales multivoques et applications aux inclusions différentielles et intégrales.* Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'université de Bretagne occidentale et de l'université "AL.I.Cuza" de Iasi, (2005).

[42] **L. Schwartz.**, *Analyse-Toplogie générale et analyse fonctionnelle.* Hermann, Paris, (1970).

[43] **L. Schwartz.**, *Analyse III, Calcul intégral.* Hermann, éditeurs des sciences et des arts 75015, (1993).

[44] **H. Shouchuan and N. S. Papageorgiou.**, *Hand Book of Multivalued Analysis.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston,London.

[45] **C. Stefansson.**, *Pettis integrability.* transacions of the American Mathematical Society, Volume 139, Number 4, March (1992).

[46] **Ch. Suquet.**, *Cours P.E.F.* 2006.

[47] **M. Valadier.**, *Young measures, Methods of nonconvex analysis*, (A.Cellina, ed), Lectures Notes in Math, Vol. 1446, Springer-verlag, Berlin, pp.152 – 188, (1990).

[48] **M. Valadier.**, *Applications des measures de Young aux suites uniformément intégrables dans un espace de Banach séparable.* Sém.Anal.Convexe 20, 3.1 – 3.14, (1990).

[49] **M. Valadier.**, *A Course on Young measures.* Workshop di teoria della Misura e Analisi Reale, Grado, September 19-October 2, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 26 Suppl, 349 – 394, (1994).

[50] **G. Ye et S. Schwabik.**, *The McShane and the weak McShane intègrals of Banach space-valued functions defined on* $\mathbb{R}^m$. Mathematical Notes, Miskolq, Vol.2., No.2., PP.127 – 136, (2001).

[51] **H. Ziat.**, *Convergence des suites adaptées multivoques, Application à la loi forte des Grands nombres multivoque.* Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, (1993).

[52] **H. Ziat.**, *On a characterization of Pettis intègrable multifunctions.* Bull. Polich Acad. Sci. Math. 45, No.3, $227-230$, (2000).

ملخص

تطبيق تكامل بيتيس في حل بعض المسائل التطويرية

يرتكز بحثنا هذا على تطبيق تكامل بيتيس في حل مسألة تطويرية. البداية كانت عبارة عن مقارنة بين تكامل بيتيس مع كل من تكامل بوخنر و التكامل الدرجي، بإبراز بعض الأمثلة عن توابع قابلة للمكاملة حسب بيتيس و لاتقبل حسب بوخنر. إضافة إلى استخراج تابع جزئي مستمر من تابع قيمه عبارة عن مجموعة في الفضاء التوابع القابلة للمكاملة حسب بيتيس $P_E^1([0,1])$. إضافة إلى برهان وجود حلول احتوائية تفاضلية (تعميم مصطلح معادلة تفاضلية في حالة توابع قيمها عبارة عن مجوعة) من الدرجة الثانية بشروط حدية عند ثلاثة قيم من الشكل $\ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),\dot{u}(t))$, a.e. $t \in [0,1]$, حيث F ذو قيم محدبة نصف مستمر من الأعلى و H نصف مستمر من الأسفل، و $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t), H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$ ، حيث $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0,1] \rightrightarrows E$ قابلة للمكاملة بانتظام حسب بيتيس.

Abstract

Application of Pettis Integration to the resolution of a class of differential inclusions

The aim of this work is to present some existence solutions for differential inclusions. Firstly, we give a comparison between Pettis integration, Bochner and scalar ones. secondly, we have proved the existence of continuous selection for a multi-application with values in $P_E^1([0,1])$ which is the space of the Pettis integrable mapping defined on [0.1]. Finally we give an application of the Pettis integration to resolve a differential inclusion in Banach spaces with tree point boundary conditions of the form $\ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),\dot{u}(t))$, a.e. $t \in [0,1]$, where F is a convex valued multifunction upper semi continuous on $E \times E$ and H is a lower semi continuous multifunction on $E \times E$, and the assumption that $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t), H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$, where the multifunctions $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0,1] \rightrightarrows E$ are uniformly Pettis integrables.

Résumé

Application de la Pettis intégration à la résolution de quelques problèmes d'évolution

Le but de ce travail et de présenter quelques résultats sur la Pettis-intégrabilité. Au début, on fait une comparaison entre la Pettis intégrabilité, la Bochner et la scalaire. En second lieu on construit une sélection continue d'une multi-application semi continue inférieurement, à valeurs fermées décomposables dans $P_E^1([0,1])$ (L'espace de toutes les applications Pettis intégrables définies sur [0,1] à valeurs dans E). Enfin, on donne une application de la Pettis-intégration aux inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en trois points, de la forme: $\ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),\dot{u}(t))$, a.e. $t \in [0,1]$, où F est une multi-application à valeurs convexes compactes, semi continue supérieurement sur $E \times E$ et H une multi-application à valeurs non vides fermées, semi continue inférieurement sur $E \times E$, telles que $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t), H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$ avec $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0,1] \rightrightarrows E$ deux multi-applicationes mesurables scalairement Pettis uniformément intégrables.