REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ Mohamed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacts et d'informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : ***Master***

Spécialité *: Mathématique Fondamental*

Option *: Analyse et applications*

Thème

Sur la Périodicité des Fractions Continues p-adiques d'un nombre quadratique

Présenté par :

AIMENE Djihad

Devant le jury :

Président : ***A. MAKHLOUF***

Encadreur : ***R. BELHADEF***

Examinateur : ***S. MEDJERAB***

Examinateur : ***S. MELIT***

Promotion 2016/2017

Remerciements

Je rends grâce à **Dieu** qui ma donné la force, le courage, et l'espoir nécessaire Pour accomplir ce travail et surmonter l'ensemble des difficultés.

J'adresse tout d'abord mes remerciements les plus sincères, au **Dr. Belhadef Rafik**, qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail. Sa grande connaissance dans le domaine, ainsi que son expérience, ont joué un rôle important dans la conception de ce travail.

Je voudrai également remercier les membres de mon jury : **Makhlouf Amira** et **Medjerab Samia** et **Melit Samira**, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leur attention sur ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les enseignants et les professeurs qui ont contribué à ma formation et à tous ceux qui m'ont aidé pendant la réalisation de ce travail.

Dédicace

Un grand mérci au bon Dieu notre seigneur des mondes pour le courage et la force qui nous a offri pour terminer ce mémoire.

Je dédie ce modeste travail :

À celle qui m'a aidé par ses sin- cères prières et douaa à la plus chère personne de ma vie ma mère. À celui qui a bien travaillé pour m'apprendre c'est quoi le combat et qui m'a fait ce que je suis mon chère père que Dieu le pro- tegè pour nous.

♡

À mes frères : Abd-Elbaki, Abd-Erraouf.

À mes soeurs : Bouteina, Nesrine, Abir, Rihanna.

À tout mes amis et camarades du chemin parcouru : Siham, Lemya, Ilyas, Massika, meryem, Sabrina.

À la fin, je prie le bon Dieu de faire ce travail trés utile pour les autres candidats de cette spécialité.

♢ . . . . ***Djihad***♢

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Qui n'a jamais entendu parler des fractions continues ?[1] Celles-ci ont été étudiées par les plus grands mathématiciens. On pourra citer notamment Lagrange, Galois, Fermat, Euler, Liouville et bien d'autres encore. Aussi, la théorie des fractions continues est déjà bien avancée et ses applications ne manquent pas. Pour vous en convaincre, il vous suffit d'ouvrir un livre quelconque traitant de la théorie des nombres.

Un thème très important dans la théorie des nombres est de trouver les solutions rationnelles des équations diophantiennes telles que $y^2 = x^3 - 7$, $x^3 + y^3 + z^3 = 4, \cdots$ etc. Ce qui nous conduit à étudier la caractérisation des nombres rationnels et des nombres irrationnels, telle que : la périodicité, l'algébricité et la complexité du développement.

La façon dont les nombres algébriques irrationnels peuvent être approchés par des nombres rationnels est une question centrale en analyse diophantienne. Cette problématique est bien sûr intimement liée au développement en fraction continue des nombres algébriques irrationnels.

On sait, par exemple, que le développement en fraction continue d'un nombre réel irrationnel α_0 est ultimement périodique si, et seulement si, α_0 est quadratique, i.e. racine d'un polynôme de degré 2.

Plusieurs auteurs avaient traité la périodicité du développement en fractions continues réel, voir par exemple les travaux : [1, 2, 3, 4, 5, 6, 21, 28, 35]. Cette propriété est utile dans des applications en théorie des nombres (approximation diophantienne), en systèmes

[1] Cette question s'adresse plutôt à un public ayant quelque peu étudié les mathématiques !

dynamiques, en géométrie discrète, ou en informatique théorique et même en physique.

Par contre, il y avait peu d'articles et pas de livres qui traite les propriétés des fractions continues p-adiques, en citant : [15, 16, 32, 33, 37, 38].

L'analogue p-adiques des fractions continues réels a été étudié pour la première fois par Mahler en 1934 [32]. Les fractions continues basées sur l'algorithme de Mahler ont été développés par Schneider ([38], 1968) qui a lissé une trace dans ce domaine, c'est la définition qui porte son nom, puis par Ruban en 1970 [34].

Enfin, n'oublions pas de citer les fameux travaux de Browkin dans deux articles [9, 1978] et [10, 2000], dont il avait donné d'autres méthodes pour définir les fractions continues p-adiques, ainsi il a caractérisé le développement d'un nombre quadratique.

Schneider dans son article [38] a essayé de traiter le problème de la caractérisation des nombres rationnels en termes de leurs fractions continues p-adiques. Bundschuh [17] en 1977 avait aussi participé à la caractérisation des fractions continues p-adiques de Schneider d'un nombre rationnel.

Trouver un analogue du théorème de Lagrange dans le cas p-adique est l'un des aspects les plus étudiés pour les fractions continues p-adiques. Généralement, il est facile de montrer qu'une fraction continue périodique représente un nombre rationnel ou un nombre irrationnel quadratique.

L'objectif de ce mémoire est de présenter des résultats intéressants et des conditions nécessaires pour étudier la périodicité des fractions continues p-adiques d'un nombre quadratique. De Weger dans son article [20], a démontré une propriété pour les nombres quadratiques dans $\mathbb{Q}_p$, c'est que un nombre $\sqrt{c} = \sqrt{e^2 + dp^k}$ admet un développement en fraction continue de Schneider périodique. Dans la proposition (3.3.3) nous avons démontré que l'inverse est vraie, c'est à dire qu'un nombre quadratique qui admet un développement en fraction continue de Schneider périodique s'écrit $\sqrt{c} = \sqrt{e^2 + dp^k}$.

Ce mémoire se compose de trois chapitres, qui sont organisés comme suit :

le premier chapitre est consacré à l'étude du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$, et leur compositions pour mieux comprendre les concepts de base de ce corps. nous commençons par la définition de la valuation et de la norme p-adique et quelques propriétés, ensuite, nous allons présenter la construction du corps des nombres p-adiques, réspectivement l'anneau des entiers p-adiques, et de donner la définition du développement de Hensel avec quelques exemples, terminons par les propriétés analytiques de $\mathbb{Q}_p$.

Dans le deuxième chapitre nous rappelons les aspects des fractions continues qui sera utiles dans le chapitre suivant, on pose deux partie pour expose les concepts fondamentaux des algorithmes des fractions continues. Dans la première partie nous étudions les fractions continues dans le cas réels, où nous y présenterons plusieurs théorèmes et propositions, dans la deuxième partie nous donnons deux algorithmes des fractions continue dans le cas p-adique (algorithme de Schneider, algorithme de Ruban), et nous regarderons aussi bien à un cas particulier pour l'étude de la convergence d'une fraction continue de Schneider.

Le dernier chapitre est consacré à l'analogue du théorème de Lagrange pour les fractions continues de Schneider d'un nombre quadratique. On commence par une historique sur la périodicité, qui comprend quelques résultats générales. Ensuite, on présente l'étude de De Weger qui traite le problème des fractions continues non périodique avec les exemples de Bundschuch. Enfin, on termine le chapitre par une illustration de notre proposition obtenu pour l'étude des fractions continues périodiques d'un nombre quadratique.

Notations

Nous utilisons les notations suivante tout au long du travail :

p : un nombre premier, $p = 2, 3, 5, 7, \cdots$

$\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs réels,

$\mathbb{Z}^*$: l'ensemble des entiers relatifs réels non nuls,

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,

$\mathbb{R}_+$: l'ensemble des nombres réels positifs,

$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels réels,

$\mathbb{N}^*$: l'ensemble des entiers naturels réels non nuls,

$\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels,

$\mathbb{Q}_p$: l'ensemble des nombres p-adiques,

$\mathbb{Q}_p^*$: l'ensemble des nombres p-adiques non nuls,

$\mathbb{Z}_p$: l'ensemble des entiers p-adiques,

$(P, Q) = 1$: P et Q sont premiers entre eux,

$x|y$: x divise y,

$v_p(x)$: la valuation p-adique de x,

$|\cdot|_p$: la valeur absolue p-adique,

$|\cdot|$: la valeur absolue usuelle,

$[x]_p$: partie entière p-adique de x,

$< x >_p$: partie fractionnaire p-adique de x,

$\overline{a_n \cdots a_0}^b$: écriture en base b,

CHAPITRE 1

Préliminaires sur les nombres p-adiques

Le but de ce chapitre est de présenter la base du domaine p-adique. Nous allons commencer par les définitions et les propriétés fondamentales dans $\mathbb{Q}$, et nous allons ensuite montrer la construction de $\mathbb{Q}_p$ et le développement de Hensel . Enfin, nous donnons les concepts pour les suites et les séries dans $\mathbb{Q}_p$.
En utilisant les références suivantes : [8, 9, 22, 25, 27, 29, 36].

1.1 Valuation et norme p-adique

Définition 1.1.1. *Soit p un nombre premier fixé et $x \in \mathbb{Z}$. On définit la valuation p-adique de x, notée $v_p(x)$ par l'application $v_p(x) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ comme suit :*

$$v_p(x) = max\{k \in \mathbb{N} : \frac{x}{p^k} \in \mathbb{Z}^*\}$$

et on écrit : $x = np^{v_p(x)}$ tel que $n \in \mathbb{Z}^*$ et p ne divise pas n. Avec la convention que le maximum d'un ensemble non borné et $+\infty$ ce qui donne $v_p(0) = +\infty$.

Ainsi, pour $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$)

$$v_p(x) = v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b).$$

et on écrit : $x = np^{v_p(x)}$ *tel que* $n \in \mathbb{Z}^*$ *et* p *ne divise pas* n.

Proposition 1.1.2. *Pour tout* $x, y \in \mathbb{Q}$*, on a :*

1) $v_p(x) = +\infty \Longleftrightarrow x = 0$.

2) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

3) $v_p(x + y) \geq min\{v_p(x), v_p(y)\}$.

4) Si $v_p(x) \neq v_p(y) \Longrightarrow v_p(x + y) = min\{v_p(x), v_p(y)\}$.

Preuve.

1) Par définition on a

$$v_p(x) = +\infty \Longleftrightarrow v_p(x) = v_p(0) \Longleftrightarrow x = 0.$$

2) Soient $x, y \in \mathbb{Z}^*$ telle que : $x = np^{v_p(x)}, y = mp^{v_p(y)}$, comme p ne divise pas n et m. On a

$$\begin{aligned} xy &= np^{v_p(x)}mp^{v_p(y)} \\ &= nmp^{v_p(x)+v_p(y)}. \end{aligned}$$

Comme p ne divise pas nm , alors

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y).$$

Dans le cas, soit $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_p(xy) &= v_p\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right) \\ &= v_p(ac) - v_p(bd) \\ &= v_p(a) + v_p(c) - v_p(b) - v_p(d) \\ &= v_p(\frac{a}{b}) + v_p(\frac{c}{d}) \\ &= v_p(x) + v_p(y). \end{aligned}$$

3) Soient $x, y \in \mathbb{Q}^*$:

   Soit $r, s \in \mathbb{Z}^*$, on pose $r = v_p(x)$ et $s = v_p(y)$, nous avons :

$$x = p^r(a/b), y = p^s(c/d).$$

   telle que $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}^*$ et p ne divise pas ces nombres, nous avons les cas suivants :

   (a) Si $r = s$ on trouve

$$\begin{aligned} x + y &= p^r\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \\ &= p^r\left(\frac{ad + cb}{bd}\right) \end{aligned}$$

   Comme p ne divise pas bd alors $v_p(x + y) = r$.

   (b) Si $r < s$, on a

$$\begin{aligned} x + y &= p^r\left(\frac{a}{b} + p^{s-r}\frac{c}{d}\right) \\ &= p^r\left(\frac{ad + p^{s-r}cb)}{bd}\right) \end{aligned}$$

   Alors

$$v_p(x + y) = r = min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

   (c) Si $r > s$, on a

$$x + y = p^s\left(\frac{a}{b} + p^{r-s}\frac{c}{d}\right) = p^s\left(\frac{ad + p^{r-s}cb}{bd}\right).$$

   Alors

$$v_p(x + y) = s = min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

4) D'après le cas b) ou c) l'égalité est vérifie. □

Remarque 1.1.3. *Soit p un nombre premier on a*

$$v_p(1) = 0 \quad \forall\, p\,.$$

Définition 1.1.4. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une norme sur $\mathbb{K}$ est une application $|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :*

1) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2) $|xy| = |x||y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{K}$.
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*

Définition 1.1.5. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. On dit qu'une norme $|\cdot|$ définie sur $\mathbb{K}$ est non-archimédienne si elle vérifie la condition :*

$$\forall x, y \in \mathbb{K}; |x + y| \leq max\{|x|, |y|\}$$

Cette condition s'appelle "inégalité triangulaire forte" *que la condition (3).*

Définition 1.1.6 (La norme p-adique). *Soit p un nombre premier, on définit l'application $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par :*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Cette application est une norme non-archimédienne sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.1.7. *Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ on a :*

1) $|x|_p = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2) $|xy|_p = |x|_p|y|_p$.
3) $|x + y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$.
4) *Si* $|x|_p \neq |y|_p$, *alors* $|x + y|_p = max\{|x|_p, |y|_p\}$.

Preuve.

1) Par définition on a :$|x|_p = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2) Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, on a

$$\begin{aligned} |xy|_p &= p^{-v_p(xy)} \\ &= p^{-v_p(x) - v_p(y)} \\ &= p^{-v_p(x)} p^{-v_p(y)} \\ &= |x|_p|y|_p. \end{aligned}$$

3) Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, on a

$$|x+y|_p = p^{-v_p(x+y)}.$$

D'après la proposition (1.1.2), on a

$$v_p(x+y) \geq min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

Supposons que $v_p(x) \geq v_p(y)$ donc :

$$min\{v_p(x), v_p(y)\} = v_p(y).$$

Alors :

$$\begin{aligned} v_p(x+y) &\geq v_p(y) \\ &\Rightarrow -v_p(x+y) \leq -v_p(y) \\ &\Rightarrow p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(y)} \\ &\Rightarrow |x+y|_p \leq |y|_p. \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} -v_p(x) &\leq -v_p(y) \\ &\Rightarrow p^{-v_p(x)} \leq p^{-v_p(y)} \\ &\Rightarrow |x|_p \leq |y|_p \\ &\Rightarrow max\{|x|_p, |y|_p\} = |y|_p. \end{aligned}$$

Donc :

$$|x+y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$$

La même démonstration pour $v_p(x) \leq v_p(y)$.

4) On peut supposer $|x|_p < |y|_p$, on a

$$|x+y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\} = |y|_p.$$

C'est à dire :

$$|x+y|_p \leq |y|_p \tag{1.1}$$

Il suffit de montrer que : $|y|_p \leq |x+y|_p$ on a

$$|y|_p = |x+y-x|_p \leq max\{|x+y|_p, |x|_p\}$$

si $max\{|x+y|_p, |x|_p\} = |x|_p$, alors $|y|_p \leq |x|_p$ est une contradiction avec l'hypothèse alors

$$|y|_p \leq |x+y|_p \tag{1.2}$$

de (1.1) et (1.2) : $|x+y|_p = |y|_p = max\{|x|_p, |y|_p\}$.

La même maniére avec $|x|_p > |y|_p$. □

Lemme 1.1.8. *On a les propriétés suivantes*

i) La norme p-adique $|\cdot|_p$ *prend ses valeurs dans l'ensemble suivant :*

$$\{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$

ii) Si $a, b \in \mathbb{Z}$*, alors*

$$a \equiv b \pmod{p^n} \Leftrightarrow |a-b|_p \leq p^{-n},\ \forall\, n \geq 0.$$

Preuve.

$i)$ Evident à partir de la définition de la norme p-adique.

$ii)$ Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$) Si $a \equiv b \pmod{p^n}$, $\forall\, n \geq 0$ alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}$:

$$a - b = kp^n$$

d'où

$$\begin{aligned} |a-b|_p &= |k|_p |p^n|_p \\ &= p^{-v_p(k)} p^{-v_p(p^n)} \\ &\leq p^{-n}, \quad \forall\, n \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Si $|a-b|_p \leq p^{-n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned} |a-b|_p \leq p^{-n} &\Leftrightarrow p^{-v_p(a-b)} \leq p^{-n} \\ &\Leftrightarrow -v_p(a-b) \leq -n \\ &\Leftrightarrow n \leq v_p(a-b) \\ &\Leftrightarrow v_p(a-b) - n \geq 0. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} a-b &= p^{v_p(a-b)} n_1 \quad \text{où } (p, n_1) = 1 \\ &= p^{v_p(a-b)-n+n} n_1 \\ &= p^n (p^{v_p(a-b)-n} n_1) \end{aligned}$$

Comme $v_p(a-b) - n \geq 0$, si on pose $k = p^{v_p(a-b)-n} n_1$, on a $k \in \mathbb{Z}$ donc $a - b = kp^n$, alors

$$a \equiv b \pmod{p^n}, \quad \forall\, n \geq 0. \qquad \square$$

Théorème 1.1.9 (Théorème d'Ostrowski). *Toute valeur absolue $|\cdot|$ sur $\mathbb{Q}$ est équivalente a l'une des valeurs suivantes :*

- *La valeur absolue triviale $|\cdot|_0$ définie par $x = 0 \Rightarrow |x|_0 = 0$ et $\forall\, x$ $(x \neq 0 \Rightarrow |x|_0 = 1)$.*
- *La valeur absolue euclidienne $|\cdot|_\infty$ (c'est à dire la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$).*
- *La valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ pour un certain p premier.*

1.2 Construction de $\mathbb{Q}_p$

Il est bien connu que le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet par rapport à la valeur absolue usuelle $|\cdot|$ on complété ce corps par la méthode de complétion connu dans la topologie on trouve le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ associeé à la valeur absolue usuelle $|\cdot|$. En appliquant le même théorème sur le corps $\mathbb{Q}$ mais par rapport à la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$, nous obtenons le corps des nombres p-adique associeé à la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ on le note $\mathbb{Q}_p$.

Dans l'exemple suivant on va démontrer que le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet par rapport à la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$.

Exemple 1.2.1. *Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $1 \leq x < p$, soit la suite de terme générale $y_n = x^{p^n}$, d'après le théorème de Fermat-Euler on a*

$$x^{p^n(p-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p^n}$$

d'où

$$|y_{n+1} - y_n|_p = |x^{p^n}(x^{p^n(p-1)} - 1)|_p \leq p^{-n}$$

aussi on a

$$\begin{aligned} |y_m - y_n|_p &= |y_m - y_{m-1} + y_{m-1} + \cdots + y_{n+1} - y_n|_p \\ &\leq max\{|y_m - y_{m-1}|_p, \cdots, |y_{n+1} - y_n|_p\} \\ &\leq p^{-n} \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} |y_m - y_n|_p = 0$$

la suite $(y_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ muni de la norme $|\cdot|_p$.
Supposons que cette suite converge vers $y \in \mathbb{Q}$, c'est à dire

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n \to +\infty} y_n \\ &= \lim_{n \to +\infty} y_{n+1} \\ &= \lim_{n \to +\infty} (y_n)^p \\ &= y^p \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} y - y^p = 0 &\Rightarrow y(y^{p-1} - 1) = 0 \\ &\Rightarrow y^{p-1} = 1 \end{aligned}$$

Cela signifie que y est une $(p-1)^{ième}$ racine de l'unité dans $\mathbb{Q}$, donc égale 1.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|y-x|_p &= |y - x^{p^n} + x^{p^n} - x|_p \\
&\leq max\{|y - x^{p^n}|_p, |x^{p^n} - x|_p\} \\
&\leq |x^{p^n} - x|_p \\
&\leq |x^{p^n-1} - 1|_p < 1
\end{aligned}$$

alors $p^{-v_p(y-x)} < 1$*, sens* $v_p(y-x) \geq 1$*, ainsi* p *divise* $y-x$*, cela signifie que* $y = x$ *alors, si* $x \neq 1$ *on aura une contradiction, donc* $y \notin \mathbb{Q}$*.*

Propriétés 1.2.2. $\mathbb{Q}_p$ *est un corps complet non-archimédien.*

Preuve.

1. $\mathbb{Q}_p$ est un corps :

   Il est clair pour $(\mathbb{Q}_p, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

   Il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$ non nul admet un inverse dans $\mathbb{Q}_p$.

   Soit $(x_n)_n \in \mathbb{Q}_p$ une suite de Cauchy de limite x alors :

   $$\lim_{n \to +\infty} |x_n|_p = |x|_p \neq 0$$

   donc $|x_n|_p$ est aussi non nul pour n assez grand, et donc la suite $v_p(x_n)$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}$, comme il s'agit d'une suite d'élément de $\mathbb{Z}$, elle est constante à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on définit une suite y_n d'élément de $\mathbb{Q}$ par :

   $$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < N \\ \dfrac{1}{x_n} & \text{si} \quad n \geq N \end{cases}$$

   Pour tout $n, m \geq N$ on a

   $$|y_n - y_m|_p = \frac{|x_n - x_m|_p}{|x_n|_p |x_m|_p}$$

   de sort que y_n soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, donc elle converge vers $y \in \mathbb{Q}_p$, et comme $x_n y_n = 1 \ \forall n \geq N$, alors :

$$xy = 1.$$

2. Comme $|\cdot|_p$ est une norme non-archimédienne sur $\mathbb{Q}_p$, alors $\mathbb{Q}_p$ est un corps complet non-archimédien. $\square$

Définition 1.2.3. *L'ensemble des entiers p-adiques est le disque unitaire suivant :*

$$\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1\}$$

Définition 1.2.4 (Corps des nombres p-adiques). *$\mathbb{Q}_p$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$, c'est à dire*

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}_p \text{ et } b \in \mathbb{Z}_p^*\}$$

Définition 1.2.5. *L'ensemble $\mathbb{Z}_p^\times$ des éléments inversibles dans $\mathbb{Z}_p$ se compose des entiers p-adiques de norme égale 1, à écrire*

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}$$

Les éléments de $\mathbb{Z}_p^\times$ s'appelent les unités, et $\mathbb{Z}_p^\times$ est le groupe des unités.

Proposition 1.2.6. *Tout entier p-adique $x \in \mathbb{Z}_p$ peut être représenté de manière canonique sous la forme :*

$$x = x_0 p^{v_p(x)},$$

où $x_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$ est une unité p-adique.

Proposition 1.2.7. *Si $x \in \mathbb{Q}$ et $|x|_p \leq 1$ on a :*

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \exists\, \alpha \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 \leq \alpha \leq p-1 \text{ et } |\alpha - x|_p \leq p^{-i}.$$

Preuve.
Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$ et $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ $(a,b) = 1$ on a :

$$|x|_p = \frac{|a|_p}{|b|_p} = \frac{p^{v_p(b)}}{p^{v_p(a)}} \leq 1$$

d'où p ne divis pas b alors $v_p(b) = 0$ donc $(b, p) = 1$

alors d'après la théorème de Bézout il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tel que $mb + np^i = 1, \forall\, i \in \mathbb{N}$.

On choisit $\alpha = am$, et $0 \leq \alpha \leq p - 1$ on a

$$\begin{aligned} |\alpha - x|_p &= |am - \frac{a}{b}|_p \\ &= \left|\frac{a}{b}\right|_p |mb - 1|_p \\ &\leq |np^i|_p \\ &= |n|_p |p^i|_p \\ &\leq |p^i|_p = p^{-i} \end{aligned}$$

D'où

$$|\alpha - x|_p \leq p^{-i}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$ □

1.3 Développement de Hensel

Dans cette section on va démontrer que chaque élément de $\mathbb{Q}_p$ s'écrit sous forme d'une série.

Proposition 1.3.1. *Soit $x \in \mathbb{Q}_p$ et $n_0 = v_p(x) \in \mathbb{Z}$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, avec $0 \leq a_n < p$ tel que la série*

$$\sum_{n \geq n_0} a_n p^n \quad \textit{converge vers } x.$$

Preuve.

Soit $x \in \mathbb{Q}_p, x \neq 0$; posons $y = p^{-v_p(x)} x$, alors

$$|y|_p = |p^{-v_p(x)}|_p |x|_p = p^{v_p(x)} p^{-v_p(x)} = 1$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{Q}_p$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $|y - r|_p \leq |p^i|_p$, $\forall i \in \mathbb{N}$, on déduit de la proposition (1.2.7) qu'il existe $a_0 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$0 \leq a_0 < p \quad \text{et} \quad |r - a_0|_p \leq |p^i|_p.$$

Ainsi, $|y-a_0|_p \leq |p^i|_p$ et $y-a_0 = p^{n_1}y_1$, avec $n_1 \geq 1$ et $|y_1|_p = 1$.

De même, il existe a_1, $0 \leq a_1 < p$ tels que $y_1 - a_1 = p^{\grave{n}_2}y_2$, $\grave{n}_2 \geq 1$, et $|y_2|_p = 1$.

Alors

$$y = a_0 + a_1p^{n_1} + p^{n_1+\grave{n}_2}y_2 = a_0 + a_1p^{n_1} + p^{n_2}y_2, \quad \text{où} \quad n_2 = n_1 + \grave{n}_2 > n_1$$

et par récurrence on peut déterminé une suite des nombres et une suite d'indices

$$a_0, a_1, \cdots, a_l \ \text{ et } \ n_1, n_2, \cdots, n_l, \ \text{ tels que } \ 0 < a_j < p, \ 1 \leq j \leq l, \, n_1 < n_2 < \cdots < n_l.$$

et

$$y = a_0 + a_1p^{n_1} + \cdots + a_{l-1}p^{n_{l-1}} + p^{n_l}y_l, \quad \text{et} \quad |y_l|_p = 1.$$

alors il existe a_l ; $0 < a_l < p$ et $\grave{n}_l \geq 1$ tels que $y_l - a_l = p^{\grave{n}_l}y_{l+1}$ et $|y_{l+1}|_p = 1$.

Et posant $n_l + \grave{n}_l = n_{l+1}$, on obtient

$$y = a_0 + a_1p^{n_1} + \cdots + a_lp^{n_l} + p^{n_{l+1}}y_{l+1},$$

Comme la suite $(n_l)_{l\geq 1}$ est strictement croissante, donc $\lim\limits_{l\to+\infty} n_l = +\infty$, et

$$\lim_{l\to+\infty} |p^{n_{l+1}}y_{l+1}|_p = \lim_{l\to+\infty} |p^{n_{l+1}}|_p|y_{l+1}|_p = \lim_{l\to+\infty} p^{-n_{l+1}} = 0$$

D'où

$$y = \lim_{l\to+\infty}\left(a_0 + \sum_{j=1}^{l} a_jp^{n_j}\right) = \sum_{n\geq 0} a_np^n.$$

Où l'on a posé $a_n = 0$ lorsque $n \notin \{0, n_j, j \geq 1\}$. Alors

$$x = p^{v_p(x)}y = p^{n_0}\sum_{n\geq 0} a_np^n = \sum_{n\geq 0} a_np^{n+n_0} = \sum_{i\geq n_0} a_{i-n_0}p^i, \quad \text{avec} \quad i = n + n_0. \qquad \square$$

Proposition 1.3.2. *Tout $x \in \mathbb{Q}_p^*$ admet une unique représentation $x = p^nu$ où $n \in \mathbb{Z}$ et u est une unité dans $\mathbb{Z}_p$.*

Preuve.

- ***Existence de la représentation*** :

  Soit $x \in \mathbb{Q}_p^*$ alors x s'écrit $x = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}_p$, $b \in \mathbb{Z}_p^*$. On sait que $a = a_0 p^k$ et $b = b_0 p^m$ avec a_0, b_0 des unités dans $\mathbb{Z}_p$ et $k = v_p(a), m = v_p(b) \in \mathbb{N}$ d'où

$$x = \frac{a_0}{b_0} p^{k-m}.$$

  $|u|_p = \left|\dfrac{a_0}{b_0}\right|_p = \dfrac{|a_0|_p}{|b_0|_p} = 1$

- ***Unicité de la représentation*** :

  Supposons que $x \in \mathbb{Q}_p^*$ admet deux représentation $x = up^k = vp^m$ avec u, v des unités dans $\mathbb{Z}_p$ et $m, k \in \mathbb{Z}$, alors

$$uv^{-1} = p^{m-k} \Rightarrow v_p(uv^{-1}) = v_p(p^{m-k}) = m - k$$

  Or $v_p(uv^{-1}) = 0$ car uv^{-1} est une unité, ce qui implique $m = k$ d'où l'unicité de la représentation. □

Proposition 1.3.3. *Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un unique développement sous la forme :*

$$x = \sum_{n \geq n_0} x_n p^n$$

où $0 \leq x_n < p$ et $n_0 \in \mathbb{Z}$. Si $x_{n_0} \neq 0$ alors $n_0 = v_p(x)$.

Preuve.

Soit $x \in \mathbb{Q}_p$ alors par la proposition (1.3.2) x s'écrit sous la forme :

$$x = up^{n_0} \text{ où } n_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } u \text{ unité dans } \mathbb{Z}_p.$$

Le développement dans $\mathbb{Z}_p$ donne :

$$u = \sum_{n \geq 0} a_n p^n , \quad 0 \leq b_n \leq p - 1$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n\geq 0} a_n p^{n+n_0} \\ &= \sum_{n\geq n_0} a_{n-n_0} p^n \\ &= \sum_{n\geq n_0} x_n p^n \end{aligned}$$

avec $x_n = a_{n-n_0}$ et x_n est unique car b_n est unique.

donc $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ c'est à dire $|u|_p = 1$, d'où $|x|_p = p^{-n_0}$, alors

$$v_p(x) = n_0.$$

- ***L'unicité du développement :***

  Supposons, par l'absurde que x admet deux développement différents. Alors il existe deux suites $0 \leq x_n < p$ et $0 \leq y_n < p$ tel que

$$x = \sum_{n\geq n_0} x_n p^n = \sum_{n\geq n_0} y_n p^n$$

  on a $x = p^{v_p(x)}u = p^{n_0}u$ alors $u = p^{-n_0}x$ donc

$$\begin{aligned} u &= p^{-n_0} \sum_{n\geq n_0} x_n p^n \\ &= \sum_{m\geq 0} x_{m+n_0} p^m \\ &= x_{n_0} + x_{n_0+1}p + x_{n_0+2}p^2 + \cdots + x_{n_0+n}p^n + \cdots \quad \textit{tel que } 0 \leq x_{m+n_0} < p \end{aligned}$$

  Aussi on a

$$\begin{aligned} u &= p^{-n_0} \sum_{n\geq n_0} y_n p^n \\ &= \sum_{m\geq 0} y_{m+n_0} p^m \\ &= y_{n_0} + y_{n_0+1}p + y_{n_0+2}p^2 + \cdots + y_{n_0+n}p^n + \cdots \quad \textit{tel que } 0 \leq y_{m+n_0} < p \end{aligned}$$

Donc on remarque que

$$0 = (x_{n_0} - y_{n_0}) + (x_{n_0+1} - y_{n_0+1})p + (x_{n_0+2} - y_{n_0+2})p^2 + \cdots + (x_{n_0+n} - y_{n_0+n})p^n + \cdots$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} y_{n_0} - x_{n_0} &= (x_{n_0+1} - y_{n_0+1})p + (x_{n_0+2} - y_{n_0+2})p^2 + \cdots + (x_{n_0+n} - y_{n_0+n})p^n + \cdots \\ &= p\left[(x_{n_0+1} - y_{n_0+1}) + (x_{n_0+2} - y_{n_0+2})p + \cdots + (x_{n_0+n} - y_{n_0+n})p^{n-1} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Donc voilà $y_{n_0} - x_{n_0} \equiv 0 \pmod p$ tel que $0 \leq x_{n_0}, y_{n_0} < p$, alors

$$y_{n_0} - x_{n_0} = 0 \Longleftrightarrow y_{n_0} = x_{n_0}$$

De même pour

$$\begin{aligned} y_{n_0+1} - x_{n_0+1} &= (x_{n_0+2} - y_{n_0+2})p + (x_{n_0+3} - y_{n_0+3})p^2 + \cdots + (x_{n_0+n} - y_{n_0+n})p^{n-1} + \cdots \\ &= p\left[(x_{n_0+2} - y_{n_0+2}) + (x_{n_0+3} - y_{n_0+3})p + \cdots + (x_{n_0+n} - y_{n_0+n})p^{n-2} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Ce qui implique que $y_{n_0+1} - x_{n_0+1} \equiv 0 \pmod p$ tel que $0 \leq x_{n_0+1}, y_{n_0+1} < p$, alors

$$y_{n_0+1} - x_{n_0+1} = 0 \Longleftrightarrow y_{n_0+1} = x_{n_0+1}$$

On répéte le même travail par rapport aux autres éléments, ainsi $y_{n_0+i} = x_{n_0+i}\ \forall\, i \in \mathbb{N}$ donc, nous concluons que le développement est unique. □

Définition 1.3.4. *Pour un nombre p-adique $x \in \mathbb{Q}_p$ on définit son* ***développement de Hensel*** *par la série suivante :*

$$x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$ et les a_n sont des nombres entiers entre 0 et $p-1$, en particulier $a_{n_0} \neq 0$.

Proposition 1.3.5. *Soit $x \in \mathbb{Z}_p$, alors $\sum\limits_{n \geq 0} a_n p^n$ est son développement de Hensel.*

Proposition 1.3.6. *Soit $a \in \mathbb{Q}_p$, donné par son développement de Hensel*

$$a = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n \quad a_{n_0} \neq 0 \text{ et } a_n \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$$

alors le développement de Hensel de $(-a)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$-a = (p - a_{n_0})p^{n_0} + \sum_{n \geq n_0+1} (p - a_n - 1)p^n$$

Preuve.

Soit $a = \sum\limits_{n \geq n_0} a_n p^n$ tel que $0 \leq a_n \leq p-1$, On a

$$|a|_p = |-a|_p = p^{-v_p(a)} = p^{-n_0} > 1 \text{ alors } (-a) \in \mathbb{Q}_p - \mathbb{Z}_p$$

On pose $-a = \sum\limits_{n \geq n_0} b_n p^n$ tel que $0 \leq b_n \leq p-1$ donc $a + (-a) = 0$ alors

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{n_0+2} & a_{n_0+1} & a_{n_0} \\
+ & & & & & & & & \\
 & \cdots & b_1 & b_0 & b_{-1} & \cdots & b_{n_0+2} & b_{n_0+1} & b_{n_0} \\
\hline
= & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

alors

$$a_{n_0} + b_{n_0} \equiv 0 \pmod{p} \Longrightarrow b_{n_0} = (p - a_{n_0})$$

donc calculons b_{n_0+1}

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{n_0+2} & a^1_{n_0+1} & a_{n_0} \\
+ & & & & & & & & \\
 & \cdots & b_1 & b_0 & b_{-1} & \cdots & b_{n_0+2} & b_{n_0+1} & p - a_{n_0} \\
\hline
= & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

alors

$$1 + a_{n_0+1} + b_{n_0+1} \equiv 0 \pmod p \Longrightarrow b_{n_0+1} = (p - a_{n_0+1} - 1)$$

calculons b_{n_0+2}

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a^1_{n_0+2} & a^1_{n_0+1} & a_{n_0} \\
+ & & & & & & & & \\
 & \cdots & b_1 & b_0 & b_{-1} & \cdots & b_{n_0+2} & (p - a_{n_0+1} - 1) & p - a_{n_0} \\
\hline
= & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

alors

$$1 + a_{n_0+2} + b_{n_0+2} \equiv 0 \pmod p \Longrightarrow b_{n_0+2} = (p - a_{n_0+2} - 1)$$

de même méthode calculons le reste on obtient :

$$\begin{aligned}
-a &= (p - a_{n_0})p^{n_0} + (p - a_{n_0+1} - 1)p^{n_0+1} + \cdots + (p - a_0 - 1)p^0 + (p - a_1 - 1)p + \cdots \\
&= (p - a_{n_0})p^{n_0} + \sum_{n \geq n_0+1} (p - a_n - 1)p^n.
\end{aligned} \quad \square$$

Corollaire 1.3.7. *Soit $a \in \mathbb{Z}_p$, $a = \sum_{n \geq 0} a_n p^n$. Le développement de Hensel de $(-a)$ s'écrit sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned}
-a &= (p - a_0)p^0 + (p - a_1 - 1)p + \cdots \\
&= (p - a_0) + \sum_{n \geq 1} (p - a_n - 1)p^n, \quad \textit{telle que } a_0 \neq 0
\end{aligned}$$

Proposition 1.3.8. *Soit $a = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n$ et $b = \sum_{n \geq n_0} b_n p^n$. Le développement de Hensel de ab est donné par :*

$$ab = \sum_{n \geq n_0} c_n p^n \quad \textit{telle que } c_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Remarque 1.3.9.

1. *L'inverse d'un entier p-adique $a = \sum_{n \geq 0} a_n p^n$ est un entier p-adique si $a_0 \neq 0$, ainsi, $B = \dfrac{1}{a} = \sum_{n \geq 0} b_n p^n$:*
   En outre $aB = 1$ on utilise la proposition (1.3.8) pour calculer les b_i telle que $a_i, b_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$

2. *Comme*

$$p\sum_{n\geq 0} a_n p^n \neq 1 + 0p + 0p + \cdots$$

le nombre premier p n'a pas d'inverse multiplicatif dans $\mathbb{Z}_p$ (Bien sûr, p a un inverse multiplicative dans $\mathbb{Q}_p$, voir l'exemple (1.3.15)).

Définition 1.3.10. *Soit $x \in \mathbb{Q}_p$. On défini $p^n\mathbb{Z}_p$ par l'ensemble suivante :*

$$\begin{aligned} p^n\mathbb{Z}_p &= \{x \in \mathbb{Q}_p : x = p^n a; a \in \mathbb{Z}_p\} \\ &= \{x \in \mathbb{Q}_p : |x| \leq \frac{1}{p^n}\} \end{aligned}$$

La partie fractionnaire p-adique

Définition 1.3.11. *Comme nous l'avons déjà définit, le développement de Hensel d'un nombre p-adique $x \in \mathbb{Q}_p$ s'écrit sous la forme suivante :*

$$x = \sum_{n\geq n_0} a_n p^n \quad \text{où } n_0 = v_p(x) \in \mathbb{Z}$$

*On définit **la partie entière p-adique** de x par :*

$$[x]_p = \sum_{n\geq 1} a_n p^n = a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots \in \mathbb{Z}_p$$

*et définit **la partie fractionnaire p-adique** par :*

$$< x >_p = \sum_{n=n_0}^{0} a_n p^n = a_{n_0} p^{n_0} + a_{n_0+1} p^{n_0+1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$$

On obtient ainsi une décomposition :

$$x = \underbrace{a_{n_0} p^{n_0} + a_{n_0+1} p^{n_0+1} + \cdots + a_0}_{<x>_p} + \underbrace{a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots}_{[x]_p}$$

Remarque 1.3.12. *Si* $< x >_p \neq 0$ *alors* $< x >_p = ap^k$*, pour les entiers* a *et* $k \leq 0$.

On sait que $0 \leq a_n \leq p-1$*, alors*

$$0 \leq < x >_p = \sum_{n=n_0}^{0} a_n p^n < (p-1) \sum_{n \geq 0} p^{-n} = p$$

Par conséquence, la partie fractionnaire de tout nombre p-adique satisfait

$$< x >_p \in [0, p[\cap \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right].$$

Remarque 1.3.13. *Si* $x \in \mathbb{Z}_p$ *alors*

$$< x >_p = a_0.$$

Exemple 1.3.14.

Soit $x = -1$*,* $p \geq 2$ *:*

$$|x|_p = |-1|_p = |1|_p = p^0 = 1 \quad alors \quad -1 \in \mathbb{Z}_p$$

On a

$$1 = 1 + 0p + 0p^2 + 0p^3 + \cdots \quad c'est\ \grave{a}\ dire \quad 1 = \cdots \overline{00001}^p$$

D'après le corollaire (1.3.7) le développement de Hensel de x *est donné par :*

$$-1 = (p-1) + (p-0-1)p + (p-0-1)p^2 + \cdots + (p-0-1)p^n + \cdots$$

Alors

$$-1 = \sum_{n \geq 0} (p-1)p^n$$

Et on écrira :

$$< -1 >_p = (p-1)$$

$$[-1]_p = (p-1) \sum_{n \geq 1} p^n.$$

Exemple 1.3.15.

1. *Soit* $x = \dfrac{1}{p}$ *et* $p \geq 2$

$$|x|_p = |\frac{1}{p}|_p = |p^{-1}|_p = p > 1 \quad alors \;\; \frac{1}{p} \in \mathbb{Q}_p - \mathbb{Z}_p$$

Donc le développement de Hensel de x *donné par :*
$\dfrac{1}{p} = 1.p^{-1} + 0.p^0 + 0p^1 + \cdots$ *C'est à dire* $\dfrac{1}{p} = \cdots \overline{000.1}^p$
Et on écrira :

$$< \frac{1}{p} >_p = \frac{1}{p}.$$
$$\left[\frac{1}{p}\right]_p = 0.$$

Dans le cas général : $x = \dfrac{1}{p^k}$ *et* $p \geq 2, k \geq 1$

$$\frac{1}{p^k} = 1.p^{-k} + 0.p^{-k+1} + 0p^{-k+2} + \cdots + 0 + 0.p + \cdots$$

Et on écrira :

$$< \frac{1}{p^k} >_p = \frac{1}{p^k}.$$
$$\left[\frac{1}{p^k}\right]_p = 0.$$

2. *Soit* $x = \dfrac{1}{2}$ *et* $p > 2$

$$|x|_p = |\frac{1}{2}|_p = |2^{-1}|_p = p^0 = 1 \quad alors \;\; \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_p$$

On a :

$$\begin{cases} 1 = 1 + 0.p + 0.p^2 + \cdots \quad c'est\ à\ dire \;\; 1 = \cdots \overline{0001}^p \\ \qquad\qquad et \\ 2 = 2 + 0.p + 0.p^2 + \cdots \quad c'est\ à\ dire \;\; 2 = \cdots \overline{0002}^p \end{cases}$$

On pose $A = \dfrac{1}{2} = \cdots \overline{a_2 a_1 a_0}^p$ *tel que* $a_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$

Comme $2A = 1$ *donc d'après la proposition(1.3.8) ona :*

$$\begin{cases} 2a_0 \equiv 1[p] & \Longrightarrow \quad a_0 \equiv \dfrac{p+1}{2}[p] \\ 1 + 2a_1 + 0a_0 \equiv 0[p] & \Longrightarrow \quad a_1 \equiv \dfrac{p-1}{2}[p] \\ 1 + 2a_2 + 0a_1 + 0a_0 \equiv 0[p] & \Longrightarrow \quad a_2 \equiv \dfrac{p-1}{2}[p] \\ \vdots \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{2} = \frac{p+1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{p-1}{2} p^n$$

Et on écrira :

$$< \frac{1}{2} >_p = \frac{p+1}{2}.$$
$$\left[\frac{1}{2}\right]_p = \sum_{n\geq 1} \frac{p-1}{2} p^n.$$

Exemple 1.3.16.

Calculons le développement de Hensel des nombres suivants :

1. *Soit* $x = -7$ *et* $p = 7$ *:*

$$|x|_p = |-7|_7 = 7^{-1} < 1 \quad alors \quad -7 \in \mathbb{Z}_7$$

On a $7 = 0.7 + 1.7 + 0.7 + \cdots$ *c'est à dire* $7 = \cdots \overline{0010}^7$

Donc le développement de Hensel de x *donné par :*

$$-7 = 6.7 + 6.7^2 \cdots + 6.7^n + \cdots$$

Alors

$$-7 = 6 \sum_{n\geq 1} 7^n$$

Et on écrira :

$$< -7 >_7 = 0$$
$$[-7]_7 = 6 \sum_{n\geq 1} 7^n.$$

2. *Soit* $x = -5$ *et* $p = 5$ *:*

$$|x|_p = |-5|_5 = 5^{-1} < 1 \quad alors \quad -5 \in \mathbb{Z}_5$$

On a $5 = 0.5 + 1.5 + 0.5 + \cdots$ *c'est à dire* $5 = \cdots \overline{0010}^5$

Donc le développement de Hensel de x *donné par :*

$$-5 = 4.5 + 4.5^2 \cdots + 4.5^n + \cdots$$

Alors

$$-5 = 4 \sum_{n \geq 1} 5^n$$

Et on écrira :

$$< -5 >_5 = 0$$

$$[-5]_5 = 4 \sum_{n \geq 1} 5^n.$$

Cas général : *Dans* $\mathbb{Q}_p$

$$-p = (p-1) \sum_{n \geq 1} p^n$$

3. *Soit* $x = -\dfrac{1}{7}$ *et* $p = 7$

$$|x|_p = \left| -\frac{1}{7} \right|_7 = 7 > 1 \quad alors \quad -\frac{1}{7} \in \mathbb{Q}_7 - \mathbb{Z}_7$$

On a : $\dfrac{1}{7} + \left(-\dfrac{1}{7}\right) = 0$ *telle que* $\dfrac{1}{7} = \cdots \overline{00.1}^7$

D'après la proposition (1.3.6) le développement de Hensel de x *donné par :*

$$-\frac{1}{7} = (7-1)7^{-1} + (7-0-1) + (7-0-1)7 + \cdots + (7-0-1)7^n + \cdots$$

Alors

$$-\frac{1}{7} = 6 \sum_{i \geq -1} 7^i$$

Et on écrira :

$$< -\frac{1}{7} >_7 = 6.7^{-1} + 6$$
$$\left[-\frac{1}{7}\right]_7 = 6\sum_{n\geq 1} 7^n.$$

Cas général : *Dans* $\mathbb{Q}_p$

$$-\frac{1}{p} = (p-1)\sum_{n\geq -1} p^n$$

4. *Soit* $x = -\frac{3}{2}$ *et* $p = 5$

$$|x|_p = \left|-\frac{3}{2}\right|_5 = 5^0 = 1 \quad alors \quad -\frac{3}{2} \in \mathbb{Z}_5$$

D'après le corollaire (1.3.7) on a : $-3 = 3 + 4.5 + 4.5^2 + \cdots$
Et voir l'exemple (1.3.15) on a : $\frac{1}{2} = 3 + 2.5 + 2.5^2 + \cdots$
Donc en utilise la proposition (1.3.8), on trouve

$$-\frac{3}{2} = 1 + 2.5 + 2.5^2 + \cdots$$

Et on écrira :

$$< -\frac{3}{2} >_5 = 1$$
$$\left[-\frac{3}{2}\right]_5 = 2\sum_{n\geq 1} 5^n.$$

5. *Soit* $x = -\frac{5}{2}$ *et* $p = 5$ *on a :*

$$\begin{cases} -5 = 4.5 + 4.5^2 + 4.5^3 + \cdots \\ \frac{1}{2} = 3 + 3.5 + 3.5^2 + \cdots \end{cases}$$

On pose $B = -5 \times \frac{1}{2}$ *tel que* $B = \cdots \overline{c_3 c_2 c_1 c_0}^5$ *donc d'après la proposition(1.3.8),* *on trouve :*

$$\begin{cases} c_0 = 3.0 & \Longrightarrow \quad c_0 \equiv 0[p] \\ c_1 = 3.0 + 4.3 & \Longrightarrow \quad c_1 \equiv 2[5] \\ c_2 = 2 + 3.4 + 3.4 + 0.3 & \Longrightarrow \quad c_2 \equiv 1[5] \\ c_3 = 5 + 3.4 + 3.4 + 3.4 + 0.3 & \Longrightarrow \quad c_3 \equiv 1[5] \\ \vdots \end{cases}$$

Donc

$$-\frac{5}{2} = 2.5 + 1.\sum_{n>1} 5^n$$

Et on écrira :

$$< -\frac{5}{2} >_5 = 0.$$
$$\left[-\frac{5}{2}\right]_5 = 2.5 + \sum_{n>1} 5^n.$$

6. *Soit* $x = \dfrac{2}{9}$ *dans* $\mathbb{Q}_3$ *on a :*

$$\begin{cases} 2 = 2 + 0.3 + 0.3^2 + \cdots & c\text{'est à dire} \quad 2 = \cdots \overline{0002}^3 \\ 9 = 0 + 0.3 + 1.3^2 + 0.3^3 + \cdots & c\text{'est à dire} \quad 9 = \cdots \overline{0100}^3 \end{cases}$$

Donc $\dfrac{2}{9} = 2.3^{-2} + 0.3^{-1} + 0 + 0.3 + \cdots$ *car :*

$$\begin{array}{rr|l} & \cdots\ 000200 & \cdots\ 000100 \\ \cline{3-3} - & & \cdots\ 00.02 \\ & \cdots\ 000200 & \\ \hline = & \cdots\ 000000 & \end{array}$$

On écrira :

$$< \frac{2}{9} >_3 = \frac{2}{9}.$$
$$\left[\frac{2}{9}\right]_3 = 0.$$

Exemple 1.3.17.

1. *On a déjà vu dans l'exemple(1.3.14) que :*

$$1 = -(p-1)\sum_{n\geq 0} p^n = (1-p)\sum_{n\geq 0} p^n$$

Il s'ensuit que $(1-p)$ est inversible en tant qu'élément de $\mathbb{Z}_p$ et son inverse est donné par la série géométrique suivante :

$$\frac{1}{1-p} = \sum_{n\geq 0} p^n$$

Voici quelques exemples numériques :

- $p = 2 : -1 = \sum_{n\geq 0} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots$
- $p = 3 : -\frac{1}{2} = \sum_{n\geq 0} 3^n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots$
- $p = 17 : -\frac{1}{16} = \sum_{n\geq 0} (17)^n = 1 + 17 + (17)^2 + \cdots$
- $p = 19 : -\frac{1}{18} = \sum_{n\geq 0} (19)^n = 1 + 19 + (19)^2 + \cdots$
- $p = 23 : -\frac{1}{22} = \sum_{n\geq 0} (23)^n = 1 + 23 + (23)^2 + \cdots$
- $p = 31 : -\frac{1}{30} = \sum_{n\geq 0} (31)^n = 1 + 31 + (31)^2 + \cdots$

2. *On remplace p par p^2, on trouve que $(1-p^2)$ est un nombre p-adique inversible et son développement de Hensel est donné par :*

$$\frac{1}{1-p^2} = \sum_{n\geq 0} p^{2n}$$

Voici quelques exemples numériques :

- $p = 2 : -\frac{1}{3} = \sum_{n\geq 0} 2^{2n} = 1 + 2^2 + 2^4 + \cdots$
- $p = 3 : -\frac{1}{8} = \sum_{n\geq 0} 3^{2n} = 1 + 3^2 + 3^4 + \cdots$
- $p = 17 : -\frac{1}{288} = \sum_{n\geq 0} (17)^{2n} = 1 + (17)^2 + (17)^4 + \cdots$

- $p = 19 : -\dfrac{1}{360} = \sum_{n\geq 0}(19)^{2n} = 1 + (19)^2 + (19)^4 + \cdots$
- $p = 23 : -\dfrac{1}{528} = \sum_{n\geq 0}(23)^{2n} = 1 + (23)^2 + (23)^4 + \cdots$
- $p = 31 : -\dfrac{1}{960} = \sum_{n\geq 0}(31)^{2n} = 1 + (31)^2 + (31)^4 + \cdots$

3. *Soit* $x = \sum_{n\geq 0} a_n p^n$ *tel que* $a_0 = 2, a_{2n} = 1, a_{2n+1} = 3$*, on aurra donc :*

$$x = 2 + \sum_{n\geq 0} p^{2n} + \sum_{n\geq 0} 3p^{2n+1} = 2 + \frac{1+3p}{1-p^2}$$

Voici quelques exemples numériques :

- $p = 2 : x = 2 + \sum_{n\geq 0} 2^{2n} + \sum_{n\geq 0} 2^{2n+1} = -\dfrac{1}{3}$
- $p = 3 : x = 2 + \sum_{n\geq 0} 3^{2n} + \sum_{n\geq 0} 3^{2n+1} = \dfrac{3}{4}$
- $p = 17 : x = 2 + \sum_{n\geq 0} (17)^{2n} + \sum_{n\geq 0} (17)^{2n+1} = \dfrac{131}{72}$
- $p = 19 : x = 2 + \sum_{n\geq 0} (19)^{2n} + \sum_{n\geq 0} (19)^{2n+1} = \dfrac{331}{180}$
- $p = 23 : x = 2 + \sum_{n\geq 0} (23)^{2n} + \sum_{n\geq 0} (23)^{2n+1} = \dfrac{493}{264}$
- $p = 31 : x = 2 + \sum_{n\geq 0} (31)^{2n} + \sum_{n\geq 0} (31)^{2n+1} = \dfrac{913}{480}$

1.4 Propriétés analytique des nombres p-adique

Théorème 1.4.1. *La suite* $(a_n)_n$ *dans* $\mathbb{Q}_p$ *est de Cauchy si,et seulement si,*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Preuve.

$\Longrightarrow$)Soit $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n|_p < \varepsilon$$

Posons $m = n + 1$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon$$

Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

$\Longleftarrow$) Supposons que :

$$\lim_{n \to +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

C'est à dire :

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon$$

Pour $m > n \geq n_0$ On a :

$$\begin{aligned} |a_m - a_n|_p &= |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)|_p < \varepsilon \\ &\leq max\{|(a_m - a_{m-1})|_p, |(a_{m-1} - a_{m-2})|_p, \cdots, |(a_{n+1} - a_n)|_p\} \\ &= max\{|a_{k+1} - a_k|_{pr}, k = \overline{n.m - 1}\,\}. \end{aligned}$$

D'où

$$|a_m - a_n|_p < \varepsilon$$

Alors $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy. □

Définition 1.4.2.

1) Soit la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ *dans* $\mathbb{Q}_p$*. On appelle la somme partielle de* $\sum_{n \geq 0} a_n$ *la suite* $(S_n)_n$ *telle que :*

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ *est convergente dans* $\mathbb{Q}_p$ *si, et seulement si,*

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S \quad (S \in \mathbb{Q}_p)$$

2) La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est converge absolue dans $\mathbb{Q}_p$ si,et seulement si, $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|_p$ est converge dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4.3. *La série $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|_p$ est convergente dans $\mathbb{R}$, Alors La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$.*

Preuve.
Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|_p$ est convergente alors $\sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|_p$ est une suite de Cauchy. C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \forall \, n, m \in \mathbb{N}; m > n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{i=0}^{m} |a_i|_p - \sum_{i=0}^{n} |a_i|_p \right| < \varepsilon.$$

Mais, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{m} |a_i|_p - \sum_{i=0}^{n} |a_i|_p \right| &= \left| \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p \right| \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p < \varepsilon \end{aligned} \tag{1.3}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} |S_m - S_n|_p &= \left| \sum_{i=0}^{m} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i \right|_p \\ &= \left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right|_p \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p \end{aligned} \tag{1.4}$$

D'après (1.3) on a

$$|S_m - S_n|_p < \varepsilon$$

Alors : $(S_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$ c'est à dire : $(S_n)_n$ est convergente ($\mathbb{Q}_p$ complet)
Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$. □

Proposition 1.4.4. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ dans $\mathbb{Q}_p$ alors :*

$$\exists \, N \in \mathbb{N} \, \forall \, n \geq \mathbb{N} : |a_n|_p = |a|_p.$$

Preuve.

Soit $(a_n)_n$ dans $\mathbb{Q}_p$. Donc $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$. C'est à dire : $(a_n)_n$ est convergente (car $\mathbb{Q}_p$ est complet).

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \forall \, n, m \in \mathbb{N}; m > n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n|_p < \varepsilon.$$

D'autre part on a

$$\left| |a_m|_p - |a_n|_p \right|_p \leq |a_m - a_n|_p < \varepsilon.$$

$(|a_n|_p)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, alors $(|a_n|_p)_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \forall \, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \left| |a_n|_p - l \right|_p < \varepsilon$$

Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n|_p \neq 0$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n|_p = l > 0$$

Soit

$$\varepsilon = l/2, \exists \, N_1 \in \mathbb{N}, \, \forall \, n \geq N_1 \Rightarrow |a_n|_p > l/2 \tag{1.5}$$

En plus de notre

$$\exists \, N_2 \in \mathbb{N} \, \forall \, m > n \geq N_2 \Rightarrow |a_m - a_n|_p < l/2 \tag{1.6}$$

D'où pour $n, m > max\{N_1, N_2\}$ on a

$$\begin{aligned} |a_m|_p &= |a_m - a_n + a_n|_p \\ &\leq max\{|a_m - a_n|_p, |a_n|_p\} \\ &= |a_n|_p \end{aligned}$$

D'après (1.5) et (1.6)

Si $n = N$ On a

$$|a_m|_p \leq |a_N|_p \quad \forall \, m \geq N. \tag{1.7}$$

De même

$$\begin{aligned}|a_n|_p &= |a_n - a_m + a_m|_p \\ &\leq max\{|a_n - a_m|_p, |a_m|_p\} \\ &= |a_m|_p\end{aligned}$$

Si $n = N$ On a

$$|a_N|_p \leq |a_m|_p \quad \forall\, m \geq N. \tag{1.8}$$

D'où $|a_N|_p = |a_m|_p$, $\forall m \geq N$ à partir de (1.7) et (1.8), par passage à la limite quand $m \to +\infty$.

On a :

$$|a_N|_p = |a|_p = l$$

Notre autorisation

$$|a_N|_p = |a_{N+1}|_p = \cdots = |a|_p$$

D'où

$$|a_n|_p = |a|_p, \, \forall\, n \geq N$$

□

Proposition 1.4.5. *La série* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$*, où* $a_n \in \mathbb{Q}_p$ *est convergente si, et seulement si,* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*, de plus on a :*

$$\left|\sum_{n\geq 0} a_n\right|_p \leq \max_{n\geq 0} |a_n|_p$$

Preuve.

Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente donc la suite de la somme partielle $(S_n)_n$ est de Cauchy on a :

$$\lim_{n\to+\infty} |S_n - S_{n-1}|_p = 0.$$

Et comme $a_n = S_n - S_{n-1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p = 0$$

D'autre part : si

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p = 0,$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} |S_n - S_{n-1}|_p = 0.$$

Alors : $(S_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$ c'est à dire : $(S_n)_n$ est convergente ($\mathbb{Q}_p$ complet), donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente.

Pour le deuxième cas on a :

1) Si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n = 0$ l'inégalité est évidente.
2) Si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \neq 0$ donc d'après la proposistion (1.4.4), on a

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\, \forall\, n \geq N : \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right|_p = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right|_p$$

Et, on a

$$max\{|a_n|_p; 0 \leq n \leq N\} = \max_n\{|a_n|_p\}$$

Donc d'après l'inégalité triangulaire forte, on a

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right|_p \leq max\{|a_n|_p; 0 \leq n \leq N\} = \max_n\{|a_n|_p\}. \qquad \square$$

CHAPITRE 2

Fractions continues

Dans ce chapitre comme son nom l'indique présente le concept de base des fractions continues sur deux types différents : le premier type traite les fractions continues dans le cas réel et dans le deuxième type on explique les fractions continues dans le cas p-adique. De plus, nous allons examiner un cas particulier pour étudier la convergence.
Pour de plus amples informations à ce sujet, on cit les références suivantes : [15, 16, 21, 37, 38].

2.1 Fractions continues dans $\mathbb{R}$

Les définitions et les théorèmes de cette section sont pris du livre "théorie des nombres" de Duverney [21].

Définition 2.1.1. *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres réels, avec $b_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$, soient les fractions suivantes :*

$$R_0 = a_0\,;\; R_1 = a_0 + \frac{a_1}{b_1}\,;\; R_2 = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}}\,;\; R_3 = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3}}}\,;\; \cdots$$

R_n s'obtient en remplaçant dans R_{n-1}, le terme b_{n-1} par $b_{n-1} + \dfrac{a_n}{b_n}$. On aurra :

$$R_n = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

À cause des divisions, certains termes de la suite R_n peuvent ne pas être définis ; cependant, on supposera qu'il existe un entier m tel que R_n existe pour tout $n \geq m$.
La suite $(R_n)_{n\geq m}$ définie alors une fraction continue *; les termes R_n sont les réduites de la fraction continue. On dira que la fraction continue est* convergente *si la suite R_n est convergente, divergente si la suite R_n est divergente. En cas de convergence, la limite R de R_n est appelée la* valeur *de la fraction continue, et on écrira*

$$R = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \cdots}}}$$

Théorème 2.1.2. *On a pour $n \geq 0$: $R_n = P_n/Q_n$, où les suites P_n et Q_n définies pour $n \geq -1$, vérifient*

$$P_{-1} = 1\,; \quad Q_{-1} = 0\,; \quad P_0 = a_0\,; \quad Q_0 = 1\,;$$

$$\begin{cases} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \quad \textit{pour} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.3. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \tag{2.2}$$

$$R_n - R_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}} \quad \textit{si} \quad Q_n \neq 0 \quad \textit{et} \quad Q_{n-1} \neq 0. \tag{2.3}$$

Théorème 2.1.4. *La fraction continue $a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \cdots}}}$ est convergente si, et seulement si, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}}$ est convergente.*

En cas de convergence, on a

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \cdots}}} = a_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}}$$

à condition que $Q_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$.

Théorème 2.1.5. *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$, deux suites de nombres réels non nuls. Alors les fractions continues*

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \cdots}}} \quad \text{et} \quad \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n + \cdots}}}$$

où

$$c_{2n} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2n}}\, b_{2n} \quad \text{et} \quad c_{2n+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2n}}{a_1 a_3 \cdots a_{2n+1}}\, b_{2n+1}$$

ont les mêmes réduites (on dit qu'elles sont équivalentes). Elles sont donc de même nature et en cas de convergence elles ont la même valeur.

Théorème 2.1.6. *Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels tell que $|c_n| \geq 2$ pour tout $n \geq 1$, et telle que la série $\sum_{\mathbf{n\geq 1}} \frac{1}{|c_n c_{n+1}|}$ soit convergente. Alors la fraction continue $\cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n + \cdots}}}$ est convergente.*

Définition 2.1.7. *Soit $\alpha_0 > 0$. On pose $\alpha_0 = c_0 + b_0$ où $c_0 = [\alpha_0]$ (partie entière de α_0) et $b_0 \in [0, 1[$. Si $b_0 \neq 0$, c'est à dire si α_0 n'est pas entier, on peut écrire $b_0 = 1/\alpha_1$ avec $\alpha_1 > 1$ puisque $b_0 < 1$,Ainsi*

$$\alpha_0 = c_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

On recommence avec α_1. Si α_1 n'est pas entier, on pose $\alpha_1 = c_1 + 1/\alpha_2$, avec $c_1 = [\alpha_1] \geq 1$ (puisque $\alpha_1 > 1$) et $\alpha_2 > 1$. D'où

$$\alpha_0 = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$$

Le processus se poursuivra tant que α_n n'est pas un nombre entier. On obtiendra

$$\alpha_0 = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}} \tag{2.4}$$

grâce à l'algorithme

$$\alpha_n = c_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}, \qquad c_n = [\alpha_n]. \tag{2.5}$$

Deux cas peuvent se présenter : ou bien un des α_n est entier, auquel cas (2.5) s'écrit $\alpha_n = c_n = [\alpha_n]$, et (2.4) devient $\alpha_0 = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n}}}$,
alors α_0 est évidemment un nombre rationnel, *puisque tous les $c_i, i \in \mathbb{N}$ sont entiers, ou bien aucun des α_n n'est pas entier, auquel cas on pourra écrire (2.4) pour tout n. Nous allons voir que dans ce deuxième cas α_0 est* irrationnel *et que la fraction continue*

$$c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n + \cdots}}} \qquad \text{converge vers } \alpha_0.$$

Théorème 2.1.8 (Algorithme des fractions continues). *On définit les suites (P_n) et (Q_n) par récurrence en posant pour tout $n \geq -1$:*

$$P_{-1} = 1; \quad Q_{-1} = 0; \quad P_0 = c_0; \quad Q_0 = 1;$$

$$\begin{cases} P_n = c_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = c_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \quad \text{pour} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_0 Q_{n-1} - P_{n-1} \neq 0$

$$c_n = \left[-\frac{\alpha_0 Q_{n-2} - P_{n-2}}{\alpha_0 Q_{n-1} - P_{n-1}} \right].$$

Alors pour tout $n \geq 0$, la réduite R_n d'ordre n de α_0 est égale à la fraction $\dfrac{P_n}{Q_n}$.

Proposition 2.1.9. *Soient (P_n) et (Q_n) les suites définies par les relations de récurrence ci-dessus. Alors pour tout $n \geq 1$, nous avons*

$$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1} \tag{2.7}$$

En particulier, pour tout $n \geq 0$, P_n et Q_n sont premiers entre eux.

Preuve.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de se rappeller les définitions de P_n et Q_n :

Si $n = 1$

$$\begin{aligned} P_1Q_0 - P_0Q_1 &= (c_1P_0 + P_{-1}) - c_0(c_1Q_0 + Q_{-1}) \\ &= c_1c_0 + 1 - c_0c_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

qui est bien égal à $(-1)^{1-1}$. La relation est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons maintenant la relation vérifie pour $n - 1$ c'est à dire

$$P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1} = (-1)^{n-2}$$

et montrons qu'elle est aussi pour n

$$\begin{aligned} P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n &= (c_nP_{n-1} + P_{n-2})Q_{n-1} - P_{n-1}(c_nQ_{n-1} + Q_{n-2}) \\ &= P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2} \\ &= -(-1)^{n-2} \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

Alors la relation est vraie pour tout $n \geq 1$.

Soit $n \geq 1$ et soit $d \geq 1$ un diviseur commun de P_n et Q_n. Alors d divise $(-1)^{n-1}$, donc $d = 1$. Donc P_n et Q_n sont premiers entre eux. □

Théorème 2.1.10. *La suite des réduites $\dfrac{P_n}{Q_n}$ converge vers α_0, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\left|\alpha_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^2} \quad \textit{où bien} \quad \lim_{n\to+\infty} P_n/Q_n = \alpha_0. \tag{2.8}$$

Notation. *Le développement de α_0 donné par l'algorithme* (2.5) *est appelé son développement en fraction continue régulière. Il est commode de le noter*

$$c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n + \cdots}}} = [c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots]$$

Définition 2.1.11. *Une fraction continue infinie $[c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots]$ est dite périodique s'il existe un entier $l > 0$ et un entier $k > 0$ tel que :*

$$c_{k'} = c_{k'+l}$$

pour tout $k' = k$ Si on pose $n = l + k$, la fraction s'écrit :

$$[c_0, c_1, \cdots, c_k, c_{k+1}, \cdots, c_n, c_{k+1}, \cdots]$$

On note cette fraction :

$$[c_1, \cdots, c_k, \overline{c_{k+1}, \cdots, c_n}]$$

La longueur de la période est $n - k = l$.

Définition 2.1.12. *Un nombre α_0 est un nombre irrationnel quadratique si, et seulement si, le nombre α_0 est irrationnel et racine d'un polynôme quadratique de la forme $AX^2 + BX + C$ à coefficients entiers A, B, C.*

On donne ici l'énnoncé des théorème célébres dans le cas réel :

Théorème 2.1.13. *Le développement en fraction continue est fini si, et seulement si, α_0 est un nombre rationnel.*

Théorème 2.1.14 (Lagrange). *Un nombre réel a un développement en fraction continue ultimement périodique si, et seulement si, il s'agit d'un nombre quadratique irrationnel.*

Théorème 2.1.15 (Lamé). *Le nombre de termes du développement en fraction continue d'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est inférieur à cinq fois le nombre de chiffres servant à écrire le plus petit des deux entier a et b.*

Remarque 2.1.16. *Nous voyons une premiére différence avec le développement décimal. Le développement décimal d'un nombre rationnel est fini ou périodique. Le développement en fraction continue d'un nombre rationnel est toujours fini. Une deuxième différence réside dans le fait que le développement décimal n'est pas toujours unique, alors que le développement en fraction continue est unique.*

Exemple 2.1.17.

Voici quelques exemples numériques :

1. *Soit* $\alpha = \dfrac{1124}{1029}$ *:*

   $\dfrac{1124}{1029} = 1 + \dfrac{95}{1029} = 1 + \dfrac{1}{\alpha_1}$ *tel que* $\alpha_0 = [\alpha] = 1$

   avec $\alpha_1 = \dfrac{1029}{95} = 10 + \dfrac{79}{95} = 10 + \dfrac{1}{\alpha_2}$

   avec $\alpha_2 = \dfrac{95}{79} = 1 + \dfrac{16}{79} = 1 + \dfrac{1}{\alpha_3}$

   avec $\alpha_3 = \dfrac{79}{16} = 4 + \dfrac{15}{16} = 4 + \dfrac{1}{\alpha_4}$

   avec $\alpha_4 = \dfrac{16}{15} = 1 + \dfrac{1}{15} = 1 + \dfrac{1}{\alpha_5}$ *avec* $\alpha_5 = 15$

   donc le développement en fraction continue s'écrit sous la forme :

$$\frac{1124}{1029} = [1, 10, 1, 4, 1, 15]$$

2. *Soit* $\alpha = \sqrt{3}$:

   $\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \dfrac{1}{\alpha_1}$ *tel que* $\alpha_0 = [\alpha] = 1$

   avec $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = 1 + \dfrac{1}{\alpha_2}$

   avec $\alpha_2 = \sqrt{3} + 1 = 2 + (\sqrt{3} - 1) = 2 + \dfrac{1}{\alpha_3}$

   avec $\alpha_3 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = 1 + \dfrac{1}{\alpha_4}$

   donc nous calculons de la même manière on obtient :

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}} = [1, \overline{1, 2}\,]$$

alors le développement en fraction continue de $\sqrt{3}$ *est périodique de période* 2.

3. *Soit* $\alpha = \sqrt{5}$:

$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \dfrac{1}{\alpha_1}$ *tel que* $\alpha_0 = [\alpha] = 2$

avec $\alpha_1 = \sqrt{5} + 2 = 4 + (\sqrt{5} - 2) = 4 + \dfrac{1}{\alpha_2}$

avec $\alpha_2 = \sqrt{5} + 2 = 4 + (\sqrt{5} - 2) = 4 + \dfrac{1}{\alpha_3}$

donc le développement en fraction continue de $\sqrt{5}$ *est périodique de période* 1, *à partir du rang* 1. *Plus précisément* $\alpha_n = 4 \ \ \forall n \geq 1$

Ainsi

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cdots}}}} = [1, \overline{4}\,]$$

4. *Pour évaluer de fraction continue* $[-1, 1, 3, 5, 7, 9]$ *on utilise le tableau suivant, qui ressemble à ceux de l'algorithme de fraction continue.*

c_i		-1	1	3	5	7	9
P_i	1	-1	0	-1	-5	-36	-329
Q_i	0	1	1	4	21	151	1380

Donc on a $[-1, 1, 3, 5, 7, 9] = -\dfrac{329}{1380}$ *et ses réduites sont* $-1, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{21}, -\frac{36}{151}, -\frac{329}{1380}$

c'est à dire

$$-1 = -\frac{1}{1} \qquad ; \qquad -1 + \frac{1}{1} = 0$$

$$-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} = -\frac{1}{4} \quad ; \quad -1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}} = -\frac{5}{21}$$

$$-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}}} = -\frac{36}{151} \quad ; \quad -1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9}}}}} = -\frac{329}{1380}$$

2.2 Fractions continues dans $\mathbb{Q}_p$

Il existe deux définitions non équivalentes des fractions continues dans le corps $\mathbb{Q}_p$ ressemble à la définition d'une fraction continue réelle : la définition de Schneider ([38], 1968) et la définition de Ruban ([37], 1970) modifie par Browkin ([15], 1978).

Définition 2.2.1 (Schneider). *Soit p un nombre premier impair. On dit fraction continue de Schneider (on l'abrégé FCS) d'un entier p-adique y, une construite de la manière suivante :*

1) On met $y = y_0$ et $y_{n+1} = \dfrac{p^{\alpha_n}}{y_n - a_n}$

2) On choisit $a_0 \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ et $a_n \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

alors $\alpha_n = v_p(y_n - a_n)$ tel que $\alpha_0 \geq 0$ et $\alpha_n > 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \geq 0$ tant que $y_n \neq a_n$, la fraction continue de Schneider s'écrit sous la forme :

$$y = a_0 + \cfrac{p^{\alpha_0}}{a_1 + \cfrac{p^{\alpha_1}}{\ddots + \cfrac{}{a_n + \cfrac{p^{\alpha_n}}{\cdots}}}}$$

Si $y_n = a_n$ alors la fraction continue se termine par $\dfrac{p^{\alpha_{n-1}}}{a_n}$.

On explique les fractions continues de Schneider avec précision dans l'algorithme suivant :

Algorithme 2.2.2.

•***étape 0*** **:** *On pose $y = y_0$.*

•***étape 0'*** **:** *On choisit $a_0 \in \{0, \cdots, p-1\}$ tel que $v_p(y_0 - a_0) \geq 0$*

dans cette étape , on retrouve $\alpha_0 = v_p(y_0 - a_0)$.

•***étape 1*** **:** *On pose $y_1 = \dfrac{p^{\alpha_0}}{y_0 - a_0}$ donc $y = a_0 + \dfrac{p^{\alpha_0}}{y_1}$.*

•***étape 1'*** **:** *On choisit $a_1 \in \{1, \cdots, p-1\}$ tel que $v_p(y_1 - a_1) > 0$*

dans cette étape , on retrouve $\alpha_1 = v_p(y_1 - a_1)$.

•***étape 2*** **:** *On pose $y_2 = \dfrac{p^{\alpha_1}}{y_1 - a_1}$ donc $y = a_0 + \cfrac{p^{\alpha_0}}{a_1 + \cfrac{p^{\alpha_1}}{y_2}}$.*

•***étape 2'*** **:** *On choisit $a_2 \in \{1, \cdots, p-1\}$ tel que $v_p(y_2 - a_2) > 0$*

dans cette étape , on retrouve $\alpha_2 = v_p(y_2 - a_2)$.

$$\vdots$$

•***étape n*** **:** *On pose* $y_n = \dfrac{p^{\alpha_{n-1}}}{y_{n-1} - a_{n-1}}$ *donc* $y = a_0 + \cfrac{p^{\alpha_0}}{a_1 + \cfrac{p^{\alpha_1}}{\ddots + \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{p^{\alpha_{n-1}}}{y_n}}}}.$

•***étape n'*** **:** *On choisit* $a_n \in \{1, \cdots, p-1\}$ *tel que* $v_p(y_n - a_n) > 0$

dans cette étape , on retrouve $\alpha_n = v_p(y_n - a_n)$.

etc, $\cdots$

Voici quelques exemples numériques, pour se type de fractions :

Exemple 2.2.3.

Soit $y = -1$ *dans* $\mathbb{Q}_7$*, en utilisant l'algorithme de Schneider, on a :*

•***étape 0*** **:** *On pose* $y_0 = -1$

•***étape 0'*** **:** *On choisit* $a_0 = 6$ *tel que* $v_7(-7) = 1 \geq 0$ *car*

$$-7 = 6.7 + 6.7^2 + \cdots$$

dans cette étape , on retrouve $\alpha_0 = v_7(-7) = 1$.

•***étape 1*** **:** *On pose* $y_1 = \dfrac{7}{-1-6} = -1$ *donc* $-1 = 6 + \dfrac{7}{-1}$.

•***étape 1'*** **:** *On choisit* $a_1 = 6$ *tel que* $v_7(-7) = 1 > 0$

dans cette étape , on retrouve $\alpha_1 = v_7(-7) = 1$.

•***étape 2*** **:** *On pose* $y_2 = \dfrac{7}{-1-6} = -1$ *donc* $-1 = 6 + \cfrac{7}{6 + \cfrac{7}{-1}}$.

•***étape 2'*** **:** *On choisit* $a_2 = 6$ *tel que* $v_7(-7) = 1 > 0$

dans cette étape , on retrouve $\alpha_2 = v_7(-7) = 1$.

$$\vdots$$

•***étape n*** **:** *On pose* $y_n = \dfrac{7}{-1-6} = -1$ *donc* $-1 = 6 + \cfrac{7}{6 + \cfrac{7}{\ddots + \cfrac{}{6 + \cfrac{7}{-1}}}}.$

•**étape n′ :** *On choisit* $a_n = 6$ *tel que* $v_7(-7) = 1 > 0$

dans cette étape , on retrouve $\alpha_n = v_7(-7) = 1$.

etc, $\cdots$

$$-1 = 6 + \cfrac{7}{6 + \cfrac{7}{\ddots + \cfrac{7}{6 + \cfrac{7}{6 + \cdots}}}}$$

Corollaire 2.2.4. *Le développement de Schneider de* $x = -1$ *dans* $\mathbb{Q}_p$ $(p > 2)$ *s'écrit sous la forme :*

$$-1 = (p-1) + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{\ddots + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{\cdots}}}}}$$

Preuve.

Nous prouvons l'égalité suivante qui est évidemment équivalente à l'assertion :

$$y = 0 = p + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{\ddots + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{\cdots}}}}} \quad \textit{dans } \mathbb{Q}_p \;\; p > 2$$

On prend : $a_0 = p$ et $a_n = (p-1)\ \forall\, n \geq 1$

alors

$$P_{-1} = 1, \;\; P_0 = p$$

$$P_1 = (p-1)p + p = p^2$$
$$P_2 = (p-1)p^2 + p^2 = p^3$$
$$\vdots$$
$$P_n = p^{n+1} \quad n \geq 0$$

D'autre part, comme $|Q_n|_p = 1$ pour $n \geq 0$

donc

$$|y|_p = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{P_n}{Q_n}\right|_p = \lim_{n\to+\infty} p^{-(n+1)} = 0$$

Alors $y = 0$ $\square$

Exemple 2.2.5.

Soit $p = 5$, $y = -\dfrac{3}{2}$:

●***étape 0*** **:** *On pose* $y_0 = -\dfrac{3}{2}$

●***étape 0'*** **:** *On choisit* $a_0 = 1$ *tel que* $v_5(-\dfrac{5}{2}) = 1 \geq 0$ *car*

$$-\frac{5}{2} = 2.5 + 1.5^2 + 1.5^3 + \cdots$$

dans cette étape , on retrouve $\alpha_0 = v_5(-\dfrac{5}{2}) = 1.$

●***étape 1*** **:** *On pose* $y_1 = \dfrac{5}{-\dfrac{3}{2} - 1} = -2$ *donc* $-\dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{5}{-2}.$

●***étape 1'*** **:** *On choisit* $a_1 = 3$ *tel que* $v_5(-5) = 1 > 0$

dans cette étape , on retrouve $\alpha_1 = v_5(-5) = 1.$

●***étape 2*** **:** *On pose* $y_2 = \dfrac{5}{-2-3} = -1$ *donc* $-\dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{5}{3 + \dfrac{5}{-1}}.$

●***étape 2'*** **:** *On choisit* $a_2 = 4$ *tel que* $v_5(-5) = 1 > 0$

dans cette étape , on retrouve $\alpha_2 = v_5(-5) = 1.$

$$\vdots$$

●***étape n*** **:** *On pose* $y_n = \dfrac{5}{-1-4} = -1$ *donc* $-\dfrac{3}{2} = 1 + \cfrac{5}{3 + \cfrac{5}{4 + \cfrac{5}{\ddots + \cfrac{5}{4 + \cfrac{5}{-1}}}}}.$

●***étape n'*** **:** *On choisit* $a_n = 4$ *tel que* $v_5(-5) = 1 > 0$

dans cette étape , on retrouve $\alpha_n = v_5(-5) = 1.$

etc, $\cdots$

$$-\frac{3}{2} = 1 + \cfrac{5}{3 + \cfrac{5}{4 + \cfrac{5}{\ddots + \cfrac{5}{4 + \cfrac{5}{4 + \cdots}}}}}$$

Définition 2.2.6 (Ruban). *Soit p un nombre premier impair. On dit fraction continue de Ruban (on l'abrégé FCR) d'un nombre p-adique y, une construite de la manière suivante :*

1) *On met $y = y_0$ et $y_{n+1} = \dfrac{1}{y_n - a_n}$*
2) *On choisit $a_n \in \mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{p}\right] \cap]0, p[\ \forall n \in \mathbb{N}$, tel que $v_p(a_0) \geq 0$ et $v_p(a_n) > 0 \,\forall n \in \mathbb{N}^*$*
3) *$a_n =< y_n >_p\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Pour $n \geq 0$ tant que $y_n \neq a_n$, la fraction continue de Ruban s'écrit sous la forme :

$$y = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Si $y_n = a_n$ alors la fraction continue se terminer par $\dfrac{1}{a_n}$.

On explique la fraction continue de Ruban avec précision dans l'algorithme suivant :

Algorithme 2.2.7.

•***étape 0*** **:** *On pose $y = y_0$, avec le développement de Hensel $y = \sum_{n \geq n_0} x_n p^n$*

•***étape 0'*** **:** *On choisit $a_0 =< y_0 >_p = \dfrac{x_{n_0}}{p^{n_0}} + \dfrac{x_{n_0+1}}{p^{n_0+1}} + \cdots + x_0$*

•***étape 0''*** **:** *Si $< y_0 >_p = y_0$ telle que $[y_0]_p = 0$, alors s'arrête, cela signifie que le développement de Hensel de x est fini et aussi un nombre rationnel. Sinon on passe à l'étape suivant.*

•***étape 1*** *On pose $y_1 = \dfrac{1}{y_0 - a_0}$, donc $y = a_0 + \dfrac{1}{y_1}$.*

•***étape 1'*** **:** *On choisit $a_1 =< y_1 >$.*

•***étape 1''*** **:** *Si $< y_1 >_p = y_1$ telle que $[y_1]_p = 0$, alors s'arrête, cela signifie que le développement de Hensel de x est fini et aussi un nombre rationnel. Sinon on passe à l'étape suivant.*

$$\vdots$$

•***étape n*** **:** *On pose* $y_n = \dfrac{1}{y_{n-1} - a_{n-1}}$ *donc* $y = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{y_n}}}}$.

•***étape n'*** **:** *On choisit* $a_n =< y_n >_p$.

•***étape n"*** **:** *Si* $< y_n >_p = y_n$ *telle que* $[y_n]_p = 0$, *alors s'arrête, cela signifie que le développement de Hensel de* x *est fini et aussi un nombre rationnel. Sinon on passe à l'étape suivant.*

etc, $\cdots$

Voici quelques exemples numériques, pour se type de fractions :

Exemple 2.2.8.

Soit $y = -1$, $p = 7$, *en utilisant l'algorithme de Ruban, on a :*

•***étape 0*** **:** *On pose* $y_0 = -1$, *avec le développement de Hensel*

$$-1 = 6 + 6.7 + 6.7^2 + \cdots$$

•***étape 0'*** **:** *On choisit* $a_0 =< -1 >_7 = 6$ *et* $[-1]_7 = 6.7 + 6.7^2 + 6.7^3 + \cdots$

•***étape 1*** **:** *On pose* $y_1 = -\dfrac{1}{7}$, *avec le développement de Hensel*
$-\dfrac{1}{7} = 6.7^{-1} + 6 + 6.7 + 6.7^2 + \cdots$ *donc* $-1 = 6 + \dfrac{1}{-\dfrac{1}{7}}$.

•***étape 1'*** **:** *On choisit* $a_1 =< -\dfrac{1}{7} >_7 = \dfrac{48}{7}$ *et* $\left[-\dfrac{1}{7}\right]_7 = 6.7 + 6.7^2 + \cdots$

•***étape 2*** **:** *On pose* $y_2 = -\dfrac{1}{7}$, *avec le développement de Hensel*
$-\dfrac{1}{7} = 6.7^{-1} + 6 + 6.7 + 6.7^2 + \cdots$, *donc* $-1 = 6 + \cfrac{1}{\frac{48}{7} + \cfrac{1}{-\frac{1}{7}}}$

•***étape 2'*** **:** *On choisit* $a_2 =< -\dfrac{1}{7} >_7 = \dfrac{48}{7}$ *et* $\left[-\dfrac{1}{7}\right]_7 = 6.7 + 6.7^2 + \cdots$

$$\vdots$$

●***étape n*** **:** *On pose* $y_n = -\dfrac{1}{7}$ *, avec le développement de Hensel*

$$-\frac{1}{7} = 6.7^{-1} + 6 + 6.7 + 6.7^2 + \cdots \text{ donc } -1 = 6 + \cfrac{1}{\frac{48}{7} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\frac{48}{7} + \cfrac{1}{-\frac{1}{7}}}}}.$$

●***étape n'*** **:** *On choisit* $a_n = < -\dfrac{1}{7} >_7$ *et* $\left[-\dfrac{1}{7}\right]_7 = 6.7 + 6.7^2 + 6.7^3 + \cdots$

etc, $\cdots$

$$-1 = 6 + \cfrac{1}{\frac{48}{7} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\frac{48}{7} + \cdots}}}$$

Corollaire 2.2.9. *Le développement de Ruban de $x = -1$ dans $\mathbb{Q}_p$ telle que $(p > 2)$ s'écrit sous la forme :*

$$-1 = (p-1) + \cfrac{1}{\frac{(p^2-1)}{p} + \cfrac{1}{\frac{(p^2-1)}{p} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\frac{(p^2-1)}{p} + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

Exemple 2.2.10.

Soit $y = -\dfrac{3}{2}$, $p = 5$

●***étape 0*** **:** *On pose* $y_0 = -\dfrac{3}{2}$*, avec le développement de Hensel*

$$-\frac{3}{2} = 1 + 2.5 + 2.5^2 + \cdots$$

●**étape 0'** **:** *On choisit* $a_0 = < -\dfrac{3}{2} >_5 = 1$ *et* $\left[-\dfrac{3}{2}\right]_5 = 1.5 + 2.5^2 + 2.5^3 + \cdots$

●***étape 1*** **:** *On pose* $y_1 = -\dfrac{2}{5}$*, avec le développement de Hensel*

$$-\frac{2}{5} = 3.5^{-1} + 4 + 4.5 + 4.5^2 + \cdots \text{ donc } -\frac{3}{2} = 1 + \cfrac{1}{-\frac{2}{5}}.$$

●***étape 1'*** **:** *On choisit* $a_1 = < -\dfrac{2}{5} >_5 = \dfrac{23}{5}$ *et* $\left[-\dfrac{2}{5}\right]_5 = 4.5 + 4.5^2 + \cdots$

●***étape 2*** **:** *On pose* $y_2 = -\dfrac{1}{5}$, *avec le développement de Hensel*

$$-\frac{1}{5} = 4.5^{-1} + 4 + 4.5 + 4.5^2 + \cdots \text{ , donc } -\frac{3}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{23}{5} + \cfrac{1}{-\cfrac{1}{5}}}$$

●***étape 2'*** **:** *On choisit* $a_2 = < -\dfrac{1}{5} >_5 = \dfrac{24}{5}$ *et* $\left[-\dfrac{1}{5}\right]_5 = 4.5 + 4.5^2 + \cdots$

$$\vdots$$

●***étape n*** **:** *On pose* $y_n = -\dfrac{1}{5}$, *avec le développement de Hensel*

$$-\frac{1}{5} = 4.5^{-1} + 4 + 4.5 + 4.5^2 + \cdots \text{ donc } -\frac{3}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{23}{5} + \cfrac{1}{\cfrac{24}{5} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\cfrac{24}{5} + \cfrac{1}{-\cfrac{1}{5}}}}}}.$$

●***étape n'*** **:** *On choisit* $a_n = < -\dfrac{1}{5} >_5$ *et* $\left[-\dfrac{1}{5}\right]_5 = 4.5 + 4.5^2 + 4.5^3 + \cdots$

etc, $\cdots$

$$-\frac{3}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{23}{5} + \cfrac{1}{\cfrac{24}{5} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\cfrac{24}{5} + \cdots}}}}$$

Définition 2.2.11. *Soit p un nombre premier et $\mathfrak{R} = \{0, \pm 1, \cdots, \pm \frac{p-1}{2}\} \subset \mathbb{Z}$. Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un développement unique donné par la formule suivante :*

$$x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathfrak{R}$ pour $n \geq n_0$ et $a_{n_0} \neq 0$ alors $v_p(x) = n_0$.

Nous définssons la partie fractionnaire par l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=n_0}^{0} a_n p^n \end{array}$$

On la note $S(x) = < x >_p$ *alors* $S(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \cap \left]-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right[$,
c'est à dire $< x >_p \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \cap \left]-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right[$.

Définition 2.2.12 (Browkin). *On définit la fraction continue de Browkin (on l'abrège FCB) par la même méthode de Ruban, sauf la condition sur les* a_n *est :*

$$a_n \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \cap \left]-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right[\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dans la suite, on va étudier le cas particulier $p = 2$, nous donnons un algorithme des fractions continues p-adiques de Schneider pour ce cas. On donne aussi, une caractérisation combinatoire d'un nombre rationnel admet un développement en fractions continues fini.

Algorithme 2.2.13 ([23]).
Comme $a_i = 1$ *pour tout* $i \geq 1$*, la fraction continue* 2*-adique d'une unité* 2*-adique est spécifiée Par la suite des exposants* α_i*. Soit* P *une suite finie d'entiers* a_i *avec* $\alpha_i \geq 1$*. Alors, la fraction continue défini à partir de la suite* P *est égal à*

$$\frac{1 + 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + 2^{\alpha_3} + \cdots + 2^{\alpha_1+\alpha_3} + \cdots + 2^{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5} + \cdots}{1 + 2^{\alpha_2} + 2^{\alpha_3} + 2^{\alpha_4} + \cdots + 2^{\alpha_2+\alpha_4} + \cdots + 2^{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6} + \cdots}$$

La règle utilisée pour obtenir la fraction est la suivante :
Former une nouvelle suite $2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \cdots$*. Maintenant, créer tous les produits (y compris le produit vide* 1*) à partir de cette suite telle que aucun élément avec des indices consécutifs n'est utilisé. Enfin, additionner tous ces produits. Cela donne le numérateur. Le dénominateur est obtenu en commençant par la suite* $\alpha_2, \alpha_3, \cdots$.

Exemple 2.2.14.

1. *Soit* $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 5, \alpha_5 = 2$*. On a, le numérateur est*

$$\begin{aligned}
& 1 + 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + 2^{\alpha_3} + 2^{\alpha_4} + 2^{\alpha_5} + 2^{\alpha_1+\alpha_3} + 2^{\alpha_1+\alpha_4} \\
& \quad + 2^{\alpha_1+\alpha_5} + 2^{\alpha_2+\alpha_4} + 2^{\alpha_2+\alpha_5} + 2^{\alpha_3+\alpha_5} + 2^{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5} \\
& = 1 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^5 + 2^2 + 2^{3+1} + 2^{3+5} \\
& \quad + 2^{3+2} + 2^{2+5} + 2^{2+2} + 2^{1+2} + 2^{3+1+2} \\
& = 571
\end{aligned}$$

Et le dénominateur est

$$1 + 2^{\alpha_2} + 2^{\alpha_3} + 2^{\alpha_4} + 2^{\alpha_5} + 2^{\alpha_2+\alpha_4} + 2^{\alpha_2+\alpha_5} + 2^{\alpha_3+\alpha_5}$$
$$= 1 + 2^2 + 2^1 + 2^5 + 2^2 + 2^{2+5} + 2^{2+2} + 2^{1+2}$$
$$= 195$$

Donc le développement en la fraction continue est

$$1 + \cfrac{2^3}{1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{2^1}{1 + \cfrac{2^5}{1 + 2^2}}}} = \frac{571}{195}$$

2. *Soit* $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 3$. *Alors*

$$1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2^3}{1}}} = 1 + \cfrac{4}{\cfrac{1+2+8}{1+8}} = \frac{1+4+2+8+4\times 8}{1+2+8} = \frac{47}{11}$$

3. *Soit* $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 1$.

   On a, le numérateur est

$$1 + 2^1 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^{1+2} + 2^{1+1} + 2^{1+4} = 69$$

Et le dénominateur est

$$1 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^{4+1} = 55.$$

Donc le développement en la fraction continue est

$$1 + \cfrac{2^1}{1 + \cfrac{2^4}{1 + \cfrac{2^2}{1 + 2^1}}} = \frac{69}{55}$$

Théorème 2.2.15. *Toutes les fractions continues 2-adique finies sont de la forme ci-dessus.*

Preuve.

Nous prouvons le théorème par induction.

•**étape 1 :**

$$1+\frac{2^{\alpha_1}}{1}=\frac{1+2^{\alpha_1}}{1}$$

•**étape 2 :**

$$1+\frac{2^{\alpha_1}}{1+2^{\alpha_2}}=\frac{1+2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}}{1+2^{\alpha_2}}$$

•**étape n :** Supposons que l'opération est vraie pour $n-1$. En commençant une étape dans la fraction continue, nous avons une suite P avec $n-1$ éléments, composée d'éléments $\alpha_2, \alpha_3, \cdots$. La fraction continue formée à partir de ces nombres est

$$1+\cfrac{2^{\alpha_2}}{1+\cfrac{2^{\alpha_3}}{1+\cfrac{2^{\alpha_4}}{\ddots+\cfrac{}{1+2^{\alpha_n}}}}}$$

Ce qui égale à

$$\frac{1+2^{\alpha_2}+2^{\alpha_3}+\cdots+2^{\alpha_2+\alpha_4}+\cdots}{1+2^{\alpha_3}+2^{\alpha_4}+\cdots+2^{\alpha_3+\alpha_5}+\cdots}=\frac{c}{d}$$

Si on met α_1 au début de suite P alors la nouvelle fraction est égale

$$1+\frac{2^{\alpha_1}}{c/d}=\frac{c+2^{\alpha_1}d}{c}$$

Dans l'écriture de "d", il n'y a absolument aucune apparence de 2^{α_2}. Ainsi, s'il existe une apparence de α_2 dans le nouveau numérateur, c'est à partir de "c". Par conséquent, chaque fraction 2-adique continue est de la forme.

$$\frac{1+2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+2^{\alpha_3}+\cdots+2^{\alpha_1+\alpha_3}+\cdots+2^{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5}+\cdots}{1+2^{\alpha_2}+2^{\alpha_3}+2^{\alpha_4}+\cdots+2^{\alpha_2+\alpha_4}+\cdots+2^{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6}+\cdots}$$

Comme il est mentionné dans Section(2.1), il n'y a pas d'annulation des facteurs du numérateur et du dénominateur. Cela complète la preuve. □

2.3 Convergence des fractions continues dans $\mathbb{Q}_p$

Soit p un nombre premier impair, et $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques. Dans cette section nous considérons la fraction continue de Schneider du type suivant

$$a_0 + \cfrac{p}{a_1 + \cfrac{p}{\ddots + \cfrac{}{a_n + \cfrac{p}{\cdots}}}}$$

C'est à dire $\alpha_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.3.1. *D'après le théorème (2.1.2), les suites P_n et Q_n définit pour $n \geq -1$, satisfaits :*

$$P_{-1} = 1\,; \quad Q_{-1} = 0\,; \quad P_0 = a_0\,; \quad Q_0 = 1\,;$$

$$\begin{cases} P_n = a_n P_{n-1} + pP_{n-2} \\ Q_n = a_n Q_{n-1} + pQ_{n-2} \quad \textit{pour} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Corollaire 2.3.2. *Les suites (P_n) et (Q_n) vérifient les relations suivantes :*

1) Pour tout $n \geq 1$; $\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}p^n}{Q_nQ_{n-1}}$

2) Pour tout $n \geq 2$; $\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \dfrac{(-1)^{n-2}p^{n-1}a_n}{Q_nQ_{n-2}}$

Preuve.

1) $\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}p^n}{Q_nQ_{n-1}}$ on a ;

$$\begin{aligned} P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n &= (a_nP_{n-1} + pP_{n-2})Q_{n-1} - P_{n-1}(a_nQ_{n-1} + pQ_{n-2}) \\ &= p(P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2}) \\ &= (-1)^{n-1}p^n \end{aligned}$$

donc pour démontrer (1) il suffit de démontrer le relation suivante :

$$P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2} = (-1)^{n-1}p^{n-1} \tag{2.10}$$

On va montrer la relation (2.10) par récurrence :

Pour $n = 1$:

$$P_{-1}Q_0 - P_0Q_{-1} = 1 = (-1)^0 p^0$$

Supposons que la relation est vrai pour $n-1$, c'est à dire

$$P_{n-3}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-3} = (-1)^{n-2}p^{n-2}$$

et montrons pour n, c'est à dire

$$P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2} = (-1)^{n-1}p^{n-1}$$

On a,

$$\begin{aligned}
P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2} &= P_{n-2}(a_{n-1}Q_{n-2} + pQ_{n-3}) - (a_{n-1}P_{n-2} + pP_{n-3})Q_{n-2} \\
&= p(P_{n-2}Q_{n-3} - P_{n-3}Q_{n-2}) \\
&= -p(-1)^{n-2}p^{n-2} \\
&= (-1)^{n-1}p^{n-1}
\end{aligned}$$

donc la relation est vérifiée pour $n \geq 1$.

2) D'après (1) on a

$$\begin{aligned}
\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} &= \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) + \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}p^n}{Q_nQ_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2}p^{n-1}}{Q_{n-1}Q_{n-2}} \\
&= \frac{(-1)^{n-2}p^{n-1}(-pQ_{n-2} + Q_n)}{Q_nQ_{n-1}Q_{n-2}} \\
&= \frac{(-1)^{n-2}p^{n-1}(a_nQ_{n-1})}{Q_nQ_{n-1}Q_{n-2}} \\
&= \frac{(-1)^{n-2}p^{n-1}a_n}{Q_nQ_{n-2}}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.3. *Les suites (P_n) et (Q_n) satisfait les inégalités suivantes :*

1) Pour tout $n \geq 0$; $p^{\frac{n}{2}} \leq Q_n \leq p^n$.

2) Pour tout $n \geq 0$; $p^{\frac{n}{2}} \leq P_n \leq p^{n+1}$.

Preuve.

On démontre par récurrence les inégalités :

1) Pour $n = 0$: ona $p^0 = 1 \leq Q_0 = 1 \leq p^0 = 1$ c'est à dire $1 \leq 1 \leq 1$

   Supposons que l'inégalité est vrai pour $n-1$, c'est à dire

$$p^{\frac{n-1}{2}} \leq Q_{n-1} \leq p^{n-1}$$

   et montrons que pour n, c'est à dire

$$p^{\frac{n}{2}} \leq Q_n \leq p^n$$

   On a $Q_n = a_n Q_{n-1} + pQ_{n-2}$ telle que

$$\begin{cases} 1 \leq a_n \leq p-1 \\ p^{\frac{n-1}{2}} \leq Q_{n-1} \leq p^{n-1} \\ p^{\frac{n}{2}} \leq pQ_{n-2} \leq p^{n-1} \end{cases}$$

   Donc

$$p^{\frac{n-1}{2}} + p^{\frac{n}{2}} \leq Q_n \leq (p-1)p^{n-1} + p^{n-1}$$

   On a

$$\begin{cases} p^{\frac{n}{2}} \leq p^{\frac{n-1}{2}} + p^{\frac{n}{2}} \\ (p-1)p^{n-1} + p^{n-1} = p^n \end{cases}$$

   Alors

$$p^{\frac{n}{2}} \leq Q_n \leq p^n$$

2) Pour $n = 0$: $p^0 = 1 \leq P_0 = a_0 \leq p$

   Supposons que l'inégalité est vrai pour $n-1$, c'est à dire

$$p^{\frac{n-1}{2}} \leq P_{n-1} \leq p^n$$

et montrons pour n, c'est à dire

$$p^{\frac{n}{2}} \leq P_n \leq p^{n+1}$$

On a : $P_n = a_n P_{n-1} + pP_{n-2}$. telle que

$$\begin{cases} 1 \leq a_n \leq p-1 \\ p^{\frac{n-1}{2}} \leq P_{n-1} \leq p^n \\ p^{\frac{n}{2}} \leq pP_{n-2} \leq p^n \end{cases}$$

Donc

$$p^{\frac{n-1}{2}} + p^{\frac{n}{2}} \leq P_n \leq (p-1)p^n + p^n$$

On a

$$\begin{cases} p^{\frac{n}{2}} \leq p^{\frac{n-1}{2}} + p^{\frac{n}{2}} \\ (p-1)p^n + p^n = p^{n+1} \end{cases}$$

Alors

$$p^{\frac{n}{2}} \leq P_n \leq p^{n+1}$$

□

Lemme 2.3.4. *Nous avons l'inégalité suivante :*

$$Q_n \geq \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad (n \geq 1) \tag{2.11}$$

Où $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{1+4p}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{1+4p}}{2}$.

Preuve.

Comme $Q_{-1} = 0, Q_0 = 1$ et $Q_n = a_n Q_{n-1} + pQ_{n-2}$

On va montrer que le cas particulier telle que $a_n = 1 \,\forall\, n \geq 1$ c'est à dire

$$Q'_n = Q'_{n-1} + pQ'_{n-2} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad (n \geq 1)$$

Pour $n = 1$:

$$Q'_1 = Q'_0 + pQ'_{-1} = 1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta}$$

Supposons que l'égalité est vrai pour n, c'est à dire

$$Q_n^{'} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

et montrons que pour $n+1$, c'est à dire

$$Q_{n+1}^{'} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

On a $Q_{n+1}^{'} = Q_n^{'} + pQ_{n-1}^{'}$ telle que

$$\begin{cases} Q_n^{'} = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ Q_{n-1}^{'} = \dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^{'} &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + p\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n+1}(\alpha^{-1} + p\alpha^{-2}) - \beta^{n+1}(\beta^{-1} + p\beta^{-2})}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

Ainsi que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{p}{\alpha^2} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1+4p}} + \dfrac{4p}{(1+\sqrt{1+4p})^2} = 1 \\ \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{p}{\beta^2} = \dfrac{2}{1-\sqrt{1+4p}} + \dfrac{4p}{(1-\sqrt{1+4p})^2} = 1 \end{cases}$$

Alors

$$Q_{n+1}^{'} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

Donc l'égalité est vérifiée pour $n \geq 1$

On revient à la démonstration de l'inégalité (2.11), on a :

$$Q_n \geq Q_n^{'} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Alors

$$Q_n \geq \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad (n \geq 1)$$

□

Définition 2.3.5. *Soit p un nombre premier impair, et $y \in \mathbb{Q}_p$. définit par son fraction continue de Schneidier*

$$y = a_0 + \cfrac{p}{a_1 + \cfrac{p}{a_2 + \cfrac{p}{\ddots + \cfrac{}{a_n + \cfrac{p}{\cdots}}}}}$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$y = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{}{c_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}} \tag{2.12}$$

Où $c_{2n} = a_{2n}$ et $c_{2n+1} = \dfrac{a_{2n+1}}{p}$ pour $n \geq 0$ telle que les deux fraction sont équivalente, c'est à dire qu'elles ont les mêmes réduites, et la même nature et même valeur de convergence.

Remarque 2.3.6. *la fraction continue de Schneider* (2.12) *vérifie les relations suivantes :*

1) $\begin{cases} \textit{Pour tout } n \geq -1 : & P_{-1} = 1;\ Q_{-1} = 0;\ P_0 = c_0;\ Q_0 = 1 \\ \textit{Pour tout } n \geq 1 : & \begin{cases} P_n = c_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = c_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \end{cases}$

2) Pour $n \geq 1$:

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} \tag{2.13}$$

Théorème 2.3.7. *Si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :*

$$v_p(c_n) = \begin{cases} 0 & si \quad n \text{ pair} \\ -1 & si \quad n \text{ impair} \end{cases} \tag{2.14}$$

Alors la suite des réduites $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite dans $\mathbb{Q}_p$.

Ce théorème doit être une conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 2.3.8. *Avec la condition* (2.14), *on a les égalités suivantes :*

i) $|Q_n|_p = |c_1 c_2 \cdots c_n|_p \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

ii) $|P_n|_p = |c_0 c_1 \cdots c_n|_p \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $c_0 \neq 0$

Preuve.

On va démontrer les égalités par récurrence :

i) Si $n = 1$ on a

$$Q_1 = c_1 Q_0 + Q_{-1} = c_1 \Longrightarrow |Q_1|_p = |c_1|_p$$

donc l'égalité est vraie au rang 1. Supposons-la vraie pour $n-1$ c'est à dire $|Q_{n-1}|_p = |c_1 c_2 \cdots c_{n-1}|_p$, et montrons l'égalité pour n, on a :

$$Q_n = c_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \Longrightarrow |Q_n|_p = |c_n Q_{n-1} + Q_{n-2}|_p$$

et on a aussi

$$\begin{cases} |Q_{n-1}|_p = |c_1 c_2 \cdots c_{n-1}|_p \\ |Q_{n-2}|_p = |c_1 c_2 \cdots c_{n-2}|_p \end{cases}$$

d'autre part

$$|c_n Q_{n-1}|_p = |c_1 c_2 \cdots c_{n-1} c_n|_p > |Q_{n-2}|_p = |c_1 c_2 \cdots c_{n-2}|_p$$

En effet

$$v_p(c_1 c_2 \cdots c_n) - v_p(c_1 c_2 \cdots c_{n-2}) = v_p(c_{n-1}) + v_p(c_n) = \begin{cases} 0 + (-1) \\ ou \\ (-1) + 0 \end{cases} = -1 < 0$$

alors

$$v_p(c_1 c_2 \cdots c_n) < v_p(c_1 c_2 \cdots c_{n-2})$$

Ce qui implique que

$$p^{-v_p(c_1 c_2 \cdots c_n)} > p^{-v_p(c_1 c_2 \cdots c_{n-2})}$$

donc

$$|c_n Q_{n-1}|_p = |c_1 c_2 \cdots c_{n-1} c_n|_p > |Q_{n-2}|_p = |c_1 c_2 \cdots c_{n-2}|_p$$

alors

$$|Q_n|_p = |c_nQ_{n-1} + Q_{n-2}|_p = |c_nQ_{n-1}|_p = |c_1c_2\cdots c_n|_p$$

donc l'égalité est vérifiée.

ii) Si $n = 1$ on a

$$P_1 = c_1P_0 + P_{-1} = c_1c_0 + 1 \Longrightarrow |P_1|_p = |c_1c_0 + 1|_p = |c_0c_1|_p$$

Car

$$v_p(c_0c_1) = v_p(c_0) + v_p(c_1) = -1 < 0$$

alors

$$p^{-v_p(c_0c_1)} > 1 \Longrightarrow |c_0c_1|_p > 1$$

donc

$$|P_1|_p = |c_0c_1|_p$$

donc l'égalité est vraie au rang 1. Supposons-la vraie pour $n-1$ c'est à dire $|P_{n-1}|_p = |c_0c_1c_2\cdots c_{n-1}|_p$, et montrons que l'égalité pour n on a :

$$P_n = c_nP_{n-1} + P_{n-2} \Longrightarrow |P_n|_p = |c_nP_{n-1} + P_{n-2}|_p$$

et on a aussi

$$\begin{cases} |P_{n-1}|_p = |c_0c_1c_2\cdots c_{n-1}|_p \\ |P_{n-2}|_p = |c_0c_1c_2\cdots c_{n-2}|_p \end{cases}$$

d'autre part,

$$|c_nP_{n-1}|_p = |c_0c_1c_2\cdots c_{n-1}c_n|_p > |P_{n-2}|_p = |c_0c_1c_2\cdots c_{n-2}|_p$$

En effet, comme dans la question (i)

$$v_p(c_0c_1c_2\cdots c_n) - v_p(c_0c_1c_2\cdots c_{n-2}) = v_p(c_{n-1}) + v_p(c_n) = -1 < 0$$

telle que

$$v_p(c_0c_1c_2\cdots c_n) < v_p(c_0c_1c_2\cdots c_{n-2})$$

qui implique que

$$p^{-v_p(c_0c_1c_2\cdots c_n)} > p^{-v_p(c_0c_1c_2\cdots c_{n-2})}$$

donc

$$|c_nP_{n-1}|_p = |c_0c_1c_2\cdots c_{n-1}c_n|_p > |P_{n-2}|_p = |c_0c_1c_2\cdots c_{n-2}|_p$$

alors

$$|P_n|_p = |c_nP_{n-1} + P_{n-2}|_p = |c_nP_{n-1}|_p = |c_0c_1c_2\cdots c_n|_p.$$

donc l'égalité est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ □

Remarque 2.3.9. *Soit $y \in \mathbb{Q}_p$. Si $c_0 = 0$ alors le développement de y s'écrire sous la forme :*

$$y = \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

telle que

$$|P_1|_p = 1,\ |P_n|_p = |c_2c_3\cdots c_n|_p,\ \ \forall\, n \geq 2$$

Propriétés 2.3.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :*

1) $|Q_{2n}|_p = |Q_{2n-1}|_p = p^n$.

2) $|Q_{n-1}Q_n|_p = p^n$.

Preuve.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$

1) Si $k = 2n$, on a :

$$\begin{aligned}|Q_k|_p &= |c_1|_p|c_2|_p|c_3|_p|c_4|_p\cdots|c_{2n-1}|_p|c_{2n}|_p\\ &= p.1p.1\cdots p.1\\ &= \underbrace{pp\cdots p}_{n\,\text{fois}}\\ &= p^n\end{aligned}$$

Donc

$$|Q_{2n}|_p = p^n$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
|Q_{2n}|_p &= |c_1|_p|c_2|_p|c_3|_p|c_4|_p \cdots |c_{2n-1}|_p|c_{2n}|_p \\
&= |Q_{2n-1}|_p|c_{2n}|_p \\
&= |Q_{2n-1}|_p \\
&= p^n
\end{aligned}$$

2) Si $n = 2k+1$, on a

$$\begin{aligned}
|Q_{2k}Q_{2k+1}|_p &= p^k p^{k+1} \\
&= p^{2k+1}
\end{aligned}$$

Alors

$$|Q_{n-1}Q_n|_p = p^n \qquad \square$$

Remarque 2.3.11. *Nous considérons la série* $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q_i} - \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}\right)$ *d'après la relation* (2.13) *on trouve :*

$$\frac{P_n}{Q_n} = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

Proposition 2.3.12. *Pour $k \in \mathbb{N}$, la série* $\sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$ *est convergente dans $\mathbb{Q}_p$.*

Preuve.
La série $\sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$, c'est à dire le terme générale converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}Q_n}\right|_p = 0$$

En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}Q_n}\right|_p &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|Q_{n-1}Q_n|_p}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p^n}=0\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.13. *Sous l'hypothèse du critère de convergence du théorème précédent, la série de somme partielle* $\sum_{i=k+1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}$ *converge vers* $\frac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k+1}}$ *dans* $\mathbb{Q}_p$.

Lemme 2.3.14. *Pour* $k\in\mathbb{N}$ *on a :*

$$|yQ_k-P_k|_p=\frac{1}{|Q_k|_p|c_{k+1}|_p}=\frac{1}{|c_1c_2\cdots c_kc_{k+1}|_p}.$$

Preuve.

Soit $k<n$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_k}{Q_k}\right|_p &= \left|\frac{P_0}{Q_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}-\frac{P_0}{Q_0}-\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}\right|_p\\ &= \left|\sum_{i=k+1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}\right|_p\end{aligned}$$

on passe à la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_k}{Q_k}\right|_p=\left|\sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}\right|_p$$

d'après la théorème (2.1.10) on a

$$y=\lim_{n\to+\infty}\frac{P_n}{Q_n}$$

alors

$$\left|y-\frac{P_k}{Q_k}\right|_p=\left|\sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}\right|_p$$

d'après la remarque précédente la série $\sum_{i=k+1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}$ converge vers $\frac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k+1}}$ dans $\mathbb{Q}_p$ ce qui implique que

$$\left|y-\frac{P_k}{Q_k}\right|_p=\left|\frac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k+1}}\right|_p=\frac{1}{|Q_kQ_{k+1}|_p}$$

d'où

$$|yQ_k - P_k|_p = \frac{1}{|Q_{k+1}|_p} = \frac{1}{|Q_k|_p|c_{k+1}|_p} = \frac{1}{|c_1c_2\cdots c_kc_{k+1}|_p} \qquad \square$$

Exemple 2.3.15.

D'après les exemples précédents on sait que les fractions continues suivantes converge vers les nombres ;

1) *Pour* $p = 7$*, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P_n}{Q_n} = -1$*, c'est à dire*

$$6 + \cfrac{7}{6 + \cfrac{7}{\ddots + \cfrac{}{6 + \cfrac{7}{6}}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$$

2) *Pour* $p = 5$*, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P_n}{Q_n} = -\dfrac{3}{2}$*, c'est à dire*

$$1 + \cfrac{5}{3 + \cfrac{5}{4 + \cfrac{5}{\ddots + \cfrac{}{4 + \cfrac{5}{4}}}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{3}{2}$$

CHAPITRE 3

Étude de la périodicité

Dans ce chapitre nous allons étudier la périodicité des fractions continues p-adiques, nous trouvons un analogue du théorème de Lagrange pour un nombre quadratique dans le cas p-adique. On donne d'abord une historique sur la périodicité. Puis, on présente les résultats de De Weger qui concernent le problème des fractions continues non périodique. On termine par notre proposition sur l'étude des fractions continues périodiques d'un nombre quadratique. En utilisant les références suivantes : [12, 17, 20, 30, 34, 39, 40].

3.1 Historique sur la périodicité

Tilborghs dans son article [39], a utilisé les résultats de de Weger, pour donné une Condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{c}$ admet une FCS périodique.

Théorème 3.1.1 (Tilborghs, [39]). *En utilisant la notation de de Weger, les éléments suivants sont équivalents :*

- *Le FCS de $\sqrt{c}$ est périodique.*
- *$P_n^2 < c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *$Q_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Théorème 3.1.2 (Tilborghs, [39]). *Soit $p > 2$, et supposons que la FCS de $\sqrt{c}$ est périodique. Si $1 \leq a_0 \leq (p-1)/2$ alors*

$$\sqrt{c} = \left[\begin{array}{l} \overline{p^{\alpha_0} p^{\alpha_1} \ldots p^{\alpha_{n-1}}} \\ a_0\, a_1\ a_2 \ldots\ \ a_n \end{array}\right]$$

Où $a_i = a_{n-i}$ pour $1 \leq i < n$ et $p^{\alpha_i} = p^{\alpha_{n-i-1}}$ pour $0 \leq i < n$, et $a_n = 2a_0$.
Si $(p+1)/2 \leq a_0 < p$, alors $a_0 = p-1$, $a_n = 2a_0 - p$ et $c = p^2 + 1$.

Théorème 3.1.3 ([17]). *Si $y \in \mathbb{Q}_p$ a une fraction continue de type de Schneider avec $|a_n| < p$ pour $n \geq 0$, alors la fraction continue est finie ou $y_n = \pm 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

De ce théorème, il y a un corollaire nous disons à propos des fractions continues de Shneider des nombres rationnels sont finis.

Corollaire 3.1.4 (Bundschuh, [17]). *Soit $y \in \mathbb{Q}_p$. On a y est rationnel si, et seulement si, le FCS pour y est fini ou périodique de période :*

$$y = \left[\begin{array}{ll} p^{\alpha_0} \ldots p^{\alpha_{n-1}} & \overline{p} \\ a_0\, a_1 \ldots\ \ a_n & \overline{p-1} \end{array}\right] \tag{3.1}$$

Preuve.
On sait que la FCS pour -1 est périodique avec $\alpha_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 = (p-1) + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{\ddots + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{\cdots}}}}}$$

de sort que tout FCS avec cette partie périodique est rationnel.
Si y est rationnel mais n'a pas de FCS fini, puis par le théorème (3.1.3), on a $y_n = \pm 1$ pour $n \geq 0$.
Si $y_n = 1$ puis $a_n = 1$ et le développement en fraction continue se termine.
Si $y_n = -1$ dans ce cas $a_n = p - 1$ telle que $y_n - a_n = -p$, alors

$$\alpha_n = 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{p^{\alpha_n}}{y_n - a_n}.$$

Donc la fraction continue de Schneider vérifié la forme (3.1). □

Wang [40] et Laohakosol [30] ont caractérisé des nombres rationnels avec les fractions continues de Ruban.

Proposition 3.1.5 ([30]). *Soit y un nombre p-adique. Alors y est rationnel si, et seulement, si son développement en fractions continues de Ruban est finie ou ultimement périodique avec La période $p - p^{-1}$.*

La première personne a caractérisé les nombres rationnels avec des FCR infinies était Laohakosol [30]. Il a prouvé ce qui suit :

Proposition 3.1.6 (Laohakosol, [30]). *Soit $y \in p\mathbb{Z}_p$. Alors y est rationnel si et seulement si son FCR est fini, ou infini avec la forme périodique*

$$y = [\ a_0,a_1,\cdots,a_k,\overline{(p-1)(1+p^{-1})}].$$

Entre le premier et le deuxième articl [15, 16] de Browkin, Bedocchi a écrits un certain nombre de documents en étudiant les FCB d'irrationnels quadratiques [10, 11, 12, 13]. Dans [10], Bedocchi prouve deux théorèmes importants concernant la structure des fractions continues de Browkin périodique d'irrationnels quadratiques.

Théorème 3.1.7 (Bedocchi, [12]). *Si $y \in \mathbb{Q}_p$ a un FCB périodique, alors le développement est ultimement périodique si et seulement si $|y|_p > 1$ et $|\overline{y}|_p < 1$, où $\overline{y}$ est le conjugué de y.*

Nous savons que y doit être un irrationnel quadratique, car Browkin a montré que chaque nombre rationnel a un FCB fini. Le deuxième théorème de Bedocchi pour la période commence pour d'une racine carrée.

Théorème 3.1.8 (Bedocchi, [12]). *Si $c \in \mathbb{Z}$ n'est pas un carré, et $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}_p$ admet un développement périodique en FCB, et la période commence après deux termes, à moins que $p = 2$ et $c \equiv 4 \pmod 8$, dans ce cas, la période commence après trois termes.*

Proposition 3.1.9 (Bedocchi, [12]). *Pour tout $p > 2$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$, l impaire, il existe au plus un nombre fini de $c \in \mathbb{Z}$ tels que le développement en fraction continue p-adique de $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}_p$ est périodique avec une période de longueur l (plus précisément, sous* *ces hypothèse, on établira les limitations*

$$\left\{\begin{array}{lll} |c| < p^{6l-14} & si & p|c \\ |c| < p^2/4 + [(p^2+4)/2]^{l-1} & si & p \nmid c \end{array}\right.).$$

Proposition 3.1.10 (Bedocchi, [12]). *Pour tout $p > 2$ et pour tout $c \in \mathbb{Z}$ tels que $p|c$, si le développement de $\sqrt{c}$ est périodique alors la longueur de la période ne peut pas être égale à 3.*

3.2 Non périodicité du développement d'un nombre quadratique

Une propriétés connu pour les nombres quadratiques dans $\mathbb{Q}_p$, c'est que son développement en fraction continue de Schneider n'est pas toujours périodique, cette propriétés a été démontre par de Weger dans son article [20]. Dans ce papier, de Weger a reprends le problème donné par Bundschuh [17] sur la périodicité des fractions continues p-adique d'un nombre $y = \sqrt{c}$ telle que $c \in \mathbb{Z}_p$ n'est pas un carré.

Pour donné la démonstration de de Weger on va utiliser les notations et l'algorithme qu'on a présenté dans le chapitre précédent :

$$\begin{cases} y = y_0 \\ y_n = a_n + \dfrac{p^{\alpha_n}}{y_{n+1}}, \quad \text{telle que } \ a_n \in \{0, 1, \cdots, p-1\} \\ |x_n|_p = 1, \ \ a_n \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \alpha_n = v_p(y_n - a_n) \\ \text{telle que} \\ \alpha_0 \geq 0 \ \text{ et } \ \alpha_n > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{3.2}$$

Si $y_n \neq a_n$ le développement en fraction continue de Schneider de y s'écrit sous la forme :

$$y = a_0 + \cfrac{p^{\alpha_0}}{a_1 + \cfrac{p^{\alpha_1}}{\ddots + \cfrac{}{a_n + \cfrac{p^{\alpha_n}}{\cdots}}}}$$

Lemme 3.2.1 (de Weger, [20]). *Il existe des nombres rationnels uniques P_n,Q_n tels que*

$$y_n = \frac{P_n + \sqrt{c}}{Q_n} \tag{3.3}$$

Les nombres P_n, Q_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, satisfont les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{cases} P_{n+1} = -(P_n - a_n Q_n) & , P_0 = 0. \\ Q_{n+1} = \dfrac{c - P_{n+1}^2}{p^{\alpha_n} Q_n} & , Q_0 = 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

la simplification de l'expression de Q_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, donné par :

$$Q_n = \frac{\sqrt{c} - P_{n+1}}{p^{\alpha}} y_{n+1} \tag{3.5}$$

Preuve.

On va démontrer par récurrence que la formule de la suite y_n dans (3.2) est la même dans (3.3) pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire

$$y_n = a_n + \frac{p^{\alpha_n}}{y_{n+1}} = \frac{P_n + \sqrt{c}}{Q_n} \tag{3.6}$$

Pour $n = 0$, par définition $y_0 = \sqrt{c} = \dfrac{P_0 + \sqrt{c}}{Q_0}$

Supposons que la relation (3.6) est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrons pour $n + 1$, c'est à dire,

$$y_{n+1} = \frac{p^{\alpha_n}}{y_n - a_n} = \frac{P_{n+1} + \sqrt{c}}{Q_{n+1}}$$

On a

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{p^{\alpha}}{y_n - a_n} = \frac{p^{\alpha_n}}{\dfrac{\sqrt{c} + P_n}{Q_n} - a_n} \\ &= \frac{p^{\alpha} Q_n}{\sqrt{c} + P_n - a_n Q_n} = \frac{p^{\alpha} Q_n}{\sqrt{c} - P_{n+1}} \\ &= \frac{p^{\alpha} Q_n(\sqrt{c} + P_{n+1})}{(\sqrt{c} - P_{n+1})(\sqrt{c} + P_{n+1})} = \frac{p^{\alpha} Q_n(\sqrt{c} + P_{n+1})}{c - P_{n+1}^2} \\ &= \frac{\sqrt{c} + P_{n+1}}{Q_{n+1}} \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 3.2.2 ([20]). *Pour tout* $n \geq 0$, $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}$.

Preuve.

On va démontrer que P_n, Q_n sont des entiers par récurrence :

On sait que pour $n = 0$,

$$P_0, Q_0 \in \mathbb{Z}.$$

Supposons que $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}$. Depuis $P_{n+1} = -(P_n - a_n Q_n) \in \mathbb{Z}$. Il suffit de démontrer que Q_{n+1} est un entier, pour cela montrons d'abord par récurrence que

$$Q_n | c - P_{n+1}^2, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour $n = 0$,

$$c - P_1^2 = (c - a_0^2).1 \equiv 0 \pmod{Q_0}$$

Supposons que la relation est vrai pour $n-1$, c'est à dire $Q_{n-1} | c - p_n^2$, et montrons-la pour n. On a :

$$\begin{aligned}
c - P_{n+1}^2 &= (c - P_n^2 + 2a_n P_n Q_n - a_n^2 Q_n^2) \\
&= (c - P_n^2) + Q_n(2a_n P_n - a_n^2 Q_n) \\
&= Q_n[p^{\alpha_{n-1}} Q_{n-1} + 2a_n P_n - a_n^2 Q_n] \\
&= Q_n k, \quad \text{ tels que } k = p^{\alpha_{n-1}} Q_{n-1} + 2a_n P_n - a_n^2 Q_n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

donc

$$c - P_{n+1}^2 \equiv 0 \pmod{Q_n}$$

On a

$$\begin{aligned}
c - P_{n+1}^2 &= (\sqrt{c} + P_{n+1}).(\sqrt{c} - P_{n+1}) \\
&= (\sqrt{c} + P_{n+1}).(\sqrt{c} + P_n - a_n Q_n) \\
&= (\sqrt{c} + P_{n+1}).(y_n - a_n) Q_n \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_n}}
\end{aligned}$$

telle que : $y_n - a_n \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_n}}$, et

$$\begin{aligned}\sqrt{c} + P_{n+1} &= y_n Q_n - P_n + P_{n+1} \\ &= y_n Q_n - P_n + a_n Q_n - P_n \\ &= (a_n + y_n) Q_n - 2P_n \\ &= (y_n - a_n) Q_n + 2a_n Q_n - 2P_n \in \mathbb{Z}_p.\end{aligned}$$

D'où

$$(\sqrt{c} + P_{n+1}).(y_n - a_n) Q_n \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_n}}$$

Donc Q_{n+1} est un entier. □

Proposition 3.2.3 ([20]). *Si* $P_n Q_n \leq 0$ *, et* $P_{n+1}^2 > c$*, pour* $n \in \mathbb{N}$*, alors la fraction continue de* $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}_p$ *n'est pas périodique.*

Preuve.
On fait la démonstration par l'absurde c'est à dire , supposons que la fraction continue de $\sqrt{c}$ est périodique. A partir de P_n et Q_n ont des signes différents, et d'après la relation de récurrence de P_{n+1} on a P_n et P_{n+1} ont des signes différents. Et par la relation de récurrence de Q_{n+1} on a $Q_{n+1} \neq 0$, ainsi que Q_n, Q_{n+1} ont des signes différents. De plus on déduit que les signes de P_{n+1} et Q_{n+1} sont différents. En effet :

1. vérifiant que P_n et P_{n+1} ont des signes différents

   i. Si $P_n < 0$, et $Q_n > 0$, donc $P_n < 0 < a_n Q_n$, alors $P_n - a_n Q_n < 0$
   D'où
   $$P_{n+1} = -(P_n - a_n Q_n) > 0$$

   ii. Si $P_n > 0$, et $Q_n < 0$, donc $a_n Q_n < 0 < P_n$, alors $P_n - a_n Q_n > 0$
   D'où
   $$P_{n+1} = -(P_n - a_n Q_n) < 0$$

2. Montrons que $Q_{n+1} \neq 0$, on a

$$Q_{n+1} = \frac{c - P_{n+1}^2}{p^{\alpha_n} Q_n}$$

Comme $c - P_{n+1}^2 < 0$ alors $Q_{n+1} \neq 0$.

3. Montrons que $Q_n Q_{n+1} < 0$, on a

$$Q_{n+1} = \frac{c - P_{n+1}^2}{p^{\alpha_n} Q_n} \Longrightarrow Q_{n+1} Q_n = \frac{c - P_{n+1}^2}{p^{\alpha_n}} < 0$$

4. Montrons que $P_{n+1}Q_{n+1} < 0$. On a P_n, P_{n+1} et Q_n, P_n ont des signes différents, alors

$$P_n P_{n+1} < 0 \quad et \quad P_n Q_n < 0$$

ce qui implique que P_{n+1} et Q_n ont les même signes, nous avons $Q_n Q_{n+1} < 0$, Ainsi, nous obtenons

$$P_{n+1} Q_{n+1} < 0$$

Ce qui veut dire que les signes de P_{n+1} et Q_{n+1} sont différents.

En outre $a_{n+1} \neq 0$ on a

$$|P_{n+2}| = |P_{n+1}| + a_{n+1}|Q_{n+1}| > |P_{n+1}|.$$

En effet

i. Si $P_{n+1} \geq 0$ et $Q_{n+1} \leq 0$, alors

$$P_{n+2} = -(P_{n+1} - a_{n+1}Q_{n+1}) \leq 0$$

donc

$$\begin{aligned} |P_{n+2}| &= |P_{n+1} - a_{n+1}Q_{n+1}| \\ &= P_{n+1} - a_{n+1}Q_{n+1} \\ &= |P_{n+1}| + a_{n+1}|Q_{n+1}| > |P_{n+1}|. \end{aligned}$$

ii. Si $P_{n+1} \leq 0$ et $Q_{n+1} \geq 0$, alors

$$P_{n+2} = -(P_{n+1} - a_{n+1}Q_{n+1}) \geq 0$$

donc

$$\begin{aligned}|P_{n+2}| &= |P_{n+1} - a_{n+1}Q_{n+1}| \\ &= -P_{n+1} + a_{n+1}Q_{n+1} \\ &= |P_{n+1}| + a_{n+1}|Q_{n+1}| > |P_{n+1}|.\end{aligned}$$

Puis la suite de nombres entiers $(|P_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante donc elle n'est pas bornée.

Mais d'après l'hypothèse le développement en fraction continue est périodique, ce qui implique que Q_n et P_n sont périodiques, alors $|Q_n|$ et $|P_n|$ sont bornés, (contradiction avec $|P_n|$ n'est pas borné). □

Corollaire 3.2.4 ([20]). *Si $c < 0$ alors la fraction continue de $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}_p$ n'est pas périodique.*

Preuve.

Si $c < 0$ alors $P_n^2 > c$, et pour $n = 1$ on a $P_1 = a_0 > 0$ et $Q_1 = \dfrac{c - P_1^2}{p^{\alpha_0}} < 0$, donc d'après la proposition précédent on déduit que la fraction continue de $\sqrt{c}$ n'est pas périodique. □

Exemple 3.2.5.

Les quatre exemples de Bundschuh tout vérifiant les conditions pour le corollaire précédent avec $n = 1$.

1. $\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}_5$, *$c = -1 < 0$ donc d'après le corollaire (3.2.4) le développement du nombre $\sqrt{-1}$ n'est pas périodique.*

   $\sqrt{-1}$ est une solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$,

$$x = \sqrt{-1} \Rightarrow x^2 = (a_0 + a_1.5 + a_2.5^2 + a_3.5^3 + \cdots)^2 = -1$$

   On sait que le développement de -1 dans $\mathbb{Q}_5$ est

$$-1 = 4 + 4.5 + 4.5^2 + 4.5^3 + \cdots$$

   Calculons les coefficients a_i $\forall\, i \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \cdots & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
\times & & & & & & & \\
 & \cdots & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
 & \cdots & a_0a_5 & a_0a_4 & a_0a_3 & a_0a_2 & a_0a_1 & a_0^2 \\
+ & \cdots & a_1a_4 & a_1a_3 & a_1a_2 & a_1^2 & a_1a_0 & \cdot \\
 & \cdots & a_2a_3 & a_2^2 & a_2a_1 & a_2a_0 & \cdot & \\
+ & \cdots & a_3a_2 & a_3a_1 & a_3a_0 & \cdot & & \\
 & \cdots & a_4a_1 & a_4a_0 & \cdot & & & \\
\hline
= & \cdots & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4
\end{array}$$

Alors

$$\begin{cases}
a_0^2 \equiv 4 \pmod 5 & \Longleftrightarrow \quad a_0 = 2 \\
4a_1 \equiv 4 \pmod 5 & \Longleftrightarrow \quad a_1 = 1 \\
4a_2 + 1 \equiv 4 \pmod 5 & \Longleftrightarrow \quad a_2 = 2 \\
4a_3 + 5 \equiv 4 \pmod 5 & \Longleftrightarrow \quad a_3 = 1 \\
4a_4 + 7 \equiv 4 \pmod 5 & \Longleftrightarrow \quad a_4 = 3
\end{cases}$$

Donc

$$\sqrt{-1} = 2 + 1.5 + 2.5^2 + 1.5^3 + \cdots$$

En utilise l'algorithme de Schneider pour calculer les α_n, on remarque que $\alpha_0 = v_5(\sqrt{-1} - 2) = 1$

On a $\alpha_1 = v_5(y_1 - 1)$, d'autre part on a $y_1 = \dfrac{5}{\sqrt{-1} - 2}$ avec le développement de Hensel

$$\frac{5}{\sqrt{-1} - 2} = b_0 + b_1.5 + b_2.5^2 + \cdots$$

Calculons les coefficients b_i $\forall\, i \in \mathbb{N}$ par la méthode suivante :

On a $\sqrt{-1} - 2 = 1.5 + 2.5^2 + 1.5^3 + 3.5^4 + \cdots$, alors

$$\frac{\sqrt{-1} - 2}{5} = 1 + 2.5 + 1.5^2 + 3.5^3 + \cdots, \Longleftrightarrow \frac{5}{\sqrt{-1} - 2} = \frac{1}{1 + 2.5 + 1.5^2 + 3.5^3 + \cdots}$$

On pose $x = \dfrac{5}{\sqrt{-1} - 2} = b_0 + b_1.5 + b_2.5^2 + \cdots$ et $y = 1 + 2.5 + 1.5^2 + 3.5^3 + \cdots$

telle que

$$xy = 1$$

c'est à dire :

$$\begin{array}{cccccc}
 & \cdots & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\times & & & & & \\
 & \cdots & 3 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & \cdots & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
+ & \cdots & 2b_2 & 2b_1 & 2b_0 & \cdot \\
+ & \cdots & b_1 & b_0 & \cdot & \\
 & \cdots & 3b_0 & \cdot & & \\
\hline
= & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Alors

$$\begin{cases} a_0 \equiv 1 \pmod 5 & \Longleftrightarrow \quad a_0 = 1 \\ a_1 + 2 \equiv 0 \pmod 5 & \Longleftrightarrow \quad a_1 = 3 \\ a_2 + 1 + 6 + 1 \equiv 0 \pmod 5 & \Longleftrightarrow \quad a_2 = 2 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{5}{\sqrt{-1} - 2} = 1 + 3.5 + 2.5^2 + \cdots$$

Alors le développement de $y_1 - 1$ donné par :

$$y_1 - 1 = 3.5 + 2.5^2 + \cdots \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = 1$$

par la même méthode on calcule le reste jusqu'à $n = 4$, on résumé les résultats dans le tableau suivant :

n	P_n	Q_n	a_n	α_n
0	0	1	2	1
1	2	-1	1	1
2	-3	2	2	2
3	7	-1	1	1
4	-8	13	3	1

Pour calculer a_n et α_n dans les exemples suivant on répéte le même travail de l'exemple précédent.

2. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_7$, *on a* $\sqrt{2} \equiv 3 \pmod 7$, *donc nous avons*

n	P_n	Q_n	a_n	α_n
0	0	1	3	1
1	3	-1	1	1
2	-4	2	3	2

3. $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}_{11}$, *on a* $\sqrt{5} \equiv 4 \pmod{11}$, *donc nous avons*

n	P_n	Q_n	a_n	α_n
0	0	1	4	1
1	4	-1	3	1
2	-7	4	2	1

4. $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}_{13}$, *on a* $\sqrt{3} \equiv 4 \pmod{13}$, *donc nous avons*

n	P_n	Q_n	a_n	α_n
0	0	1	4	1
1	4	-1	5	1
2	-9	6	10	1

3.3 Périodicité du développement d'un nombre quadratique

De Weger, toujours dans son article [20], a prouvé qu'il y a d'autre nombres p-adiques irrationnels quadratique admet un développement périodique en fraction continue.

Lemme 3.3.1 (de Weger,[20]). *Soit* $c = e^2 + dp^k$, *avec* $e, d, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq e \leq \dfrac{p-1}{2}$, $d|2e$, *et* $(p, d) = 1$, *les coefficients du développement de* $\sqrt{c}$ *sont données par*

n	P_n	Q_n	a_n	α_n
0	0	1	e	k
1	e	d	$2e/d$	k
2	e	1	$2e$	k
3	e	d	$2e/d$	k

Alors la fraction continue de $\sqrt{c}$ est périodique de longueur 1 (i.e stationnaire) si $d = 1$ et de longueur 2 si $d > 1$.

Preuve.

Montrons que la fraction continue de Schneider du nombre quadratique $\sqrt{c}$ est périodique :
D'après l'hypothèse ci-dessus

Si $d \neq 1$, on a $a_{2n+2} = 2e/d$ et $a_{2n+1} = 2e$ et $\alpha_n = k, \quad \forall \in \mathbb{N}$. Alors la fraction continue de Schneider s'écrit sous la forme :

$$\sqrt{c} = a_0 + \cfrac{p^k}{2e + \cfrac{p^k}{2e/d + \cfrac{p^k}{2e + \cfrac{p^k}{2e/d + \cfrac{p^k}{\cdots}}}}}$$

Donc la fraction continue de Schneider est périodique de période 2.

Si $d = 1$, on trouve $a_{2n+2} = a_{2n+1} = 2e$ et $\alpha_n = k \quad \forall \in \mathbb{N}$.

Alors la fraction continue de Schneider est périodique de période 1. □

Exemple 3.3.2.

Voici quelques exemples numériques :

1. *Soit $c = 87$ et $p = 13$, on a $87 = 3^2 + 6.13$ avec les coefficients du développement de $\sqrt{87}$ sont données par*

n	P_n	Q_n	a_n	α_n
0	0	1	3	1
1	3	6	1	1
2	3	1	6	1
3	3	6	1	1

C'est à dire le dévloppement de $\sqrt{87}$ s'écrit :

$$\sqrt{87} = 3 + \cfrac{13}{1 + \cfrac{13}{6 + \cfrac{13}{1 + \cfrac{13}{6 + \cfrac{13}{\cdots}}}}}$$

2. *Soit* $c = 305$ *et* $p = 17$, *on a* $305 = 4^2 + 1.17^2$ *avec les coefficients du développement de* $\sqrt{305}$ *sont données par*

n	P_n	Q_n	a_n	α_n
0	0	1	4	2
1	4	1	8	2
2	4	1	8	2
3	4	1	8	2

C'est à dire le dévloppement de $\sqrt{305}$ *s'écrit :*

$$\sqrt{305} = 4 + \cfrac{17^2}{8 + \cfrac{17^2}{8 + \cfrac{17^2}{8 + \cfrac{17^2}{8 + \cfrac{17^2}{\cdots}}}}}$$

3. *Soit* $c = 690$ *et* $p = 7$, *on a* $690 = 2^2 + 2.7^3$ *avec les coefficients du développement de* $\sqrt{690}$ *sont données par*

n	P_n	Q_n	a_n	α_n
0	0	1	2	3
1	2	2	2	3
2	2	1	4	3
3	2	2	2	3

C'est à dire le dévloppement de $\sqrt{690}$ *s'écrit :*

$$\sqrt{690} = 2 + \cfrac{7^3}{2 + \cfrac{7^3}{4 + \cfrac{7^3}{2 + \cfrac{7^3}{4 + \cfrac{7^3}{\cdots}}}}}$$

4. *Soit* $c = 1251$ *et* $p = 5$, *on a* $1251 = 1 + 2.5^4$ *avec les coefficients du développement de* $\sqrt{1251}$ *sont données par*

n	P_n	Q_n	a_n	α_n
0	0	1	1	4
1	1	2	1	4
2	1	1	2	4
3	1	2	1	4

C'est à dire le dévloppement de $\sqrt{1251}$ s'écrit :

$$\sqrt{1251} = 1 + \cfrac{5^4}{1 + \cfrac{5^4}{2 + \cfrac{5^4}{1 + \cfrac{5^4}{2 + \cfrac{5^4}{\cdots}}}}}$$

5. *Soit $c = 244$ et $p = 3$, on a $244 = 1 + 1.3^5$ avec les coefficients du développement de $\sqrt{c}$ sont données par*

n	P_n	Q_n	a_n	α_n
0	0	1	1	5
1	1	1	2	5
2	1	1	2	5
3	1	1	2	5

Alors le dévloppement de $\sqrt{244}$ donné par

$$\sqrt{244} = 1 + \cfrac{3^5}{2 + \cfrac{3^5}{2 + \cfrac{3^5}{2 + \cfrac{3^5}{2 + \cfrac{3^5}{\cdots}}}}}$$

Dans la proposition suivante nous avons traité le problème inverse de de Weger, c'est à dire on a démontré qu'un nombre p-adique quadratique qui admet un développement de FCS périodique de période égale 2 ou 1 s'écrit donc sous la forme :
$c = e^2 + dp^k$; avec des conditions sur e, d, k.

Proposition 3.3.3 (Aimene, Belhadef). *Soit $c \in \mathbb{N}$ définit par sont fractions continues de Schneider périodique*

$$\sqrt{c} = a_0 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}}} \quad ou \quad \sqrt{c} = a_0 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}}}$$

Alors il existe $e \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$ telle que $c = e^2 + dp^k$, avec $1 \leq e \leq \frac{p-1}{2}$ et $d|2e$, $(p, d) = 1$.

Preuve.

1) Montrons que $Q_n > 0$ et $P_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

D'après la proposition (3.2.3) on a : si la FCS est périodique alors les signes de P_n et Q_n est le même et $P_{n+1}^2 < c$.

On va démontre $Q_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ par récurrence :

Pour n=0 : on a $Q_0 = 1 > 0$.

Supposons que la formule est vrai pour tout n, c'est à dire $Q_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, et montrons-la pour $n+1$: on a

$$Q_{n+1} = \frac{c - P_{n+1}^2}{p^{\alpha_n} Q_n}$$

telle que

$$\begin{cases} c - P_{n+1}^2 > 0 \\ p^{\alpha_n} Q_n > 0 \end{cases}$$

Alors $Q_{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc la formule $Q_n > 0$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $P_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$: nous avons

$$Q_n > 0 \Rightarrow P_n > 0, \text{ et on a } P_0 = 0$$

donc : $P_n \in \mathbb{N}$.

2) Montrons que si $a_{n+1} = a_{n+3} \Longleftrightarrow y_{n+1} = y_{n+3} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$) Supossons que $a_{n+1} = a_{n+3}$, et montrons que $y_{n+1} = y_{n+3} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$y_0 = a_0 + \frac{p^\alpha}{y_1} = a_0 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}}; \quad y_1 = a_1 + \frac{p^\alpha}{y_2} = a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}}$$

$$y_2 = a_2 + \frac{p^\alpha}{y_3} = a_2 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}}; \quad y_3 = a_3 + \frac{p^\alpha}{y_4} = a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$y_{2n} = a_2 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}} = y_{2n+2}; \qquad y_{2n+1} = a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}} = y_{2n+3}$$

Comme $y_{2n} = y_{2n+2}$ et $y_{2n+1} = y_{2n+3} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y_{n+1} = y_{n+3} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Longleftarrow$) Supposons que $y_{n+1} = y_{n+3}$ et montrons que $a_{n+1} = a_{n+3} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} y_{n+1} = a_{n+1} + \dfrac{p^\alpha}{y_{n+2}} \\ y_{n+3} = a_{n+3} + \dfrac{p^\alpha}{y_{n+4}} = a_{n+3} + \dfrac{p^\alpha}{y_{n+2}} \end{cases}$$

Comme $y_{n+1} = y_{n+3}$ alors $a_{n+1} = a_{n+3} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Cas 1 : (la période égal 1**)** c'est à dire :

$$\sqrt{c} = a_0 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}}}$$

On suppose $\sqrt{c}$ est périodique de péride 1.

D'aprés la partie (2) ci-dessus on a, $a_{n+1} = a_{n+2}$ alors $y_{n+1} = y_{n+2} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

D'où
$$\frac{\sqrt{c}+P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{\sqrt{c}+P_{n+2}}{Q_{n+2}}$$

Alors

$$P_{n+1}Q_{n+2}-P_{n+2}Q_{n+1}=\sqrt{c}(Q_{n+1}-Q_{n+2}) \tag{3.7}$$

Donc l'égalité (3.7) est vrai si, et seulement si,

$$P_{n+1}=P_{n+2} \quad \text{et} \;\; Q_{n+1}=Q_{n+2} \quad \text{pour tout} \;\; n\in\mathbb{N}.$$

Car :

Si $P_{n+1}\neq P_{n+2}$ et $Q_{n+1}\neq Q_{n+2}$, on a :

$$\begin{cases} (P_{n+1}Q_{n+2}-P_{n+2}Q_{n+1})\in\mathbb{N} & \text{tels que} \quad P_n\in\mathbb{N}, Q_n\in\mathbb{N}^*. \\ \sqrt{c}(Q_{n+1}-Q_{n+2})\notin\mathbb{N} & \text{tels que} \quad \sqrt{c}\notin\mathbb{N}, Q_n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Contradiction

Si $P_{n+1}=P_{n+2}$ et $Q_{n+1}\neq Q_{n+2}$, on a :

$$P_{n+1}(Q_{n+2}-Q_{n+1})=\sqrt{c}(Q_{n+1}-Q_{n+2})\Rightarrow\sqrt{c}=-P_{n+1}$$

$$\begin{cases} P_{n+1}(Q_{n+2}-Q_{n+1})\in\mathbb{N} & \text{tels que} \quad P_n\in\mathbb{N}, Q_n\in\mathbb{N}^*. \\ \sqrt{c}(Q_{n+1}-Q_{n+2})\notin\mathbb{N} & \text{tels que} \quad \sqrt{c}\notin\mathbb{N}, Q_n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Contradiction

Si $P_{n+1}\neq P_{n+2}$ et $Q_{n+1}=Q_{n+2}$, on a :

$$Q_{n+1}(P_{n+1}-P_{n+2})=0\Longrightarrow P_{n+1}=P_{n+2}$$

Contradiction

Donc l'égalité (3.7) n'est pas vérifie sauf si, et seulement si,

$$P_{n+1}=P_{n+2} \quad \text{et} \quad Q_{n+1}=Q_{n+2} \quad \text{pour tout} \quad n\in\mathbb{N}.$$

D'autre part, on peut démontrer que $a_1 = 2a_0$ (voir cas 2), donc on aura :

$$y_1 = a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}} = 2a_0 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}}$$

$$= a_0 + a_0 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}} = a_0 + \sqrt{c}$$

On a aussi :

$$y_1 = \frac{\sqrt{c} + P_1}{Q_1} = \frac{\sqrt{c} + a_0}{Q_1} = a_0 + \sqrt{c}$$

Alors $Q_1 = 1$

Comme

$$Q_1 = \frac{c - P_1^2}{p^\alpha} = \frac{c - a_0^2}{p^\alpha} = 1$$

Alors

$$c = a_0^2 + p^\alpha.$$

Cas 2 : (la Période égale 2)

Dans ce cas la FCS est périodique de période 2 c'est à dire :

$$\sqrt{c} = a_0 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{a_1 + \cfrac{p^\alpha}{a_2 + \cfrac{p^\alpha}{\cdots}}}}}$$

i) Montrons que : $P_{n+1} = P_{n+2} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

On a : $a_{n+1} = \dfrac{P_{n+1} + P_{n+2}}{Q_{n+1}}$ et $a_{n+2} = \dfrac{P_{n+3} + P_{n+2}}{Q_{n+2}}$

Donc

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \left(\frac{P_{n+1} + P_{n+2}}{P_{n+3} + P_{n+2}}\right) \frac{Q_{n+2}}{Q_{n+1}} \tag{3.8}$$

D'autre part ; $y_{n+1} = y_{n+3}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{y_{n+1} - \dfrac{p^\alpha}{y_{n+2}}}{y_{n+2} - \dfrac{p^\alpha}{y_{n+3}}} = \left(\frac{y_{n+1}y_{n+2} - p^\alpha}{y_{n+2}y_{n+1} - p^\alpha}\right) \frac{y_{n+1}}{y_{n+2}} = \frac{y_{n+1}}{y_{n+2}}$$

Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \left(\frac{\sqrt{c} + P_{n+1}}{\sqrt{c} + P_{n+2}}\right) \frac{Q_{n+2}}{Q_{n+1}} \tag{3.9}$$

De (3.8) et (3.9), on trouve :

$$\left(\frac{P_{n+1} + P_{n+2}}{P_{n+3} + P_{n+2}}\right) \frac{Q_{n+2}}{Q_{n+1}} = \left(\frac{\sqrt{c} + P_{n+1}}{\sqrt{c} + P_{n+2}}\right) \frac{Q_{n+2}}{Q_{n+1}}$$

ce qui implique que

$$(\sqrt{c} + P_{n+1})(P_{n+3} + P_{n+2}) = (\sqrt{c} + P_{n+2})(P_{n+1} + P_{n+2})$$

C'est à dire

$$\sqrt{c}(P_{n+3} - P_{n+1}) = P_{n+2}^2 - P_{n+1}P_{n+3} \tag{3.10}$$

Donc l'égalité (3.10) est vérifie si, et seulement si,

$$P_{n+1} = P_{n+2} = P_{n+3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Car :

Si $P_{n+1} \neq P_{n+2} \neq P_{n+3}\ \forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} (P_{n+2}^2 - P_{n+1}P_{n+3}) \in \mathbb{N} & \text{tels que} \quad P_n \in \mathbb{N}. \\ \sqrt{c}(P_{n+3} - P_{n+1}) \notin \mathbb{N} & \text{tels que} \quad \sqrt{c} \notin \mathbb{N}, (P_{n+3} - P_{n+1}) \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $P_{n+1} = P_{n+2} \neq P_{n+3}\ \forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sqrt{c}(P_{n+3} - P_{n+1}) = P_{n+1}^2 - P_{n+1}P_{n+3}$$

$$\begin{cases} (P_{n+1}^2 - P_{n+1}P_{n+3}) \in \mathbb{N} & \text{tels que} \quad P_n \in \mathbb{N}. \\ \sqrt{c}(P_{n+3} - P_{n+1}) \notin \mathbb{N} & \text{tels que} \quad \sqrt{c} \notin \mathbb{N}, (P_{n+3} - P_{n+1}) \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $P_{n+1} \neq P_{n+2} = P_{n+3}\ \forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sqrt{c}(P_{n+3} - P_{n+1}) = P_{n+2}^2 - P_{n+3}P_{n+2}$$

$$\begin{cases} (P_{n+2}^2 - P_{n+2}P_{n+3}) \in \mathbb{N} & \text{tels que} \quad P_n \in \mathbb{N}. \\ \sqrt{c}(P_{n+3} - P_{n+1}) \notin \mathbb{N} & \text{tels que} \quad \sqrt{c} \notin \mathbb{N}, (P_{n+3} - P_{n+1}) \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $P_{n+1} = P_{n+3} \neq P_{n+2}\ \forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P_{n+2}^2 - P_{n+3}P_{n+1} = P_{n+2}^2 - P_{n+1}^2 = 0 \Longrightarrow P_{n+1} = P_{n+2}$$

Donc l'égalité (3.10) n'est pas vérifie sauf si, et seulement, si $P_{n+1} = P_{n+2} = P_{n+3}$

Alors

$$P_{n+1} = P_{n+2}\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

ii) Montrons que : $Q_n = Q_{n+2}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{cases} (1)\ \sqrt{c} = \dfrac{Q_n p^\alpha}{y_{n+1}} + P_{n+1} \\ \\ (2)\ \sqrt{c} = \dfrac{Q_{n+2} p^\alpha}{y_{n+3}} + P_{n+3} = \dfrac{Q_{n+2} p^\alpha}{y_{n+1}} + P_{n+1}, \ \text{puisque } P_{n+1} = P_{n+3},\ y_{n+1} = y_{n+3} \end{cases}$$

D'après $(1) - (2)$ on trouve :

$$\frac{p^\alpha}{y_{n+1}}(Q_n - Q_{n+2}) = 0 \Leftrightarrow Q_n - Q_{n+2} = 0 \Leftrightarrow Q_n = Q_{n+2}\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On remarque que d'après les partie (i) et (ii) :

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_{n+2} = \cdots = P_1 = a_0 \\ Q_{2n+1} = Q_{2n+3} = \cdots = Q_1 & \forall n \in \mathbb{N} \\ Q_{2n} = Q_{2n+2} = \cdots = Q_0 = 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

Maintenant montrons que $c = e^2 + dp^k$

Nous avons :

$$c = P_{2n+1}^2 + Q_{2n}Q_{2n+1}p^\alpha \tag{3.12}$$

En remplaçant la remarque (3.11) dans la relation (3.12), on trouve :

$$c = a_0^2 + Q_1 p^\alpha \tag{3.13}$$

D'autre part,

On a $P_{n+1} = a_n Q_n - P_n$, telle que

$n_0 :\quad P_1 = a_0,$

$n_1 :\quad P_2 = a_1Q_1 - P_1 = a_1Q_1 - a_0,$

$n_2 :\quad P_3 = a_2Q_2 - P_2 = a_0 - a_1Q_1 + a_2Q_2 = a_0 - a_1Q_1 + a_2,$

$n_3 :\quad P_4 = a_1Q_3 - P_3 = -a_0 + a_1(Q_1 + Q_3) - a_2Q_2 = -a_0 + 2a_1Q_1 - a_2,$

$n_4 :\quad P_5 = a_2Q_4 - P_4 = a_0 - a_1(Q_1 + Q_3) + a_2(Q_2 + Q_4) = a_0 - 2a_1Q_1 + 2a_2,$

$\vdots$

$\vdots$

$$\begin{cases} P_{2n+1} = a_0 - na_1Q_1 + na_2, & \\ & \forall\, n \in \mathbb{N}. \\ P_{2n+2} = -a_0 + (n+1)a_1Q_1 + na_2, & \end{cases}$$

On a $P_{2n+1} = a_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

donc :

$$a_0 - na_1Q_1 + na_2 = a_0 \Longleftrightarrow Q_1 = \frac{a_2}{a_1} \in \mathbb{N}^*, \quad et \quad (\frac{a_2}{a_1}, p) = 1. \tag{3.14}$$

Nous avons aussi $P_{2n} = a_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

alors :

$$\begin{aligned} -a_0 + (n+1)a_1Q_1 - na_2 = a_0 &\Leftrightarrow 2a_0 = (n+1)a_1\frac{a_2}{a_1} - na_2 \\ &\Leftrightarrow 2a_0 = (n+1)a_2 - na_2 \\ &\Leftrightarrow 2a_0 = a_2 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} 1 \leq a_2 \leq p-1 &\Leftrightarrow 1 \leq 2a_0 \leq p-1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq a_0 \leq \frac{p-1}{2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Et $Q_1|2a_0$ satisfait, car :

$$2a_0 = a_2 = a_1 Q_1 \in \mathbb{N}^* \tag{3.16}$$

D'après les conditions (3.14), (3.15), (3.16) on pose : $e = a_0$ et $d = Q_1$ et $k = \alpha$ on obtient

$$c = e^2 + dp^\alpha \text{ telle que } e, \alpha \in \mathbb{N} \text{ et } d \in \mathbb{N}^*, 1 \leq e \leq \frac{p-1}{2}, d|2e, (p,d) = 1.$$

Si $a_1 = a_2$, on revient au cas précédent (i.e. la période 1), pour ce-la on obtient $d = 1$ et $c = e^2 + p^k$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Adamczewski, Y. Bugeaud : *A Short Proof of the Transcendence of Thue-Morse Continued Fractions*. Amer. Math. Monthly 114 (2007), 536-540.

[2] B. Adamczewski, Y. Bugeaud & L. Davison : *Continued fractions and transcendental numbers*. Ann. Inst. Fourier 56 (2006), 2093-2113.

[3] B. Adamczewski, Y. Bugeaud : *Palindromic Continued Fractions*. Ann. Ins. Fourier (Grenoble) 57 (2007), 1557-1574.

[4] B. Adamczewski, Y. Bugeaud : *Real and p-adic expansions involving symmetric patterns*. Int. Math. Res. Not. Volume 2006 (2006), Article ID 75968, 17 pages.

[5] B. Adamczewski, J. Cassaigne : *On the transcendence of real numbers with a regular expansion*. J. Number Theory 301 (2003), 27-37.

[6] J.P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, and L. Q. Zamboni : *Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions*. J. Number Theory 91 (2001), 39-66.

[7] Y. AMICE : *Les nombres p-adiques*. Presses Universitaires de France, 1975.

[8] F. Z. Azzoune et T. Soumia : *Étude des Fractions Continues de Schneider*. Mémoire de Master, Université de Jijel, 2016.

[9] G. Bachman : *Introduction to p-Adic Numbers and Valuation Theory*. Academic Press New York and London, 1964.

[10] E. Bedocchi : *A note on p-adic continued fractions*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 152 (1988), 197-207.

[11] E. Bedocchi : *Remarks on periods of p-adic continued fractions.* Boll. Un. Mat. Ital. (7)-**A** (1989), 209-214.

[12] E. Bedocchi : *Sur le développement de* $\sqrt{m}$ *en fraction continue p-adique.* Manuscripta Math. 67 (1990), no. 2, 187-195.

[13] E. Bedocchi : *Fractions continues p-adiques : périodes de longueur paire.* Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 7 (1993), no. 2, 259-265.

[14] R. Belhadef : *Caractérisation algébrique d'un nombre p-adique dont le développement de Hensel est engendré par une fraction continue.* Thèse de doctorat, Université de jijel février 2016.

[15] J. Browkin : *Continued fractions in local fields.* I, Demonstratio Math. 11 (1978), no. 1, 67-82.

[16] J. Browkin : *Continued fractions in local fields.* II, Math. Comp. 70 (2001), no. 235, 1281-1292 (electronic).

[17] P. Bundschuh : *p-adische Kettenbrüche und Irrationalität p-adischer Zahlen.* Elem. Math. 32 (1977), no. 2, 36-40.

[18] M. Couchouron : *Développement d'un réel en fractions continues.* Acta Math, Université de Rennes1,1-15 .

[19] B. M. M. de Weger : *Approximation lattices of p-adic numbers.* J. Number Theory 24 (1986), no. 1, 70-88.

[20] B. M. M. de Weger : *Periodicity of p-adic continued fractions.* Elem. Math. 43 (1988), no. 4, 112-116.

[21] D. Duverney : *Théorie des nombres.* Cours et exercices corrigé. Dunond (1998).

[22] F. Gouvea : *p-adic Numbers : An Introduction*, Second Edition, 1997.

[23] J. Hirsh, L.C. Washington : *P-adic continued fractions.* Acta Math. Springer Science+Business Media,J (2011) 25 :389-403.

[24] J. Houriet : *Fractions continues et unités dans les corps quadratiques.* Projet de semestre. École polytechnique fédérale de lausanne, 45 (2003), 13-24.

[25] H. Hutter, M. Szedlák, P. Wirth : *Elementary Analysis in* $\mathbb{Q}_p$. 17 November 2011.

[26] H. Inoue AND K. Naito : *P-adic continued fractions and a p-adic behavior of quasi-periodic dynamical systems.*Acta Math. 2012, 95-107.

[27] S. Katok : *Real and p-adic Analysis.* 3Cours notes for Math 497C.Mass program.Fall 2000(2001).

[28] A. YA Khinchin : *Continued Fractions.* Phoenix Science Series, The University Of Chicago Paress, 1964.

[29] N. Koblitz : *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions.* Springer- Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1948.

[30] V. Laohakosol : *A characterization of rational numbers by p-adic Ruban continued fractions.* J. Austral. Math. Soc. Ser. A 39 (1985), no. 3, 300-305.

[31] V. Laohakosol and P. Ubolsri : *Some algebraically independent continued fractions.* Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985), 169-173.

[32] K. Mahler : *On a geometrical representation of p-adic numbers.* Ann. of Math. (2) 41, (1940), 8-56.

[33] J. Miller : *On p-adic Continued Fractions and Quadratic Irrationals.*The University of Arizona, 2007.

[34] T. OOTO : *Transcendental p-adic continued fractions.* University of Tsukuba. (2000), 1-11.

[35] M. Queffélec : *Transcendance des fractions continues de Thue-Morse.* J. Number Theory 73 (1998) 201-211.

[36] A. Robert : *A Course in p-adic Analysis.* Graduate Texts in Mathematics 198, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2000.

[37] A. A. Ruban : *Certain metric properties of the p-adic numbers.* Sibirsk. Mat. Zh. 11 (1970), 222-227.

[38] T. Schneider : *Über p-adische Kettenbrüche.* Symposia Mathematica, Vol. IV (INDAM, Rome, 1968/69), Academic Press, London, 1970, pp. 181-189.

[39] F. Tilborghs : *Periodic p-adic continued fractions.* Simon Stevin 64 (1990), no. 3-4, 383-390.

[40] L. X. Wang : *P-adic continued fractions*. I, II, Sci. Sinica Ser. A 28 (1985), no. 10, 1009-1017, 1018-1023.