République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Sur la version p-adique du théorème du sous-espace de Schmidt

Présenté par :

FERTOUL Ahlam.

SAOUDI Asma.

Devant le jury :

Président	: T. ZERZAIHI	Pr. Université de Jijel
Encadreur	: R. BELHADEF	MCB. Université de Jijel
Examinateur	: M. BENGUESSOUM	MAA. Université de Jijel

Promotion 2017/2018

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieux, notre Créateur, le Miséricordieux, qui nous a donné l'opportunité d'étudier, la volonté, le courage et la patience afin d'accomplir et de mener à bien ce travail.

Nous remercions en particulier notre encadreur. **Dr. Belhadef Rafik** pour avoir dirigé ce travail, pour son aide, ses encouragements, sa grande disponibilité, ses précieux conseils et pour la patience qu'il nous a accordé pendant la réalisation de ce travail.

Un grand merci également aux membres du jury, le président **Pr. Zerzaihi Taher**, l'examinatrice madame **Benguessoum Messaouda**, pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'évaluer notre travail.

Nos vifs remerciements vont à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de jijel qui nous ont suivi durant nos cinq années d'études à l'université, à tous les collègues de notre promotion 2018.

Nous adressons nos remerciements les plus chaleureux à nos familles, nos amis pour leur patience et leur intérêt.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui auraient contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Asma & Ahlam

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un cœur ouverts et une immense joie, que je dédie ce mémoire.

A mon cher père et a ma très chère maman :
aucune dédica- ce ne saurait
exprimer l'amour, l'estime, le dévouement
et le respect que j'ai toujours en pour vous,
et rien du monde ne vaut les efforts fournis pour
mon éducation et ma formation. Je te dédie ce
travail. Puisse Dieux le tout puissant
te préserver et t'santé, langue
vie et bonheur.
♡

À mes chères sœurs : **Roumaissa**, **Micha** et son époux **Rachid** et leur fils **Anes** , je vous dédie ce travail avec tous mes voeux de bonheur et de santé.
À mes chers frères :**Aissam** et sa femme **Wafa** et leur fils **Amir Djoud**, **Salah**, **Hocine**, **Yahia**, **ala eddin**, veuillez trouver dans ce mémoire l'expression de mon respect.
À ma collègue Asma : Que Dieux réunisse nos chemins pour un long commun serein et que ce travail soit témoignage de ma profonde reconnaissance et de mon amour sincère et fidèle.
À mes chères amies : Un dédicace particulier est sincère pour mes amies et camarades du chemin parcouru : **Samira**, **Widad**, **Imen**, **Sarah**, **Habib**, **Walid**, **Ikram**. je vos souhaite une vie pleine de joie et de prospérité.
♡ .... **Ahlam**♡

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un cœur ouverts et une immense joie, que je dédie ce mémoire.

A mon cher père et a ma très chère maman :
aucune dédica- ce ne saurait
exprimer l'amour, l'estime, le dévouement
et le respect que j'ai toujours en pour vous,
et rien du monde ne vaut les efforts fournis pour
mon éducation et ma formation. Je te dédie ce
travail. Puisse Dieux le tout puissant
te préserver et t'santé, langue
vie et bonheur.
♡

À mes chères sœurs : **Mariem**, **Tiya** et son époux **Imad**, je vous dédie ce travail avec tous mes voeux de bonheur et de santé.
À mes chers frères :**Bilal**, **Amar** et sa femme **Nawel** et ses enfants **Rayane**, **Mahdi** et **Assile**, **Daoud** et sa femme **Ghania** et leur fils **Mohamed**, **Djamel** et sa femme **Houda** et sa fille **Roba**, veuillez trouver dans ce mémoire l'expression de mon respect.
À ma collègue Ahlam : Que Dieux réunisse nos chemins pour un long commun serein et que ce travail soit témoignage de ma profonde reconnaissance et de mon amour sincère et fidèle.
À mes chères amies : Un dédicace particulier est sincère pour mes amies et camarades du chemin parcouru : **Wissam**, **Fatima**, **Ibtissem**, **Milka**, **Amina**, **Samah**. je vos souhaite une vie pleine de joie et de prospérité.
♡ .... **Asma**♡

Table des matières

Notations

Nous utilisons les notations suivante :

p : un nombre premier, $p = 2, 3, 5, 7, 11, \cdots$

$\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs réels,

$\mathbb{Z}^*$: l'ensemble des entiers relatifs réels non nuls,

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,

$\mathbb{R}_+$: l'ensemble des nombres réels positifs,

$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels réels,

$\mathbb{N}^*$: l'ensemble des entiers naturels réels non nuls,

$\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels,

$\mathbb{Q}_p$: l'ensemble des nombres p-adiques,

$\mathbb{Q}_p^*$: l'ensemble des nombres p-adiques non nuls,

$\mathbb{Z}_p$: l'ensemble des entiers p-adiques,

$(a, b) = 1$: a et b sont premiers entre eux,

$v_p(x)$: la valuation p-adique de x,

$| \,.\, |$: la valeur absolue usuelle,

$| \,.\, |_p$: la valeur absolue p-adique,

$[x]$: la partie entière réel de x,

$[x]_p$: la partie entière p-adique de x,

$< x >_p$: la partie fractionnaire p-adique de x,

$\ll$: la notation de Vinogradov.

Introduction

D'après la théorie des fractions continues, l'exposant dans le théorème de Roth [19] est optimal. Évidemment, on peut utiliser ce résultat pour démonter que certains nombres sont transcendants, par exemple, le nombre $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{3^n}}$ est transcendant. Une version p-adique du théorème de Roth est connue sous le nom de théorème de Ridout [18]. Ce résultat dit la chose suivante : si l'on fixe un ensemble fini des nombres premiers, un nombre algébrique ne peut pas être très bien approché par des nombres rationnels dont les dénominateurs et/ou les numérateurs sont très divisibles par ces nombres premiers.

Le théorème du sous-espace a été obtenu en 1970 par Wolfgang Schmidt [22]. Puis en 1976, Schlickewei [21] a donné la version p-adique de ce résultat. Le théorème du sous-espace nous fournit une extension multidimensionnelle du théorème de Roth et été initialement développé pour l'étude de deux problèmes classiques, à savoir l'approximation des nombres algébriques et les équations de forme normalisées (une classe d'équations diophantiennes incluant les équations de Thue). Des applications subséquentes aux équations unitaires et conjecture de lang et de nombreuses applications aux familles d'équation diophantiennes.

Récemment, plusieurs applications assez inattendues du théorème du sous-espace ont été trouvées, dont certains ont été discutées par Yuri Bilu dans son discours au séminaire Bourbaki [7]. Ceux-ci incluent de nouveaux critères de transcendance, des résultats de finitude pour le nombre de solution aux familles d'équations exponentielles diophantiennes, et le travail de Corvaja et Zannier [23] sur des points entiers sur des courbes et des surfaces.

Le théorème du sous-espace affirme que, pour $\nu \geq 2$, toutes solutions $(x_1, \cdots, x_\nu)$ d'un système donné d'équations linéaires à coefficients algébriques réels (Schmidt) ou p-adique (Schlickewei) sont sous certains conditions nécessaires, contenues dans une union finie $S_1 \cup \cdots \cup S_t$ de sous-espaces rationnels propres de $\mathbb{Q}^\nu$. Comme le théorème de Roth, est inefficace, dans le sens que sa démonstration ne donne pas de limite supérieure pour la hauteur des sous-espaces $S_1, \cdots, S_t$. Cependant, Schmidt a pu établir en 1989 une borne supérieure explicite pour t, c'est à dire le nombre de sous-espaces propres qui contiennent le théorème quantitatif du sous-espace.

En 1984, Laurent [15] a appliqué le théorème du sous-espace pour établir une conjecture de Lang. Quelques années plus tard, Evertse et Györy [10] ont étendu les résultats de Schmidt aux équations de forme normée et prouvé les critères de finitude pour les équations décomposables (qui sont des équations de formes normées, des équations discriminantes et des équations de forme d'index).

Evertse, Györy, Stewart et Tijdeman [11, 12], ont établi au moyen du théorème de Schmidt que la plupart des équations de l'unité S à deux inconnues ont au plus deux solutions. En 2004 puis après, Adamczewski et Bugeaud dans une série d'articles [1, 2, 3], ont utilisé le théorème du sous-espace de Schmidt pour étudier la transcendance d'un nombre réel donné par son développement décimal ou en fractions continues réels qui vérifie des conditions de combinatoire. Ils ont également utilisé la version p-adique du théorème de Schmidt pour prouver la transcendance d'un nombre p-adique donné par son développement de Hensel (mais ils n'ont pas étudié le développement en fractions p-adique).

En 2015, Belhadef, Esbelin, et Zerzaihi [6] ont complété le travail d'Adamczewski et Bugeaud, ils ont traité, en utilisant le théorème de Schlickewei, la transcendance d' un nombre p-adique donné par son développement en fractions continues de Ruban avec une suite de quotients partielles qui est de Thue-Morse. En revanche , dans notre mémoire, nous avons suivi la même procédure pour généraliser le résultat de Belhadef pour les fractions continues p-adique de Browkin avec d'autres conditions de combinatoires comme celles d'Adamczewski et Begeaud.

La combinatoire des mots a pour objet l'étude des propriétés combinatoires des mots finis ou infinis définis sur un alphabet. Thue avait étudié le problème de combinatoire de mots pour le développement des sciences logiques seulement, et sans application. Ses travaux ont été redécouverts plusieurs fois et la suite de Thue-Morse apparait naturellement dans des domaines aussi variés que la théorie des groupes, la théorie ergodique, la géométrie différentielle, la théorie des nombres, la physique mathématique ou l'informatique théorique.

L'approximation d'un nombre algébrique irrationnel ou transcendant par les nombres rationnels est un thème très important dans la théorie des nombres, cette problématique est lié au développement en fraction continue réel où p-adique.

Notre travail est réparti sur l'introduction général et trois chapitres, ainsi que les notations et une liste des références.

Dans le premier chapitre, nous commençons par la définition de la valuation p-adique et de la norme p-adique dans $\mathbb{Q}$. Puis, on construit le corps des nombres p-adique $\mathbb{Q}_p$ qui est le complété de $\mathbb{Q}$ muni de la valeur absolue p-adique $| \, . \, |_p$. Ensuite, on définit le développement de Hansel et quelques exemples, on finit ce chapitre par les propriété analytiques de $\mathbb{Q}_p$.

Dans le deuxième chapitre, on a présenté les définitions et les théorèmes des fractions continues dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_p$. Ainsi, on a étudie la convergence des fractions continues.

Dans le dernier chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés des alphabets et des mots. Puis, on donne l'énoncé du théorème du sous-espace de Schmidt et sa version p-adique due à Schlickewei, on termine ce chapitre par quelques applications, on donne l'énoncé du théorème qu'on a démontré en utilisant le théorème de Schlickewei.

Chapitre 1

Préliminaires sur les nombres p-adiques

Dans ce chapitre, on présente la base du domaine p-adique. On commence par les définitions et les propriétés fondamentales dans $\mathbb{Q}$. Ensuite, nous montrons la construction de $\mathbb{Q}_p$ et le développement de Hensel avec quelques exemples. Enfin, nous donnons les concepts pour les suites et les séries dans $\mathbb{Q}_p$.

1.1 Valuation et norme p-adique

Définition 1.1.1 *On appel valuation p-adique de $x \in \mathbb{Z}$, notée $v_p(x)$ l'application suivante :*

$$\begin{aligned} v_p : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \\ x &\longrightarrow v_p(x) = max\{k \in \mathbb{N} : \frac{x}{p^k} \in \mathbb{Z}^*\} \end{aligned}$$

et on écrit : $x = np^{v_p(x)}$ tel que $n \in \mathbb{Z}^*$ et p ne divise pas n. Avec la convention que le maximum d'un ensemble non borné est $+\infty$, ce qui donne $v_p(0) = +\infty$.

On a aussi si $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$)

$$v_p(x) = v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$$

Proposition 1.1.2 *On a pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$:*

1) $v_p(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$.

2) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

3) $v_p(x + y) \geq min\{v_p(x), v_p(y)\}$.

Preuve :

1) Par définition : $v_p(x) = +\infty \Leftrightarrow v_p(x) = v_p(0) \Leftrightarrow x = 0$.

2) Soient $x, y \in \mathbb{Z}^*$ telle que : $x = np^{v_p(x)}$, $y = mp^{v_p(y)}$

   On a

$$\begin{aligned} xy &= np^{v_p(x)}mp^{v_p(y)} \\ &= nmp^{v_p(x)+v_p(y)} \end{aligned}$$

   Comme p ne divise pas nm, alors

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y).$$

   Dans le cas $x,\ y \in \mathbb{Q}^*$, soit $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{d}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_p(xy) &= v_p\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right) \\ &= v_p(ac) - v_p(bd) \\ &= v_p(a) + v_p(c) - v_p(b) - v_p(d) \\ &= v_p\left(\frac{a}{b}\right) + v_p\left(\frac{c}{d}\right) \\ &= v_p(x) + v_p(y) \end{aligned}$$

3) Soient $x, y \in \mathbb{Q}^*$:

   On pose $r = v_p(x)$ et $s = v_p(y)$, nous avons :

$$x = p^r\left(\frac{a}{b}\right), \quad y = p^s\left(\frac{c}{d}\right).$$

   telle que $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}^*$ et p ne divise pas ces nombres, nous avons les cas suivants :

   (a) Si $r = s$ on trouve

$$\begin{aligned} x + y &= p^r\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \\ &= p^r\left(\frac{ad + cb}{bd}\right) \end{aligned}$$

   Comme p ne divise pas bd alors $v_p(x + y) = r$

(b) Si $r<s$, on a

$$\begin{aligned} x+y &= p^r\left(\frac{a}{b}+p^{s-r}\frac{c}{d}\right) \\ &= p^r\left(\frac{ad+p^{s-r}cb}{bd}\right) \end{aligned}$$

Alors

$$v_p(x+y)=r=min\{v_p(x),v_p(y)\}.$$

(c) Si $r>s$, on a

$$\begin{aligned} x+y &= p^s\left(\frac{a}{b}+p^{r-s}\frac{c}{d}\right) \\ &= p^s\left(\frac{ad+p^{r-s}cb}{bd}\right) \end{aligned}$$

Alors

$$v_p(x+y)=s=min\{v_p(x),v_p(y)\}.$$

□

Remarque 1.1.3 *On a* $v_p(1)=0\ \ \forall p\geq 2.$

Définition 1.1.4 *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps. Une norme sur* $\mathbb{K}$ *est une application* $\|.\|$ *de* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *telle que :*

i) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

ii) $\|xy\|=\|x\|\|y\|\ \ \forall x,y\in\mathbb{K}$

iii) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\ \ \forall x,y\in\mathbb{K}$ *(inégalité triangulaire)*

De plus, si la norme vérifie l'inégalité triangulaire forte, i.e

$$\|x+y\|\leq max\{\|x\|,\|y\|\}\ \ \forall x,y\in\mathbb{K}$$

Alors, $\mathbb{K}$ *est un corps non-archimédien et la norme* $||.||$ *est non-archimédienne*

Définition 1.1.5 *On définit l'application* $|\ .\ |_p$ *sur* $\mathbb{Q}$ *comme suit :*

$$|\ x\ |_p=\begin{cases} p^{-v_p(x)} & si\quad x\neq 0 \\ 0 & si\quad x=0 \end{cases}$$

Proposition 1.1.6 *L'application* $|\ .\ |_p$ *définit une norme non-archimédienne sur* $\mathbb{Q}$ *appelé norme p-adique.*

Preuve :

1) $\mid x \mid_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Leftarrow)$

$$x = 0 \overset{\text{déf}}{\Rightarrow} \mid 0 \mid_p = 0$$

$\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} \mid x \mid_p = 0 &\Rightarrow p^{-v_p(x)} = 0 \\ &\Rightarrow v_p(x) = +\infty \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

2) $\mid xy \mid_p = \mid x \mid_p \mid y \mid_p$

On a :

$$\begin{aligned} \mid xy \mid_p &= p^{-v_p(xy)} \\ &= p^{-v_p(x)-v_p(y)} \\ &= p^{-v_p(x)}p^{-v_p(y)} \\ &= \mid x \mid_p \mid y \mid_p . \end{aligned}$$

3) $\mid x+y \mid_p \leq \max(\mid x \mid_p, \mid y \mid_p) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$

On a d'après la proposition (1.1.2),

$$v_p(x+y) \geq min(v_p(x), v_p(y))$$

$$\begin{aligned} -v_p(x+y) &\leq -min(v_p(x), v_p(y)) \\ &= max(-v_p(x), -v_p(y)) \\ p^{-v_p(x+y)} &\leq p^{max(-v_p(x),-v_p(y))} \\ &= max(p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(x)}) \end{aligned}$$

D'où

$$\mid x+y \mid_p \leq max(\mid x \mid_p, \mid y \mid_p)$$

□

Lemme 1.1.7 *On a les propriétés suivantes :*

1) La norme p-adique $\mid . \mid_p$ *prend ses valeurs dans l'ensemble suivant :*

$$\{p^n \ , n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$

2) Si a,b $\in \mathbb{Z}$ alors

$$a \equiv b(mod\ p^n) \Leftrightarrow \mid a-b \mid_p \leq p^{-n},\ \forall n \geq 0$$

Preuve :

1) Évident a partir de la définition de la norme p-adique.

2) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$)Si $a \equiv b(mod\ p^n),\ \forall n \geq 0$ alors $\exists$ k $\in \mathbb{Z}$:

$$a - b = kp^n$$

D'où

$$\begin{aligned} \mid a-b \mid_p &= \mid k \mid_p \mid p^n \mid_p \\ &= p^{-v_p(k)} p^{-n} \\ &\leq p^{-n},\ \forall n \end{aligned}$$

$\Leftarrow$)Si $\mid a-b \mid_p \leq p^{-n},\ \forall\ n\ alors$

$$\begin{aligned} \mid a-b \mid_p \leq p^{-n} &\Leftrightarrow p^{-v_p(a-b)} \leq p^{-n} \\ &\Leftrightarrow -v_p(a-b) \leq -n \\ &\Leftrightarrow n \leq v_p(a-b) \\ &\Leftrightarrow v_p(a-b) - n \geq 0 \end{aligned}$$

Comme $v_p(a-b) - n \geq 0$, si on pose $k = p^{v_p(a-b)-n} n_1$ on a $k \in \mathbb{Z}$
donc $a - b = kp^n$, alors

$$a \equiv b(mod\ p^n),\ \forall n \geq 0 \qquad \square$$

1.2 Construction de $\mathbb{Q}_p$

Il est bien connu que le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet par rapport à la valeur absolue usuelle $| \, . \, |$ on complété ce corps par la méthode de complétion connu dans la topologie on trouve le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ associée à la valeur absolue usuelle $| \, . \, |$. En appliquant le même théorème

sur le corps $\mathbb{Q}$ mais par rapport à la valeur absolue p-adique $|\ .\ |_p$ nous obtenons le corps des nombres p-adique associée à la valeur absolue p-adique $|\ .\ |_p$ on le notes $\mathbb{Q}_p$.
Dans l'exemple suivante on donne une suite de Cauchy qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ par rapport a $|\ .\ |_p$

Exemple 1.2.1 *Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $1 \leq x \leq p$, soit la suite de terme général $y_n = x^{p^n}$, d'après le théorème de Fermat-Euler on a*

$$x^{p^n(p-1)} - 1 \equiv 0 (mod\ p^n)$$

D'où

$$|\ y_{n+1} - y_n\ |_p \leq |\ x^{p^n}(x^{p^n(p-1)} - 1)\ |_p \leq p^{-n}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}|\ y_m - y_n\ |_p &= |\ y_m - y_{m-1} + y_{m-1} + \cdots y_{n+1} - y_n\ |_p \\ &\leq max\{|\ y_m - y_{m-1}\ |_p, \cdots, |\ y_{n+1} - y_n\ |_p\} \\ &\leq p^{-n}\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} |\ y_m - y_n\ |_p = 0$$

Donc la suite $(y_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ muni de la norme $|\ .\ |_p$.
Supposons que cette suite converge vers $y \in \mathbb{Q}$, c'est à dire

$$\begin{aligned}y &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} y_{n+1} \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} (y_n)^p = y^p\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}y - y^p = 0 &\Rightarrow y(y^{p-1} - 1) = 0 \\ &\Rightarrow y^{p-1} = 1\end{aligned}$$

Cela signifie que y est une $(p-1)^{ieme}$ racine de l'unité dans $\mathbb{Q}$, donc égale 1.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}|\ y - x\ |_p &= |\ y - x^{p^n} + x^{p^n} - x\ |_p \\ &\leq max\{|\ y - x^{p^n}\ |_p, |\ x^{p^n} - x\ |_p\} \\ &\leq |\ x^{p^n - 1} - 1\ |_p < 1\end{aligned}$$

Alors $p^{-v_p(y-x)} < 1$, *d'où* $v_p(y-x) \geq 1$, *ainsi* p *divise* $y-x$, *cela signifie que* $y = x$ *alors, si* $x \neq 1$ *on aura une contradiction, donc* $y \notin \mathbb{Q}$.

Propriété 1.2.2 $\mathbb{Q}_p$ *est un corps complet non-archimédien.*

Preuve :

1) Montrons que $\mathbb{Q}_p$ est un corps :
   Il est clair que ($\mathbb{Q}_p$,+, .) est un anneau commutatif.
   Il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$ non nul admet un inverse dans $\mathbb{Q}_p$.
   Soit $(x_n) \in \mathbb{Q}_p$ une suite de Cauchy de limite x alors :
   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} |\ x_n\ |_p = |\ x\ |_p \neq 0$$
   Donc $|\ x_n\ |_p$ est aussi non nul pour n assez grand, et donc la suite $v_p(x_n)$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}$, comme il s'agit d'une suite d'élément de $\mathbb{Z}$, elle est constante à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on définit une suite y_n d'élément de $\mathbb{Q}$ par :
   $$y_n = \begin{cases} 0 & si \qquad n < N \\ \dfrac{1}{x_n} & si \qquad n \geq N \end{cases}$$
   Pour tout $n, m \geq N$ on a
   $$|\ y_n - y_m\ |_p = \frac{|\ x_n - x_m\ |_p}{|\ x_n\ |_p |\ x_m\ |_p}$$
   De sort que y_n soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, donc elle converge vers $y \in \mathbb{Q}_p$, et comme $x_n y_n = 1$, alors :
   $$xy = 1.$$
2) Comme $|\ .\ |_p$ est une norme non-archimédienne sur $\mathbb{Q}_p$, alors $\mathbb{Q}_p$ est un corps complet non-archimedien. □

Définition 1.2.3 *L'ensemble des entiers p-adiques est le disque unitaire suivant :*

$$\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : |\ a\ |_p \leq 1\}$$

Définition 1.2.4 (Autre définition de $\mathbb{Q}_p$) *. On peut définir le corps* $\mathbb{Q}_p$ *comme :*

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z}_p \ et\ b \in \mathbb{Z}_p^*\}$$

Définition 1.2.5 *L'ensemble* $\mathbb{Z}_p^\times$ *des éléments inversibles dans* $\mathbb{Z}_p$ *se compose des entiers p-adiques de norme égal* 1, *à écrire*

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{a \in \mathbb{Z}_p : \mid a \mid_p = 1\}$$

Les élément de $\mathbb{Z}_p^\times$ s'appelant les unités.

Proposition 1.2.6 *Tout entier p-adique $x \in \mathbb{Z}_p$ peut être représenté de manière canonique sous la forme :*

$$x = x_0 p^{v_p(x)}$$

Où x_0 est une unité p-adique.

Proposition 1.2.7 *Si $x \in \mathbb{Q}$ avec $\mid x \mid_p \leq 1$, alors :*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mid \alpha - x \mid_p \leq p^{-i}$$

Preuve :
Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$ et $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*(a,b) = 1$ on a :

$$\mid x \mid_p = \frac{\mid a \mid_p}{\mid b \mid_p} = \frac{p^{v_p(x)}}{p^{v_p(x)}} \leq 1$$

D'où p ne divise pas b, alors $v_p(b) = 0$ c'est à dire $(b,d) = 1$.
Donc d'après la théorème de Bézout il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tel que $mb + np^i = 1, \forall i \in \mathbb{N}$.
On choisit $\alpha = am$ on a

$$\begin{aligned} \mid \alpha - x \mid_p = \left| am - \frac{a}{b} \right|_p &= \left| \frac{a}{b} \right|_p |mb - 1|_p \\ &\leq \mid np^i \mid_p = \mid n \mid_p \mid p^i \mid_p \leq \mid p^i \mid_p = p^{-i} \end{aligned}$$

D'où

$$\mid \alpha - x \mid_p \leq p^{-i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$ □

1.3 Développement de Hensel

On va démontrer dans cette section que chaque élément dans $\mathbb{Q}_p$ s'écrit sous forme d'une série.

Proposition 1.3.1 *Tous $x \in \mathbb{Q}_p^*$ admet une unique représentation $x = p^n u$ où $n \in \mathbb{Z}$ et u est une unité dans $\mathbb{Z}_p$.*

Preuve :

a) **Existence de la représentation :**
Soit $x \in \mathbb{Q}_p^*$ alors $x = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}_p, b \in \mathbb{Z}_p^*$.
On sait que $a = a_0 p^k$ et $b = b_0 p^m$ avec a_0,b_0 des unités d'après la proposition (1.2.6) et $k = v_p(a)$, $m = v_p(b)$
D'où
$$x = \frac{a_0}{b_0} p^{k-m}.$$

b) **Unicité de la représentation :**
Supposons que $x \in \mathbb{Q}_p^*$ admet deux représentation $x = up^k = vp^m$ avec u, v des unités dans $\mathbb{Z}_p$ et $m, k \in \mathbb{Z}$, alors
$$uv^{-1} = p^{m-k} \Rightarrow v_p(uv^{-1}) = v_p(p^{m-k}) = m - k$$
Et on a uv^{-1} est une unité, alors $v_p(uv^{-1}) = 0 \Rightarrow m = k$
D'où l'unicité de la représentation. $\square$

Proposition 1.3.2 *Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un unique développement sous la forme :*

$$x = \sum_{n \geqslant n_0} x_n p^n \quad \text{où} \quad 0 \leqslant x_n \leqslant p-1 \ \text{et } n_0 \in \mathbb{Z}.$$

Si $x_{n_0} \neq 0$, alors $n_0 = v_p(x)$

Preuve :

D'après la proposition (1.3.1) x s'écrit sous la forme :

$$x = up^{n_0} \text{ où } n_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } u \text{ unité dans } \mathbb{Z}_p.$$

Le développement de u dans $\mathbb{Z}_p$ est donné par :

$$u = \sum_{n \geqslant 0} u_n p^n$$

D'où

$$x = \sum_{n\geq 0} u_n p^{n+n_0} = \sum_{n\geq n_0} u_{n-n_0} p^n$$
$$= \sum_{n\geq n_0} x_n p^n$$

Donc $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ c'est à dire $\mid u \mid_p = 1$, d'où $\mid x \mid_p = p^{-n_0}$ alors

$$v_p(x) = n_0.$$

• L'unicité du développement :

Supposons que x admet deux développement différents. Alors il existe deux suites $0 \leqslant x_n \leqslant p-1$ et $0 \leqslant y_n \leqslant p-1$ tel que :

$$x = \sum_{n\geqslant n_0} x_n p^n = \sum_{n\geqslant n_0} y_n p^n$$

On a $x = p^{v_p(x)}u = p^{n_0}u$ alors $u = p^{-n_0}x$

Donc

$$u = p^{-n_0} \sum_{n\geqslant n_0} x_n p^n = \sum_{m\geqslant 0} x_{m+n_0} p^m$$
$$= x_{n_0} + x_{n_{0+1}}p + x_{n_{0+2}}p^2 + x_{n_{0+3}}p^3 + \cdots + x_{n_{0+n}}p^n + \cdots \ \textit{tel que } 0 \leqslant x_{m+n_0} \leqslant p-1$$

On a aussi

$$u = p^{-n_0} \sum_{n\geqslant n_0} y_n p^n = \sum_{m\geqslant 0} y_{m+n_0} p^m$$
$$= y_{n_0} + y_{n_{0+1}}p + y_{n_{0+2}}p^2 + y_{n_{0+3}}p^3 + \cdots + y_{n_{0+n}}p^n + \cdots \ \textit{tel que } 0 \leqslant y_{m+n_0} \leqslant p-1$$

Donc on remarque que

$$0 = (x_{n_0} - y_{n_0}) + (x_{n_{0+1}} - y_{n_{0+1}})p + (x_{n_{0+2}} - y_{n_{0+2}})p^2 + \cdots + (x_{n_{0+n}} - y_{n_{0+n}})p^n + \cdots$$

C'est à dire

$$y_{n_0} - x_{n_0} = (x_{n_{0+1}} - y_{n_{0+1}})p + (x_{n_{0+2}} - y_{n_{0+2}})p^2 + \cdots + (x_{n_{0+n}} - y_{n_{0+n}})p^n + \cdots$$
$$= p[(x_{n_{0+1}} - y_{n_{0+1}}) + (x_{n_{0+2}} - y_{n_{0+2}})p + \cdots + (x_{n_{0+n}} - y_{n_{0+n}})p^{n-1} + \cdots]$$

Donc

$$x_{n_0} - y_{n_0} \equiv 0(mod\ p) \text{ tel que } 0 \leqslant x_{n_0}, y_{n_0} \leqslant p-1$$

Alors

$$x_{n_0} - y_{n_0} = 0 \Longleftrightarrow y_{n_0} = x_{n_0}$$

De même pour

$$\begin{aligned} y_{n_{0+1}} - x_{n_{0+1}} &= (x_{n_{0+2}} - y_{n_{0+2}})p^1 + (x_{n_{0+3}} - y_{n_{0+3}})p^2 + \cdots + (x_{n_{0+n}} - y_{n_{0+n}})p^{n-1} + \cdots \\ &= p[(x_{n_{0+2}} - y_{n_{0+2}}) + (x_{n_{0+3}} - y_{n_{0+3}})p + \cdots + (x_{n_{0+n}} - y_{n_{0+n}})p^{n-1} + \cdots] \end{aligned}$$

Donc

$$x_{n_{0+1}} - y_{n_{0+1}} \equiv 0(mod\ p) \text{ tel que } 0 \leqslant x_{n_{0+1}}, y_{n_{0+1}} \leqslant p-1$$

Alors

$$x_{n_{0+1}} - y_{n_{0+1}} = 0 \Longleftrightarrow y_{n_{0+1}} = x_{n_{0+1}}$$

Par la même méthode, on répète par rapport aux autres éléments, ainsi on aura $y_{n_{0+i}} = x_{n_{0+i}} \forall i$
Donc, nous concluons que le développement est unique. $\square$

Proposition 1.3.3 *Tous les éléments $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un développement unique sous forme d'une série convergente vers x dans $\mathbb{Q}_p$ tels que :*

$$x = \sum_{n \geqslant n_0} b_n p^n \text{ où } n_0 = v_p(x) \text{ et } 0 \leqslant b_n \leqslant p-1, \text{ pour tout entier } n \geqslant n_0.$$

Preuve :
Soit $x \in \mathbb{Q}_p^*$
On pose $y = p^{-v_p(x)}x$, alors

$$\mid y \mid_p = \mid p^{-v_p(x)} \mid_p \mid x \mid_p = p^{v_p(x)} p^{-v_p(x)} = 1$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{Q}_p$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\mid y - r \mid_p \leqslant \mid p^i \mid_p, \forall i \in \mathbb{N}$,
d'après la proposition (1.2.7) il existe $a_0 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$0 \leqslant a_0 < p \text{ et } \mid r - a_0 \mid_p \leqslant \mid p^i \mid_p$$

Ainsi, $\mid y - a_0 \mid_p \leqslant \mid p^i \mid_p$ et $y - a_0 = p^{n_1} y_1$, avec $n_1 \geqslant 1$ et $\mid y_1 \mid_p = 1$.
De même, il existe $a_1, 0 \leqslant a_1 < p$ tels que $y_1 - a_1 = p^{n_2'} y_2$, $n_2' \geqslant 1$ et $\mid y_2 \mid_p = 1$.
Alors

$$y = a_0 + a_1 p^{n_1} + p^{n_1+n_2'} y_2 = a_0 + a_1 p^{n_1} + p^{n_2} y_2, \text{ ou } n_2 = n_1 + n_2' > n_1$$

et par récurrence on peut déterminé une suite des nombres et une suite d'indices $a_0, a_1, \cdots a_l$ et $n_1, n_2 \cdots n_l$, tels que $0 < a_j < p, 1 \leqslant j \leqslant l, n_1 < n_2 < \cdots < n_l$.
Et

$$y = a_0 + a_1 p^{n_1} + \cdots + a_{l-1} p^{n_{l-1}} + p^{n_l} y_l, \text{ et } \mid y_l \mid_p = 1.$$

Alors il existe a_l ; $0 < a_l < p$ et $n_l' \geqslant 1$ tels que $y_l - a_l = p^{n_l'} y_{l+1}$ et $\mid y_{l+1} \mid_p = 1$.
Et posant $n_l + n_l' = n_{l+1}$, on obtient

$$y = a_0 + a_1 p^{n_1} + \cdots + a_l p^{n_l} + p^{n_{l+1}} y_{l+1},$$

Comme la suite $(n_l)_{l \geqslant 1}$ est strictement croissante
donc

$$\lim_{l \to +\infty} n_l = +\infty,$$

et

$$\lim_{l \to +\infty} \mid p^{n_{l+1}} y_{l+1} \mid_p = \lim_{l \to +\infty} \mid p^{n_{l+1}} \mid_p \mid y_{l+1} \mid_p = \lim_{l \to +\infty} p^{-n_{l+1}} = 0$$

D'où

$$y = \lim_{l \to +\infty} (a_0 + \sum_{j=1}^{l} a_j p^{n_j}) = \sum_{n \geqslant 0} a_n p^n.$$

Où l'on a posé $a_n = 0$ lorsque $n \notin \{0, n_j, j \geqslant 1\}$. Alors

$$x = p^{v_p(x)} y = p^{n_0} \sum_{n \geqslant 0} a_n p^n = \sum_{n \geqslant 0} a_n p^{n+n_0} = \sum_{i \geqslant n_0} a_{i-n_0} p^i, \text{ avec } \quad i = n + n_0. \qquad \square$$

Définition 1.3.4 *Soit $a \in \mathbb{Q}_p$, on appel développement de Hensel de a la série suivante :*

$$a = \sum_{n \geqslant n_0} a_n p^n$$

Où $0 \leqslant a_n \leqslant p - 1$ et $n_0 = v_p(a) \in \mathbb{Z}$, en particulier $a_{n_0} \neq 0$.

Définition 1.3.5 *Pour tout élément $a \in \mathbb{Z}_p$ on définit son développement de Hensel par :*

$$a = \sum_{n \geqslant 0} a_n p^n$$

Proposition 1.3.6 *Soit $x \in \mathbb{Q}_p$ donné par son développement de Hensel suivant :*

$$x = \sum_{n \geqslant n_0} x_n p^n$$

où $x_n \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, p-1\}$ $\forall n \geq 1$ *et* $x_{n_0} \neq 0$, $n_0 = v_p(x)$
alors le développement de Hensel de (-x) s'écrit sous la forme suivante :

$$-x = (p - x_{n_0})p^{n_0} + \sum_{n \geqslant n_{0+1}} (p - x_n - 1)p^n$$

Preuve :
Soit $x = \sum_{n \geqslant n_0} x_n p^n$ tel que $0 \leqslant x_n \leqslant p-1$, On a

$$\mid x \mid_p = \mid -x \mid_p = p^{-v_p(x)} = p^{-n_0} > 1$$

Alors $(-x) \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$

On pose $-x = \sum_{n \geqslant n_0} y_n p^n$ tel que $0 \leqslant y_n \leqslant p-1$ on a, $x + (-x) = 0$ c'est-à-dire

$$\begin{array}{cccccccccc} & \cdots & x_2 & x_1 & x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{n_0+2} & x_{n_0+1} & x_{n_0} \\ + & \cdots & y_2 & y_1 & y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{n_0+2} & y_{n_0+1} & y_{n_0} \\ \hline = & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Alors

$$x_{n_0} + y_{n_0} \equiv 0 \ (mod\ p) \Longrightarrow y_{n_0} = (p - x_{n_0}) \quad x_{n_0}, y_{n_0} \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$$

Donc calculons $y_{n_{0+1}}$

$$\begin{array}{cccccccccc} & \cdots & x_2 & x_1 & x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{n_0+2} & x_{n_0+1} & x_{n_0} \\ + & & & & & & & & & \\ & \cdots & y_2 & y_1 & y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{n_0+2} & y_{n_0+1} & p - x_{n_0} \\ \hline = & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Alors

$$1 + x_{n_{0+1}} + y_{n_{0+1}} \equiv 0 \ (mod\ p) \Longrightarrow y_{n_{0+1}} = (p - x_{n_{0+1}} - 1)$$

Calculons $y_{n_{0+2}}$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \cdots & x_2 & x_1 & x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{n_0+2} & x_{n_0+1} & x_{n_0} \\
+ & & & & & & & & & \\
 & \cdots & y_2 & y_1 & y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{n_0+2} & (p - x_{n_0+1} - 1) & p - x_{n_0} \\
\hline
= & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Alors

$$1 + x_{n_{0+2}} + y_{n_{0+2}} \equiv 0 \ (mod\ p) \Longrightarrow y_{n_{0+2}} = (p - x_{n_{0+2}} - 1)$$

On répète le même travail pour les autres coefficients, on obtient

$$\begin{aligned}
-x &= (p - x_{n_0})p^{n_0} + (p - x_{n_{0+1}} -)p^{n_{0+1}} + \cdots (p - x_0 - 1)p^0 + (p - x_1 - 1)p + \cdots \\
&= (p - x_{n_0})p^{n_0} + \sum_{n \geqslant n_{0+1}} (p - x_n - 1)p^n.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.3.7 *Pour tout élément $x \in \mathbb{Z}_p$ avec $x = \sum_{n \geqslant 0} x_n p^n$, le développement de Hensel de $(-x)$ est donné par :*

$$\begin{aligned}
-x &= (p - x_0)p^0 + (p - x_1 - 1)p + \cdots \\
&= (p - x_0) + \sum_{n \geqslant 1} (p - x_n - 1)p^n, \ \textit{tel que} \quad x_0 \neq 0.
\end{aligned}$$

Proposition 1.3.8 *Soit $x = \sum_{n \geqslant n_0} x_n p^n$ et $y = \sum_{n \geqslant n_0} y_n p^n$, le développement de Hensel de xy est donné par :*

$$xy = \sum_{n \geqslant n_0} z_n p^n \ \textit{telle que}\ z_n = \sum_{k=n_0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

Remarque 1.3.9

1) L'inverse d'un entier p-adique $a = \sum_{n \geqslant 0} a_n p^n$ est un entier p-adique si $a_0 \neq 0$,et on a $A = \frac{1}{a} = \sum_{n \geqslant 0} b_n p^n$
En outre $Aa = 1$ on utilise la proposition (1.3.8) pour calculer les b_i telle que $0 \leqslant a_i, b_i \leqslant p - 1$.

2) Soit $a = \sum_{n \geqslant 0} a_n p^n$, on a :

$$pa = p\sum_{n\geqslant 0} a_n p^n \neq 1 = 1 + 0p + 0p + 0p + \cdots$$

Le nombre premier p n'a pas d'inverse multiplicatif dans $\mathbb{Z}_p$ (p admet un inverse multiplicatif dans $\mathbb{Q}_p$.

Définition 1.3.10 *On définit l'ensemble $p^n\mathbb{Z}_p$ par :*

$$\begin{aligned} p^n\mathbb{Z}_p &= \{x \in \mathbb{Q}_p : x = p^n a; a \in \mathbb{Z}_p\} \\ &= \{x \in \mathbb{Q}_p : \mid x \mid_p \leqslant \frac{1}{p^n}\}. \end{aligned}$$

La partie fractionnaire p-adique

Définition 1.3.11 *Soit un nombre p-adique x donné par son développement de Hensel :*

$$x = \sum_{n\geqslant n_0} a_n p^n \text{ où } n_0 = v_p(x) \in \mathbb{Z}, x_n \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$$

***La partie entière p-adique** de x est défini par :*

$$[x]_p = \sum_{n\geqslant 1} a_n p^n = a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots \in \mathbb{Z}_p$$

***La partie fractionnaire p-adique** de x est défini par :*

$$< x >_p = \sum_{n=n_0}^{0} a_n p^n = a_{n_0} p^{n_0} + a_{n_{0+1}} p^{n_{0+1}} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$$

On obtient ainsi la décomposition :

$$x = \underbrace{a_{n_0} p^{n_0} + a_{n_{0+1}} p^{n_{0+1}} + \cdots + a_0}_{<x>_p} + \underbrace{a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots}_{[x]_p} = < x >_p + [x]_p$$

Remarque 1.3.12 *Si $< x >_p \neq 0$ alors $< x >_p = ap^k$, pour les entiers a et $k \leqslant 0$.*
On sait que $0 \leqslant x_n \leqslant p-1$, alors $0 \leqslant < x >_p < p$.
En effet, on a :

$$0 \leqslant < x >_p = \sum_{n=n_0}^{0} x_n p^n < (p-1)\sum_{n\geqslant 0} p^{-n} = p$$

Par conséquence, la partie fractionnaire de tout nombre p-adique satisfait

$$< x >_p \in [0, p[\cap \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right].$$

Remarque 1.3.13 *Si $x \in \mathbb{Z}_p$ alors $< x >_p = a_0$.*

Exemple 1.3.14 *Soit $x = -1$, $p \geq 2$:*

$$| x |_p = | -1 |_p = | 1 |_p = p^0 \leq 1 \quad alors \quad -1 \in \mathbb{Z}_p$$

on a

$$1 = 1 + 0p + 0 + 0 + \cdots$$

D'après le corollaire (1.3.7) *le développement de Hensel de* -1 *est donné par :*

$$-1 = (p-1) + (p-0-1)p + (p-0-1)p^2 + \cdots + (p-0-1)p^n + \cdots$$

Alors

$$-1 = \sum_{n \geq 0} (p-1)p^n$$

Et on a aussi :

$$< -1 >_p = (p-1).$$
$$[-1]_p = (p-1) \sum_{n \geq 1} p^n.$$

Exemples 1.3.15

1)*Soit* $x = \dfrac{1}{p}$ *et* $p \geq 2$

$$| x |_p = \left| \frac{1}{p} \right|_p = | p^{-1} |_p > 1 \qquad alors \qquad \frac{1}{p} \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$$

Donc le développement de Hensel de $\dfrac{1}{p}$ *est donné par :*

$$\frac{1}{p} = 1.p^{-1} + 0.p^0 + \cdots$$

Et on a aussi :

$$< \frac{1}{p} >_p = \frac{1}{p}.$$
$$\left[\frac{1}{p} \right]_p = 0.$$

Dans le cas général : soit $x = \dfrac{1}{p^k}$ *et* $p \geq 2, k \geq 1$, *son développement de Hensel de* $\dfrac{1}{p^k}$ *:*

$$\frac{1}{p^k} = 1.p^{-k} + 0.p^{k+1} + 0.p^{k+2} + \cdots + 0 + 0.p + \cdots$$

Et on a aussi :

$$< \frac{1}{p^k} >_p = \frac{1}{p^k}.$$
$$\left[\frac{1}{p^k}\right]_p = 0.$$

2) *Soit* $x = \frac{1}{2}$ $p>2$,

$$| x |_p = \left|\frac{1}{2}\right|_p = | 2^{-1} |_p = p^0 = 1 \quad alors\ \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_p$$

On a

$$\begin{cases} 1 = 1 + 0.p + 0.p^2 + \cdots \\ et \\ 2 = 2 + 0.p + 0.p^2 + \cdots \end{cases}$$

On pose $A = \frac{1}{2}$ *tel que* $a_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$
Comme $2A = 1$ *donc d'après la proposition* $(1.3.8)$ *on a :*

$$\begin{cases} 2a_0 \equiv 1[p] & \Longrightarrow a_0 \equiv \frac{p+1}{2}[p] \\ 1 + 2a_1 + 0a_0 \equiv 0[p] & \Longrightarrow a_1 \equiv \frac{p-1}{2}[p] \\ 1 + 2a_2 + 0a_1 + 0a_0 \equiv 0[p] & \Longrightarrow a_2 \equiv \frac{p-1}{2}[p] \\ \vdots \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{2} = \frac{p+1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{p-1}{2} p^n$$

Et on a :

$$< \frac{1}{2} >_p = \frac{p+1}{2}$$
$$\left[\frac{1}{2}\right]_p = \sum_{n\geq 1} \frac{p-1}{2} p^n$$

Exemples 1.3.16

1)*Soit* $x = -17$ *et* $p = 17$ *:*

$$| x |_p = | -17 |_{17} = 17^{-1} < 1\ alors\ -17 \in \mathbb{Z}_{17}$$

On a $17 = 0.17^0 + 1.17^1 + 0.17^2 + \cdots$

Donc le développement de Hensel de -17 *est donné par :*

$$-17 = 16.17 + 16.17^2 + \cdots + 16.17^n + \cdots$$

Alors

$$-17 = 16\sum_{n\geq 1} 17^n$$

Et on a aussi :

$$< -17 >_{17} = 0.$$

$$[-17]_{17} = 16\sum_{n\geq 1} 17^n.$$

2) *Soit* $x = -13$ *et* $p = 13$ *:*

$$|\ x\ |_p = |\ -13\ |_{13} = 13^{-1} < 1 \ alors \ -13 \in \mathbb{Z}_{13}$$

On a $13 = 0.13^0 + 1.13^1 + 0.13^2 + \cdots$

Donc le développement de Hensel de -13 *est donné par :*

$$-13 = 12.13 + 12.13^2 + \cdots + 12.13^n + \cdots$$

Alors

$$-13 = 12\sum_{n\geq 1} 13^n$$

Et on a aussi :

$$< -13 >_{13} = 0.$$

$$[-13]_{13} = 12\sum_{n\geq 1} 13^n.$$

Cas général : *Dans* $\mathbb{Q}_p$*, le développement de* $x = -p$ *est donné par :*

$$-p = (p-1)\sum_{n\geq 1} p^n$$

3) *Soit* $x = -\dfrac{1}{13}$ *et* $p = 13$

$$|\ x\ |_p = \left|-\frac{1}{13}\right|_p = 13 > 1 \ alors \ -\frac{1}{13} \in \mathbb{Q}_{13} \setminus \mathbb{Z}_{13}$$

On a : $\dfrac{1}{13} + \left(-\dfrac{1}{13}\right) = 0$

D'après la proposition (1.3.6) *le développement de Hensel de* $-\dfrac{1}{13}$ *est donné par :*

$$-\frac{1}{13} = (13-1)13^{-1} + (13-0-1) + (13-0-1)13 + \cdots + (13-0-1)13^n + \cdots$$

Alors

$$-\frac{1}{13} = 12\sum_{n\geqslant -1} 13^n$$

Et on a aussi :

$$< -\frac{1}{13} >_{13} = 12.13^{-1} + 12.$$
$$\left[-\frac{1}{13}\right]_{13} = 12\sum_{n\geqslant 1} 13^n.$$

Cas général : *Dans* $\mathbb{Q}_p$, *le développement de* $-\dfrac{1}{p}$ *est donné par :*

$$-\frac{1}{p} = (p-1)\sum_{n\geqslant -1} p^n$$

4) *Soit* $x = -\dfrac{13}{2}$ *et* $p = 13$

$$\mid x \mid_p = \left|\frac{13}{2}\right|_{13} = 13^1 = 13 \ \textit{alors} \ -\frac{13}{2} \in \mathbb{Z}_{13}$$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} = 7.13^0 + 6.13^1 + 6.13^2 + 6.13^3 + \cdots (\textit{voir l'exemple } (1.3.15)) \\ -13 = 0.13^0 + 12.13^1 + 12.13^2 + 12.13^3 + \cdots (\textit{d'après le corollaire } (1.3.7)) \end{cases}$$

On pose $\alpha = -13 \times \dfrac{1}{2}$ *donc d'après la proposition* (1.3.8), *on trouve :*

$$\begin{cases} c_0 = 7.0 & \Longrightarrow c_0 \equiv 0[13] \\ c_1 = 0 + 0.6 + 12.7 & \Longrightarrow c_1 \equiv 6[13] \\ c_2 = 6 + 6.0 + 12.6 + 12.7 & \Longrightarrow c_2 \equiv 6[13] \\ c_3 = 12 + 0.6 + 12.6 + 12.6 + 12.7 & \Longrightarrow c_3 \equiv 6[13] \\ \vdots & \end{cases}$$

Donc

$$-\frac{13}{2} = 6.\sum_{n\geq 1} 13^n$$

Et on a aussi :

$$< -\frac{13}{2} >_{13} = 0.$$
$$\left[-\frac{13}{2}\right]_{13} = 6.\sum_{n\geq 1} 13^n.$$

5) *Soit* $x = -\dfrac{11}{2}$ *et* $p = 13$

$$\mid x \mid_p = \left|\frac{11}{2}\right|_{13} = 13^0 = 1 \ \textit{alors} \ -\frac{11}{2} \in \mathbb{Z}_{13}$$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} = 7.13^0 + 6.13^1 + 6.13^2 + 6.13^3 + \cdots (\textit{voir l'exemple } (1.3.15)) \\ -11 = 2.13^0 + 12.13^1 + 12.13^2 + 12.13^3 + \cdots (\textit{d'après le corollaire } (1.3.7)) \end{cases}$$

On pose $\alpha = -11 \times \dfrac{1}{2}$ *donc d'après la proposition* (1.3.8), *on trouve :*

$$\begin{cases} c_0 = 7.2 & \Longrightarrow c_0 \equiv 1[13] \\ c_1 = 1 + 2.6 + 12.7 & \Longrightarrow c_1 \equiv 6[13] \\ c_2 = 7 + 2.6 + 12.6 + 12.7 & \Longrightarrow c_2 \equiv 6[13] \\ c_3 = 13 + 2.6 + 12.6 + 12.6 + 12.7 & \Longrightarrow c_3 \equiv 6[13] \\ \vdots \end{cases}$$

Donc

$$-\frac{11}{2} = 1.13^0 + 6.\sum_{n\geq 1} 13^n$$

Et on a aussi :

$$< -\frac{11}{2} >_{13} = 1$$
$$\left[-\frac{11}{2}\right]_{13} = 6.\sum_{n\geq 1} 13^n.$$

6) *Soit* $x = \dfrac{7}{4}$ *dans* $\mathbb{Q}_5$ *on a :*

$$\begin{cases} 7 = 2.5^0 + 1.5^1 + 0.5^2 + 0.5^3 + \cdots \\ 4 = 4.5^0 + 0.5^1 + 0.5^2 + 0.5^3 + \cdots \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr|l}
 & \cdots 00012 & \cdots 00004 \\ \cline{3-3}
- & & \cdots 1111.3 \\
 & \cdots 00022 & \\ \cline{1-2}
= & \cdots 44440 & \\
- & & \\
 & \cdots 00004 & \\ \cline{1-2}
= & \cdots 44440 & \\
 & \vdots &
\end{array}$$

On a aussi :

$$< \frac{7}{4} >_5 = 3.$$
$$\left[\frac{7}{4}\right]_5 = \sum_{n\geq 1} 5^n.$$

Exemple 1.3.17

1)*On a déjà vu dans l'exemple* (1.3.14) *que :*

$$1 = -(p-1)\sum_{n\geq 0} p^n = (1-p)\sum_{n\geq 0} p^n$$

Il s'ensuit que $(1-p)$ *est inversible en tant qu'élément de* $\mathbb{Z}_p$ *et son inverse est donné par la série suivante :*

$$\frac{1}{1-p} = \sum_{n\geq 0} p^n.$$

Par exemples :

- $p = 5 : -\dfrac{1}{4} = \sum_{n\geq 0} 5^n = 1 + 5 + 5^2 + \cdots$
- $p = 7 : -\dfrac{1}{6} = \sum_{n\geq 0} 7^n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots$
- $p = 11 : -\dfrac{1}{10} = \sum_{n\geq 0} (11)^n = 1 + (11) + (11)^2 + \cdots$
- $p = 13 : -\dfrac{1}{12} = \sum_{n\geq 0} (13)^n = 1 + (13) + (13)^2 + \cdots$
- $p = 41 : -\dfrac{1}{40} = \sum_{n\geq 0} (41)^n = 1 + (41) + (41)^2 + \cdots$

- $p = 57 : -\dfrac{1}{56} = \sum_{n\geq 0}(57)^n = 1 + (57) + (57)^2 + \cdots$

2) *On remplace p par p^2, on trouve que $(1 - p^2)$ est un nombre p-adique inversible et son développement de Hensel est donné par :*

$$\frac{1}{1-p^2} = \sum_{n\geq 0} p^{2n}$$

Par exemples :

- $p = 5 : -\dfrac{1}{24} = \sum_{n\geq 0} 5^{2n} = 1 + 5^2 + 5^4 + \cdots$
- $p = 7 : -\dfrac{1}{48} = \sum_{n\geq 0} 7^{2n} = 1 + 7^2 + 7^4 + \cdots$
- $p = 11 : -\dfrac{1}{120} = \sum_{n\geq 0}(11)^{2n} = 1 + (11)^2 + (11)^4 + \cdots$
- $p = 13 : -\dfrac{1}{168} = \sum_{n\geq 0}(13)^{2n} = 1 + (13)^2 + (13)^4 + \cdots$
- $p = 41 : -\dfrac{1}{1680} = \sum_{n\geq 0}(41)^{2n} = 1 + (41)^2 + (41)^4 + \cdots$
- $p = 57 : -\dfrac{1}{3248} = \sum_{n\geq 0}(57)^{2n} = 1 + (57)^2 + (57)^4 + \cdots$

3)*Soit $x = \sum_{n\geq 0} a_n p^n$ tel que $a_0 = 2, a_{2n} = 1, a_{2n+1} = 3$ on aura donc :*

$$x = 2 + \sum_{n\geq 0} p^{2n} + \sum_{n\geq 0} 3p^{2n+1}$$

Par exemples :

- $p = 5 : x = 2 + \sum_{n\geq 0} 5^{2n} + \sum_{n\geq 0} 3.5^{2n+1} = \dfrac{4}{3}$
- $p = 7 : x = 2 + \sum_{n\geq 0} 7^{2n} + \sum_{n\geq 0} 3.7^{2n+1} = \dfrac{37}{24}$
- $p = 11 : x = 2 + \sum_{n\geq 0}(11)^{2n} + \sum_{n\geq 0} 3.(11)^{2n+1} = \dfrac{103}{60}$
- $p = 13 : x = 2 + \sum_{n\geq 0}(13)^{2n} + \sum_{n\geq 0} 3.(13)^{2n+1} = \dfrac{37}{21}$

• $p = 41 : x = 2 + \sum_{n\geq 0}(41)^{2n} + \sum_{n\geq 0} 3.(41)^{2n+1} = \frac{809}{420}$

• $p = 57 : x = 2 + \sum_{n\geq 0}(57)^{2n} + \sum_{n\geq 0} 3.(57)^{2n+1} = \frac{1538}{812}$

1.4 Propriétés analytiques des nombres p-adiques

Définition 1.4.1

1) Soit la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ dans $\mathbb{Q}_p$. On appelle la somme partielle de $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ la suite $(S_n)_n$ telle que :

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_n.$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$ si,et seulement si,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \quad (S \in \mathbb{Q}_p)$$

2) La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge absolument dans $\mathbb{Q}_p$ si,et seulement si, $\sum_{n\geqslant 0} \mid a_n \mid_p$ est converge dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.4.2 *Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$, $(a_n)_n$ est de Cauchy si,et seulement si,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mid a_{n+1} - a_n \mid_p = 0.$$

Preuve :

$\Longrightarrow$) Supposons $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq n_0 \Longrightarrow \mid a_m - a_n \mid_p < \varepsilon$$

Posons $m = n + 1$, on aura

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid a_{n+1} - a_n \mid_p < \varepsilon$$

i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \mid a_{n+1} - a_n \mid_p = 0.$$

$\Longleftarrow$) Supposons que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mid a_{n+1} - a_n \mid_p = 0.$$

C'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid a_{n+1} - a_n \mid_p < \varepsilon$$

Pour $m > n \geqslant n_0$ on a :

$$\begin{aligned} \mid a_m - a_n \mid_p &= \mid (a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \mid_p < \varepsilon \\ &\leqslant \max\{\mid (a_m - a_{m-1}) \mid_p, \mid (a_{m-1} - a_{m-2}) \mid_p, \cdots, \mid (a_{n+1} - a_n) \mid_p\} \\ &= \max\{\mid a_{k+1} - a_k \mid_p, k = \overline{1, n}\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\mid a_m - a_n \mid_p < \varepsilon$$

Alors $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy. □

Proposition 1.4.3 *La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mid a_n \mid_p$ est convergente dans $\mathbb{R}$, alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$.*

Preuve :

Si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mid a_n \mid_p$ est convergente alors est une suite de Cauchy. C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N};\ m > n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left| \sum_{i=0}^{m} \mid a_i \mid_p - \sum_{i=0}^{n} \mid a_i \mid_p \right|_p < \varepsilon$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \mid S_m - S_n \mid_p &= \left| \sum_{i=0}^{m} \mid a_i \mid_p - \sum_{i=0}^{n} \mid a_i \mid_p \right|_p \\ &= \left| \sum_{i=n+1}^{m} \mid a_i \mid_p \right|_p \\ &\leqslant \sum_{i=n+1}^{m} \mid a_i \mid_p < \varepsilon \end{aligned}$$

Alors, $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$ c'est à dire : $(S_n)_n$ est convergente
Alors la sérié $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$. □

Proposition 1.4.4 *Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$ dans $\mathbb{Q}_p$ alors :*

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N : \mid a_n \mid_p = \mid a \mid_p.$$

Preuve :

$(a_n)_n$ est convergente, donc $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid a_m - a_n \mid_p < \varepsilon.$$

D'autre part on a

$$\mid\mid a_m \mid_p - \mid a_n \mid_p\mid \leqslant \mid a_m - a_n \mid$$

$(|a_n|_p)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, alors $(|a_n|_p)_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \;\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid\mid a_n \mid_p - l\mid < \varepsilon$$

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid a_n \mid_p \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid a_n \mid_p = l > 0$,
Soit

$$\varepsilon = l/2, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1 \Rightarrow \mid a_n \mid_p > l/2 \tag{1.1}$$

En plus de note

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geqslant N_2 \Rightarrow \mid a_m - a_n \mid_p < l/2 \tag{1.2}$$

D'où pour $n, m > \max\{N_1, N_2\}$ on a

$$\begin{aligned} \mid a_m \mid_p &= \mid a_m - a_n + a_n \mid_p \\ &\leq \max\{\mid a_m - a_n \mid_p, \mid a_n \mid_p\} \\ &= \mid a_n \mid_p . \end{aligned}$$

D'après (1.1) et (1.2)
Si $n = N$ On a

$$\mid a_m \mid_p \leq \mid a_N \mid_p \quad \forall m \geq N. \tag{1.3}$$

De même

$$\begin{aligned} \mid a_n \mid_p &= \mid a_n - a_m + a_m \mid_p \\ &\leq \max\{\mid a_n - a_m \mid_p, \mid a_m \mid_p\} \\ &= \mid a_m \mid_p \end{aligned}$$

Si $n = N$ On a

$$|\ a_N\ |_p \leq |\ a_m\ |_p \quad \forall m \geq N. \tag{1.4}$$

D'où $|\ a_N\ |_p = |\ a_m\ |_p, \forall m \geq N$ à partir de (1.3) et (1.4), par passage à la limite quand $m \to +\infty$. On a

$$|\ a_N\ |_p = |\ a\ |_p = l$$

Notre autorisation

$$|\ a_N\ |_p = |\ a_{N+1}\ |_p = \cdots = |\ a\ |_p$$

D'où

$$|\ a_n\ |_p = |\ a\ |_p, \forall n \geq N. \qquad \square$$

Proposition 1.4.5 *La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$ si,et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, de plus on a*

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n\right|_p \leqslant \max_{n\geqslant 0} |\ a_n\ |_p$$

Preuve :

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente donc la suite de la somme partielle $(S_n)_n$ est de Cauchy, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} |\ S_n - S_{n-1}\ |_p = 0.$$

Et comme $a_n = S_n - S_{n-1}$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} |\ a_n\ |_p = 0$$

D'autre part : si

$$\lim_{n\to+\infty} |\ a_n\ |_p = 0$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} |\ S_n - S_{n-1}\ |_p = 0.$$

Alors $(S_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$ c'est à dire : $(S_n)_n$ est convergente ($\mathbb{Q}_p$ complet), donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente.

Pour le deuxième cas on a :

1) Si $\sum_{n \geqslant 0} a_n = 0$ l'inégalité est évident.

2) Si $\sum_{n \geqslant 0} a_n \neq 0$ donc d'après la proposition (1.4.4), on a

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N : \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right|_p = \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \right|_p$$

Et on a

$$\max\{| \, a_n \, |_p; \; 0 \leqslant n \leqslant N\} = \max_n\{| \, a_n \, |_p\}$$

Donc d'après l'inégalité triangulaire forte, on a

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n \right|_p \leq \max\{| \, a_n \, |_p; 0 \leqslant n \leqslant N\} = \max_n\{| \, a_n \, |_p\}.$$

□

Chapitre 2

Fractions continues

Dans ce chapitre, nous allons étudier les notions de base des fractions continues pour deux cas différents : le premier cas on va étudier les fractions continues dans $\mathbb{R}$ et le deuxième cas on va étudier les fractions continues dans $\mathbb{Q}_p$. Puis, on explique la convergence des fractions continues.

2.1 Fractions continues dans $\mathbb{R}$

Les définitions et les théorèmes de cette section sont pris du livre "Théorie des nombres" de Duverney [9].

Définition 2.1.1 *Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de nombres réels, avec $b_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Soient les fractions suivantes :*

$$R_0 = a_0;\ R_1 = a_0 + \frac{a_1}{b_1};\ R_2 = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}};\ R_3 = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3}}};\cdots$$

R_n s'obtient en remplaçant, dans R_{n-1}, le terme b_{n-1} par $b_{n-1} + \dfrac{a_n}{b_n}$. On aura :

$$R_n = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

À cause des divisions, certains termes de la suite $(R_n)_n$ peuvent ne pas être définis ; cependant, on supposera qu'il existe N tel que R_n existe pour tout $n \geqslant N$. La suite $(R_n)_{n\geqslant N}$ définit alors une fraction continue ; les termes R_n sont les réduites de la fraction continue. On dira que *la fraction continue est convergente si la suite $(R_n)_n$ est convergente, divergente si la suite $(R_n)_n$ est divergente. En cas de convergence, la limite R de R_n est appelée la valeur de fraction continue, et on écrira*

$$R = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \cdots}}}$$

Théorème 2.1.2 *On a pour $n \geqslant 0$: $R_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$, où les suites P_n et Q_n, définies pour $n \geqslant -1$, vérifient*

$$P_{-1} = 1; \quad Q-1 = 0; \quad P_0 = a_0; \quad Q_0 = 1;$$

$$\begin{cases} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \quad pour \quad n \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.3 *Pour tout $n \geqslant 1$, on a*

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \tag{2.2}$$

$$R_n - R_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}} \quad si\ Q_n \neq 0 \ \ et \ \ Q_{n-1} \neq 0. \tag{2.3}$$

Théorème 2.1.4 *La fraction continue $a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \cdots}}}$ est convergente si,et seulement si, la série de terme générale $\dfrac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}}$ est convergente. En cas de convergence, on a*

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \cdots}}} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}}$$

à condition que $Q_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Théorème 2.1.5 *Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$, deux suites des nombres réels non nuls. Alors les fractions continues*

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \cdots}}} \quad et \quad \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n + \cdots}}},$$

Où

$$c_{2n} = \frac{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}{a_2a_4\cdots a_{2n}}b_{2n} \text{ et } c_{2n+1} = \frac{a_2a_4\cdots a_{2n}}{a_1a_3\cdots a_{2n+1}}b_{2n+1},$$

ont les mêmes réduites (on dit qu'elles sont équivalentes). Elles ont la même nature et en cas de convergente, elles ont le même valeur.

Théorème 2.1.6 *Soit $(c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes telle que $\mid c_n \mid\geqslant 2$ pour tout $n \geqslant 1$, et telle que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mid c_nc_{n+1} \mid}$ soit convergente. Alors la fraction continue $\cfrac{1}{c_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{c_n+\cdots}}}$ est convergente.*

Définition 2.1.7 *Soit $\alpha > 0$. On a $\alpha = c_0 + b_0$, où $c_0 = [\alpha]$(partie entière réel de α) et $b_0 \in [0, 1[$. Si $b_0 \neq 0$, c'est-à-dire si α n'est pas entier, on peut écrire $b_0 = \frac{1}{\alpha_1}$, avec $\alpha_1 > 1$ puisque $b_0 < 1$. Ainsi*

$$\alpha = c_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

On recommence avec α_1 n'est pas entier, on pose $\alpha_1 = c_1 + \frac{1}{\alpha_2}$, avec $c_1 = [\alpha_1] \geqslant 1$ (puisque $\alpha_1 > 1$ et $\alpha_2 > 1$). D'où

$$\alpha = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$$

Le processus se poursuivra tant que α_n n'est pas un nombre entier. On obtiendra

$$\alpha_0 = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_{n-1} + \cfrac{1}{c_n + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}}} = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}} \tag{2.4}$$

grâce à l'algorithme

$$\alpha_n = c_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}, \quad c_n = [\alpha_n]. \tag{2.5}$$

Notation. *Le développement de α_0 donné par l'algorithme (2.5) est appelé son développement en fraction continue régulière. Il est commode de le noter*

$$c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n + \cdots}}} = [c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots]$$

Deux cas peuvent se présenter : ou bien un des α_n est un entier, auquel (2.5) s'écrit $\alpha_n = c_n = [\alpha_n]$, et (2.4) devient $c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n}}}$,

alors α_0 est évidemment un nombre rationnel, puisque tous les $c_i, i \in \mathbb{N}$ sont entiers, ou bien aucun des α_n n'est pas entier, auquel cas on pourra écrire (2.4) pour tout n. Nous allons voir que, dans ce deuxième cas α_0 est irrationnel et que la fraction continue

$$c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n + \cdots}}} \quad \text{converge vers } \alpha_0.$$

Théorème 2.1.8 (Algorithme des fractions continues) *On définit les suites $(P_n)_n$ et $(Q_n)_n$ par récurrence en posent pour tout $n \geqslant -1$:*

$$P_{-1} = 1; \quad Q_{-1} = 0; \quad P_0 = c_0; \quad Q_0 = 1;$$

$$\begin{cases} P_n = c_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = c_n Q_{n-1} + Q_{n-2}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_0 Q_{n-1} - P_{n-1} \neq 0$

$$c_n = \left[-\frac{\alpha_0 Q_{n-2} - P_{n-2}}{\alpha_0 Q_{n-1} - P_{n-1}} \right].$$

Alors pour tout $n \geqslant 0$, la réduite R_n d'ordre n de α_0 est égale à la fraction $\dfrac{P_n}{Q_n}$.

Proposition 2.1.9 *Soient $(P_n)_n$ et $(Q_n)_n$ des suites définies par les relations de récurrence(2.6). Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons*

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} \tag{2.7}$$

En particulier, pour tout $n \geqslant 0$, P_n et Q_n sont premiers entre eux.

Preuve :

Pour démontrer cette proposition, il suffit de se rappeler les définitions de P_n et Q_n :

Si $n = 1$

$$\begin{aligned} P_1Q_0 - P_0Q_1 &= (c_1P_0 + P_{-1}) - c_0(c_1Q_0 + Q{-1}) \\ &= c_1c_0 + 1 - c_0c_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

qui est bien égal $(-1)^{1-1}$. La relation est vraie pour $n = 1$.
Supposons maintenant la relation vérifie pour $n - 1$ c'est à dire

$$P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1} = (-1)^{n-2}$$

et montrons qu'elle est aussi pour n

$$\begin{aligned} P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n &= (c_nP_{n-1} + P_{n-2})Q_{n-1} - P_{n-1}(c_nQ_{n-1} + Q_{n-2}) \\ &= P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2} \\ &= -(-1)^{n-2} \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

Alors la relation est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
Soit $n \geqslant 1$ et soit $d \geqslant 1$ un diviseur commun de P_n et Q_n. Alors d divise $(-1)^{n-1}$, donc $d = 1$.
Donc P_n et Q_n sont premier entre eux. □

Lemme 2.1.10 *Soit $(a_i)_i \in \mathbb{Q}_+^*$, pour $k \geq 1$, on a :*

$$\frac{Q_{k-1}}{Q_k} = [0; a_k, \cdots, a_1]$$

Preuve :
On démontre par récurrence
on a $Q_k = a_kQ_{k-1} + Q_{k-2}$
pour $k = 1$,

$$Q_0 = 1 \text{ et } Q_1 = a_1 \quad \text{donc} \quad \frac{Q_0}{Q_1} = \frac{1}{a_1} = [0; a_1].$$

pour $k = 2$,

$$Q_2 = a_1a_2 + 1 \quad \text{donc} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a_1}{a_1a_2 + 1} = \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1}} = [0; a_2, a_1].$$

Supposons que la relation est vraie pour k i.e. $\frac{Q_{k-1}}{Q_k} = [0; a_k, \cdots, a_1]$ et montrons pour $k + 1$,

$$Q_{k+1} = a_{k+1}Q_k + Q_{k-1}$$

donc

$$\frac{Q_k}{Q_{k+1}} = \frac{Q_k}{a_{k+1}Q_k + Q_{k-1}} = \frac{1}{a_{k+1} + \dfrac{Q_{k-1}}{Q_k}}$$
$$= \frac{1}{a_{k+1} + [0; a_k, \cdots, a_1]} = [0; a_{k+1}, \cdots, a_1]$$

□

Lemme 2.1.11 *Soit $a = [0, a_1, a_2, \cdots]$ et $b = [0, a_1, a_2, \cdots]$ sont des nombres réels. Supposons que pour certains entiers positifs m, si on a $a_i = b_i, \forall i = \overline{1, m}$ alors*

$$|a - b| < Q_m^{-2}$$

Preuve :
On a $[0, a_1, a_2, \cdots, a_m] = \dfrac{P_m}{Q_m}$ converge vers a et b, les nombres réels $a - \dfrac{P_m}{Q_m}$ et $b - \dfrac{P_m}{Q_m}$ avoir le même signe et sont les deux en valeur absolue inférieur à Q_m^{-2} □

Définition 2.1.12 *Une fraction continue infinie $[c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots]$ est dite périodique s'il existe un entier $l > 0$ et un entier $k > 0$ tel que :*

$$c_{k'} = c_{k'+l}$$

Pour tout $k' = k$, si on pose $n = l + k$, la fraction s'écrit :

$$[c_0, c_1, \cdots, c_k, c_{k+1}, \cdots, c_n, c_{k+1}, \cdots]$$

On note cette fraction :

$$[c_0, c_1, \cdots, c_k, \overline{c_{k+1}, \cdots, c_n}]$$

La longueur de la période est $n - k = l$.

Définition 2.1.13 *Un nombre α est dit irrationnel quadratique s'il est racine d'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ à coefficients entiers a,b et c.*

On donne ici l'énoncé des théorèmes célèbres dans le cas réel, qui caractérisent les fractions continues d'un nombre rationnel et d'un nombre quadratique :

Théorème 2.1.14 *Le développement en fraction continue est fini si,et seulement si,* α_0 *est un nombre rationnel.*

Théorème 2.1.15 (Lagrange) *Un nombre réel a un développement en fraction continue ultimement périodique si,et seulement si, il s'agit d'un nombre quadratique irrationnel.*

Remarque 2.1.16 *Nous voyons une première différence avec le développement décimal. Le développement décimal d'un nombre rationnel est fini ou périodique. Le développement en fraction continue d'un nombre rationnel est toujours fini. Une deuxième différence réside dans le fait que le développement décimal n'est pas toujours unique, alors que le développement en fraction continue est unique.*

Exemple 2.1.17

Voici quelque exemples numériques :

1) Soit $\alpha = \dfrac{37}{13}$ *:*

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{11}{13} = 2 + \frac{1}{\alpha_1} \text{ tel que } \alpha_0 = [\alpha] = 2$$

$$\text{avec} \quad \alpha_1 = \frac{13}{11} = 1 + \frac{2}{11} = 1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\text{avec} \quad \alpha_2 = \frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{\alpha_3} \quad \text{avec } \alpha_3 = 2$$

α_3 *est un entier, le processus s'arrête, donc le développement en fraction continue s'écrit sous la forme :*

$$\frac{37}{13} = [2, 1, 5, 2].$$

2) Soit $\alpha = -\dfrac{4}{15}$ *:*

$$-\frac{4}{15} = -1 + \frac{11}{15} = -1 + \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{tel} \quad \text{que} \quad \alpha_0 = [\alpha] = -1$$

$$\text{avec } \alpha_1 = \frac{15}{11} = 1 + \frac{4}{11} = 1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\text{avec } \alpha_2 = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2 + \frac{1}{\alpha_3}$$

$$\text{avec } \alpha_3 = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_4} \quad \text{avec} \quad \alpha_4 = 3.$$

Donc le développement en fraction continue s'écrit soue la forme :

$$-\frac{4}{15} = -1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}.$$

3) Soit $\alpha = \sqrt{2}$:

$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$ *tel que* $\alpha_0 = [\alpha] = 1$

avec $\alpha_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\alpha_2}$

avec $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\alpha_3}$

avec $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\alpha_4}$.

Donc nous calculons de la même manière on obtient :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}.$$

4) Soit $\alpha = \sqrt{7}$ *:*

$\sqrt{7} = 2 + (\sqrt{7} - 2) = 2 + \frac{1}{\alpha_1}$ *tel que* $\alpha_0 = [\alpha] = 2$

avec $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = 1 + \frac{\sqrt{7} - 1}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_2}$

avec $\alpha_2 = \frac{3}{\sqrt{7} - 1} = 1 + \frac{\sqrt{7} - 1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_3}$

avec $\alpha_3 = \frac{2}{\sqrt{7} - 1} = 1 + \frac{\sqrt{7} - 2}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_4}$

avec $\alpha_4 = \frac{3}{\sqrt{7} - 2} = 4 + (\sqrt{7} - 2) = 4 + \frac{1}{\alpha_5}$

avec $\alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = 1 + \frac{\sqrt{7} - 1}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_6}$

avec $\alpha_6 = \frac{3}{\sqrt{7} - 1} = 1 + \frac{\sqrt{7} - 1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_7}$

avec $\alpha_7 = \dfrac{2}{\sqrt{7}-1} = 1 + \dfrac{\sqrt{7}-2}{3} = 1 + \dfrac{1}{\alpha_8}$

avec $\alpha_8 = \dfrac{3}{\sqrt{7}-2} = 4 + (\sqrt{7}-2) = 4 + \dfrac{1}{\alpha_9}.$

Donc le développement en fraction continue de $\sqrt{7}$ *est périodique de période* 4 *à partir du rang* 1.
Ainsi

$$\sqrt{7} = [2, \overline{1,1,1,4}].$$

5) *Pour évaluer les fractions* $[1,2,1,2,1,2]$ *ci dessus on utilise le tableau suivant (qui ressemble à ce de l'algorithme des fractions continues)*

c_i		1	2	1	2	1	2
P_i	1	1	3	4	11	15	4
Q_i	0	1	2	3	8	11	30

Donc on a $[1,2,1,2,1,2] = \dfrac{41}{30}$ *et ses réduites sont* $1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{11}{8}, \dfrac{15}{11}, \dfrac{41}{30}$.
C'est à dire

$$1 = \frac{1}{1}; \qquad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = \frac{4}{3}; \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{11}{8};$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{15}{11}; \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{41}{30}.$$

2.2 Fractions continues dans $\mathbb{Q}_p$

Dans cette section, on a présenté deux définitions non-équivalentes des fractions continues dans $\mathbb{Q}_p$: la définition de Schneider et la définition de Ruban (modifie par Browkin), avec leurs algorithmes.

Définition 2.2.1 (Schneider) *Soit* p *un nombre premier impair. La fraction continue de Schneider (on l'abrégé FCS) d'un entier* p*-adique* x*, est définie par :*

$$x = a_0 + \cfrac{p^{\alpha_0}}{a_1 + \cfrac{p^{\alpha_1}}{\ddots + \cfrac{}{a_n + \cfrac{p^{\alpha_n}}{\cdots}}}}$$

Pour calculer ces fractions on suit les étapes suivante :

1) *On met* $x = x_0$ *et* $x_{n+1} = \dfrac{p^{\alpha_n}}{x_n - a_n}$
2) *On choisit* $a_0 \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ *et* $a_n \in \{1, 2, \cdots, p-1\}, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$
   alors $\alpha_n = v_p(x_n - a_n)$ *tel que* $\alpha_0 \geqslant 0$ *et* $\alpha_n > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \geqslant 0$ *tant que* $x_n \neq a_n$*, on continue la procédure. Sinon, la fraction continue s'arrête au terme* $\dfrac{p^{\alpha_{n-1}}}{a_n}$.

L'algorithme suivant explique le calcule des fractions continues de Schneider :

Algorithme 2.2.2

- ***étape 0 :*** *On pose* $x = x_0$
  - ***étape 0' :*** *On choisit* $a_0 \in \{0, \cdots, p-1\}$ *tel que* $v_p(x_0 - a_0) \geq 0$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_0 = v_p(x_0 - a_0)$.

- ***étape 1 :*** *On pose* $x_1 = \dfrac{p^{\alpha_0}}{x_0 - a_0}$ *donc* $x = a_0 + \dfrac{p^{\alpha_0}}{x_1}$.
  - ***étape 1' :*** *On choisit* $a_1 \in \{1, \cdots, p-1\}$ *tel que* $v_p(x_1 - a_1) > 0$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_1 = v_p(x_1 - a_1)$.

- ***étape 2 :*** *On pose* $x_2 = \dfrac{p^{\alpha_1}}{x_1 - a_1}$ *donc* $x = a_0 + \cfrac{p^{\alpha_0}}{a_1 + \cfrac{p^{\alpha_1}}{x_2}}$.
  - ***étape 2' :*** *On choisit* $a_2 \in \{1, \cdots, p-1\}$ *tel que* $v_p(x_2 - a_2) > 0$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_2 = v_p(x_2 - a_2)$.

$$\vdots$$

- ***étape n :*** *On pose* $x_n = \dfrac{p^{\alpha_{n-1}}}{x_{n-1} - a_{n-1}}$ *donc* $x = a_0 + \cfrac{p^{\alpha_0}}{a_1 + \cfrac{p^{\alpha_1}}{\ddots + \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{p^{\alpha_{n-1}}}{x_n}}}}$.
  - ***étape n' :*** *On choisit* $a_n \in \{1, \cdots, p-1\}$ *tel que* $v_p(x_n - a_n) > 0$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_n = v_p(x_n - a_n)$.

etc,$\cdots$

$$x = a_0 + \cfrac{p^{\alpha_0}}{a_1 + \cfrac{p^{\alpha_1}}{\ddots + \cfrac{}{a_n + \cfrac{p^{\alpha_n}}{\cdots}}}}.$$

Dans l'exemple suivant on va calculer le développement en FCS de -1 dans $\mathbb{Q}_3$ puis, on donne son développement dans $\mathbb{Q}_p$

Exemple 2.2.3

- ***étape 0 :*** *On pose* $x_0 = -1$
  - ***étape 0' :*** *On choisit* $a_0 = 2$ *tel que* $v_3(-3) = 1 \geq 0$ *car*

$$-3 = 2.3 + 2.3^2 + \cdots$$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_0 = v_3(-3) = 1$*.*

- ***étape 1 :*** *On pose* $x_1 = \dfrac{3}{-1-2} = -1$ *donc* $-1 = 2 + \dfrac{3}{-1}$.
  - ***étape 1' :*** *On choisit* $a_1 = 2$ *tel que* $v_3(-3) = 1 > 0$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_1 = v_3(-3) = 1$*.*

- ***étape 2 :*** *On pose* $x_2 = \dfrac{3}{-1-2} = -1$ *donc* $-1 = 2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{-1}}$.
  - ***étape 2' :*** *On choisit* $a_2 = 2$ *tel que* $v_3(-3) = 1 > 0$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_2 = v_3(-3) = 1$*.*

$$\vdots$$

- ***étape n :*** *On pose* $x_n = \dfrac{3}{-1-2} = -1$ *donc* $-1 = 2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{\ddots + \cfrac{}{2 + \cfrac{3}{-1}}}}$.
  - ***étape n' :*** *On choisit* $a_n = 2$ *tel que* $v_3(-3) = 1 > 0$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_n = v_3(-3) = 1$*.*

etc,$\cdots$

$$-1 = 2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{\ddots + \cfrac{}{2 + \cfrac{3}{2 + \cdots}}}}.$$

Corollaire 2.2.4 *Le développement de Schneider de $x = -1$ dans $\mathbb{Q}_p$ $(p > 2)$ s'écrit sous la forme :*

$$-1 = (p-1) + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{\ddots + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{\cdots}}}}}$$

Preuve :

Nous prouvons l'égalité suivante qui est évidemment équivalente à l'assertion :

$$x = 0 = p + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{\ddots + \cfrac{p}{(p-1) + \cfrac{p}{\cdots}}}}} \quad \text{dans } \mathbb{Q}_p \ p > 2.$$

On prend : $a_0 = p$ et $a_n = (p-1)$ $\forall n \geqslant 1$

alors

$$\begin{gathered} P_{-1} = 1,\ P_0 = p \\ P_1 = (p-1)p + p = p^2 \\ P_2 = (p-1)p^2 + p^2 = p^3 \\ \vdots \\ P_n = p^{n+1}\ n \geqslant 0 \end{gathered}$$

D'autre part, comme $|Q_n|_p = 1$ pour $n \geqslant 0$

donc

$$|x|_p = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{P_n}{Q_n} \right|_p = \lim_{n \to +\infty} p^{-(n+1)} = 0.$$

Alors $y = 0$. □

Exemple 2.2.5

Soit $x = -\dfrac{11}{2}$ dans $\mathbb{Q}_{13}$, on a :

- ***<u>étape 0 :</u>*** *On pose $x_0 = -\dfrac{11}{2}$*
  - ***<u>étape 0' :</u>*** *On choisit $a_0 = 1$ tel que $v_{13}(-\dfrac{13}{2}) = 1 \geq 0$ car*

$$-\frac{13}{2} = 6.13 + 6.13^2 + \cdots$$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_0 = v_{13}(-\frac{13}{2}) = 1$.

• ***étape 1 :*** *On pose* $x_1 = \dfrac{13}{-\frac{11}{2} - 1} = -2$ *donc* $-\frac{11}{2} = 1 + \frac{13}{-2}$.

  • ***étape 1' :*** *On choisit* $a_1 = 11$ *tel que* $v_{13}(-13) = 1 > 0$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_1 = v_{13}(-13) = 1$.

• ***étape 2 :*** *On pose* $x_2 = \dfrac{13}{-2 - 11} = -1$ *donc* $-\dfrac{11}{2} = 1 + \dfrac{13}{11 + \frac{13}{-1}}$.

  • ***étape 2' :*** *On choisit* $a_2 = 12$ *tel que* $v_{13}(-13) = 1 > 0$

dans cette étape, on retrouve $\alpha_2 = v_{13}(-13) = 1$.

• ***étape3 :*** *On pose* $x_2 = \dfrac{13}{-1 - 12} = -1$ *donc,*

$$-\frac{11}{2} = 1 + \cfrac{13}{11 + \cfrac{13}{12 + \cfrac{13}{-1}}}.$$

$$\vdots$$

Ruban a proposé une autre définition des fractions continues p-adiques. Cette définition consiste à donner le développement d'un nombre dans $\mathbb{Q}_p$ pas seulement dans $\mathbb{Z}$

Définition 2.2.6 (Ruban) *Soit p un nombre premier impair. On appelle fraction continue de Ruban (on l'abrégé FCR) d'un nombre p-adique x, la fraction construite de la manière suivante :*

1) On met $x = x_0$ *et* $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n}$

2) On choisit $a_n \in \mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{p}\right] \cap]0, p[\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, *tel que* $v_p(a_0) \geq 0$ *et* $v_p(a_n) > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

3) $a_n =< x_n >_p \ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \geq 0$ tant que $x_n \neq a_n$, la fraction continue de Ruban s'écrit sous la forme :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Si $x_n = a_n$ alors la fraction continue se termine par $\dfrac{1}{a_n}$.

On explique la fraction continue de Ruban avec précision dans l'algorithme suivant :

Algorithme 2.2.7

• ***étape 0 :*** *On pose* $x = x_0$*, avec le développement de Hensel* $x = \sum_{n\geq n_0} y_n p^n$

• ***étape 0' :*** *On choisit* $a_0 =< x_0 >_p= \frac{y_{n_0}}{p^{n_0}} + \frac{y_{n_0+1}}{p^{n_0+1}} + \cdots + y_0$

•***étape 0" :*** *Si* $< x_0 >_p= x_0$ *telle que* $[x_0]_p = 0$*, alors s'arrête, cela signifie que le développement de Hensel de x est fini et aussi un nombre rationnel. Sinon on passe à l'étape suivant.*

• ***étape 1 :*** *On pose* $x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}$ *donc* $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$.

• ***étape 1' :*** *On choisit* $a_1 =< x_1 >_p$

•***étape 1" :*** *Si* $< x_1 >_p= x_1$ *telle que* $[x_1]_p = 0$*, alors s'arrête, cela signifie que le développement de Hensel de x est fini et aussi un nombre rationnel. Sinon on passe à l'étape suivant.*

$$\vdots$$

• ***étape n :*** *On pose* $x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}}$ *donc* $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}$.

• ***étape n' :*** *On choisit* $a_n =< x_n >_p$.

•***étape n" :*** *Si* $< x_n >_p= x_n$ *telle que* $[x_n]_p = 0$*, alors s'arrête, cela signifie que le développement de Hensel de x est fini et aussi un nombre rationnel. Sinon on passe à l'étape suivant.*

etc,$\cdots$

Voici quelques exemples, pour ce type de fraction :

Exemple 2.2.8

Soit $x = -1$, $p = 3$*, en utilisant l'algorithme de Ruban, on a :*

• ***étape 0 :*** *On pose* $x_0 = -1$*, avec le développement de Hensel*

$$-1 = 2 + 2.3 + 2.3^2 + \cdots$$

• ***étape 0' :*** *On choisit* $a_0 =< -1 >_3= 2$ *et* $[-1]_3 = 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + \cdots$

• ***étape 1 :*** *On pose* $x_1 = -\frac{1}{3}$*, avec le développement de Henssel*

$$-\frac{1}{3} = 2.3^{-1} + 2 + 2.3 + 2.3^2 + \cdots,\ donc\ -1 = 2 + \cfrac{1}{-\cfrac{1}{3}}.$$

- ***étape 1' :*** *On choisit* $a_1 =< -\frac{1}{3} >_3 = \frac{8}{3}$ *et* $\left[-\frac{1}{3}\right]_3 = 2.3 + 2.3^2 + \cdots$

- ***étape 2 :*** *On pose* $x_2 = -\frac{1}{3}$, *avec le développement de Henssel*

$$-\frac{1}{3} = 2.3^{-1} + 2 + 2.3 + 2.3^2 + \cdots,\ donc\ -1 = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{8}{3} + \cfrac{1}{-\cfrac{1}{3}}}.$$

- ***étape 2' :*** *On choisit* $a_2 =< -\frac{1}{3} >_3 = \frac{8}{3}$ *et* $\left[-\frac{1}{3}\right]_3 = 2.3 + 2.3^2 + \cdots$

$$\vdots$$

- ***étape n :*** *On pose* $x_n = -\frac{1}{3}$, *avec le développement de Henssel*

$$-\frac{1}{3} = 2.3^{-1} + 2 + 2.3 + 2.3^2 + \cdots,\ donc\ -1 = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{8}{3} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\cfrac{8}{3} + \cfrac{1}{-\cfrac{1}{3}}}}}.$$

- ***étape n' :*** *On choisit* $a_n =< -\frac{1}{3} >_3$ *et* $\left[-\frac{1}{3}\right]_3 = 2.3 + 2.3^2 + \cdots$

etc, $\cdots$

$$-1 = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{8}{3} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\cfrac{8}{3} + \cdots}}}.$$

Corollaire 2.2.9 *Le développement de Ruban de* $x = -1$ *dans* $\mathbb{Q}_p$ $(p > 2)$ *s'écrit sous la forme :*

$$-1 = (p-1) + \cfrac{1}{\cfrac{(p^2-1)}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(p^2-1)}{p} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\cfrac{(p^2-1)}{p} + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

Exemple 2.2.10
Soit $x = -\dfrac{11}{2}, p = 13$, *en utilisant l'algorithme de Ruban, on a :*

• ***étape 0 :*** *On pose* $x_0 = -\dfrac{11}{2}$, *avec le développement de Hensel*

$$-\frac{11}{2} = 1 + 6.13^1 + 6.13^2 + \cdots$$

  • ***étape 0' :*** *On choisit* $a_0 =< -\dfrac{11}{2} >_{13}= 1$ *et* $\left[-\dfrac{11}{2}\right]_{13} = 6.13 + 6.13^2 + 6.13^3 + \cdots$

• ***étape 1 :*** *On pose* $x_1 = -\dfrac{2}{13}$, *avec le développement de Henssel*

$-\dfrac{2}{13} = 1.13^{-1} + 2 + 2.13 + 2.13^2 + \cdots$, *donc* $-\dfrac{11}{2} = 1 + \dfrac{1}{-\dfrac{2}{13}}$.

  • ***étape 1' :*** *On choisit* $a_1 =< -\dfrac{2}{13} >_{13}= \dfrac{27}{13}$ *et* $\left[-\dfrac{2}{13}\right]_{13} = 2.13 + 2.13^2 + \cdots$

• ***étape 2 :*** *On pose* $x_2 = -\dfrac{13}{29}$ *donc,*

$$-\frac{11}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{27}{13} + \cfrac{1}{-\cfrac{13}{29}}}.$$

$$\vdots$$

Browkin a modifie la définition de Ruban, a utilisé un autre développement similaire au développement de Hensel c'est le suivant :

Définition 2.2.11 *Soit p un nombre premier et* $\mathcal{F} = \{0, \pm 1, \cdots, \pm\dfrac{p-1}{2}\} \subset \mathbb{Z}$. *Tout* $x \in \mathbb{Q}_p$ *admet un développement unique donné par la formule suivants :*

$$x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathcal{F}$ *pour* $n \geq n_0$ *et* $a_{n_0} \neq 0$ *alors* $v_p(x) = n_0$.
Nous définissons la partie fractionnaire par l'application suivante :

$$\begin{aligned} S : \mathbb{Q} &\longrightarrow \quad \mathbb{Q}_p \\ x &\longmapsto \sum_{n \geq n_0}^{0} a_n p^n \end{aligned}$$

On la note $S(x) =< x >_p$ *alors* $S(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{p}\right] \cap \left]-\dfrac{p}{2}, \dfrac{p}{2}\right[$,
c'est à dire $< x >_p \in \mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{p}\right] \cap \left]-\dfrac{p}{2}, \dfrac{p}{2}\right[$.

Définition 2.2.12 (Browkin) *On définit la fraction continue de Browkin (on l'abrégé FCB) par la méthode de Ruban, sauf que la condition sur les a_n est :*

$$a_n \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \cap \left]-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right[\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exemples 2.2.13

1) $\sqrt{6} = \left[1; -\frac{8}{5}, \left\{\frac{6}{5}, || \frac{7}{5}, -\frac{16}{25}, \frac{7}{5}\right\}\right].$

2) $\sqrt{21} = \left[1; \frac{3}{5}, \left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, || -\frac{7}{5}, \frac{26}{25}, -\frac{7}{5}\right\}\right].$

3) $\sqrt{24} = \left[2; -\frac{4}{5}, \left\{\frac{12}{5}, || -\frac{9}{5}\right\}\right].$

4) $\sqrt{34} = \left[2; \frac{4}{5}, \left\{\frac{2}{5}, -\frac{28}{25}, \frac{2}{5}, || -\frac{1}{5}, \frac{56}{25}, -\frac{1}{5}\right\}\right].$

Remarque 2.2.14

Les propriétés des fractions continue dans $\mathbb{R}$ *restent valables dans* $\mathbb{Q}_p$.(*Comme le lemme* (2.1.10) $\cdots$)

2.3 Convergences des fractions continues

2.3.1 Convergence dans $\mathbb{R}$

Lemme 2.3.1 *Soit* $a = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P_n}{Q_n}$, *alors*

$$\left| a - \frac{P_k}{Q_k} \right| \leq Q_k^{-2} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_k}{Q_k} \right| &= \left| \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_i Q_{i-1}} - \frac{P_0}{Q_0} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_i Q_{i-1}} \right| \\ &= \left| \sum_{i=k+1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_i Q_{i-1}} \right|\end{aligned}$$

On passe a la limite

$$\left| a - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \left| \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_i Q_{i-1}} \right|$$

on a $\sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{i-1}}{Q_i Q_{i-1}}$ converge vers $\dfrac{(-1)^{k-1}}{Q_k Q_{k+1}}$ alors,

$$\left| a - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \left| \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k Q_{k+1}} \right| = \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} < Q_k^{-2}$$ □

Définition 2.3.2 *Soit* $a_i = \dfrac{b_i}{c_i}$ *avec* $b_i \in \mathbb{Z}^*$ *et* $c_i \in \mathbb{N}^*$, *on définit des nouveaux réduites par :*

$$P'_n = \left(\prod_{j=0}^{j=n} c_j \right) P_n \text{ et } Q'_n = \left(\prod_{j=0}^{j=n} c_j \right) Q_n$$

Lemme 2.3.3 *Les suites des réduites vérifient :*

$$P'_n \text{ et } Q'_n \in \mathbb{Z}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Preuve :

On démontre par récurrence

$P'_n \in \mathbb{Z}^*$:

Pour $n = 0$,

$$P'_0 = c_0 P_0 = c_0 a_0 = b_0 \in \mathbb{Z}$$

Pour $n = 1$,

$$P'_1 = c_0 c_1 P_1 = c_0 c_1 (a_1 P_0 + P_{-1}) = b_0 b_1 + c_0 c_1 \in \mathbb{Z}^*$$

Supposons que la relation est vraie pour n et montrons pour n+1

$$\begin{aligned}
P'_{n+1} = \left(\prod_{j=0}^{j=n+1} c_j\right) P_{n+1} &= \left(\prod_{j=0}^{j=n+1} c_j\right)(a_{n+1}P_n + P_{n-1}) \\
&= \left(\prod_{j=0}^{j=n+1} c_j\right) a_{n+1}P_n + \left(\prod_{j=0}^{j=n+1} c_j\right) P_{n-1} \\
&= \left(\prod_{j=0}^{j=n} c_j\right) b_{n+1}P_n + \left(\prod_{j=0}^{j=n+1} c_j\right) P_{n-1} \quad \in \mathbb{Z}^* \\
&(car, \quad P_n,\ P_{n-1}\ \in \mathbb{Z}^*\ par\ hypoth\grave{e}se\ et \left(\prod_{j=0}^{j=n} c_j\right), b_{n+1} \in \mathbb{Z}^*).
\end{aligned}$$

$Q'_n \in \mathbb{Z}^*$:

Pour $n = 0$,

$$Q'_0 = c_0 Q_0 = c_0 \in \mathbb{Z}^*$$

Pour $n = 1$,

$$Q'_1 = c_0 c_1 Q_1 = c_0 c_1 (a_1 Q_0 + Q_{-1}) = c_0 c_1 a_1 = c_0 b_1 \in \mathbb{Z}^*$$

Supposons que la relation est vraie pour n et montrons pour n+1

$$\begin{aligned}
Q'_{n+1} = \left(\prod_{j=0}^{j=n+1} c_j\right) Q_{n+1} &= \left(\prod_{j=0}^{j=n+1} c_j\right)(a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}) \\
&= \left(\prod_{j=0}^{j=n+1} c_j\right) a_{n+1}Q_n + \left(\prod_{j=0}^{j=n+1} c_j\right) Q_{n-1} \\
&= \left(\prod_{j=0}^{j=n} c_j\right) b_{n+1}Q_n + \left(\prod_{j=0}^{j=n+1} c_j\right) Q_{n-1} \quad \in \mathbb{Z}^* \\
&(car, \quad Q_n,\ Q_{n-1}\ \in \mathbb{Z}^*\ par\ hypoth\grave{e}se\ et \left(\prod_{j=0}^{j=n} c_j\right), b_{n+1} \in \mathbb{Z}^*).
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.4 *On Suppose que* $a_i \in \mathbb{Q}_+^*$ *et que l'ensemble* $\{a_i; i \in \mathbb{N}\}$ *est bornée. Soit* $\Xi = Max\{a_i; i \in \mathbb{N}\}$*, alors*

$$Q_n \leqslant \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^n \quad et \quad P_n \leqslant \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^{n+1}$$

Preuve :

On démontre par récurrence l'inégalité de Q_n :

Pour $n = 0$: C'est évident.

Pour $n = 1$:

$$Q_1 = a_1 Q_0 + Q_{-1} = a_1 \leqslant \Xi \leqslant \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)$$

Supposons que la relation est vrai pour n, i.e.

$$Q_n \leqslant \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^n$$

et montrons pour $n + 1$

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= a_{n+1} Q_n + Q_{n-1} \\ &\leqslant \Xi \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^n + \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^{n-1} \\ &\leqslant \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^{n+1} \left[\frac{2\Xi}{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}} + \frac{4}{(\Xi + \sqrt{\Xi^2+4})^2}\right] \\ &= \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Par le même procédure on démontre par récurrence l'inégalité de P_n :

Pour $n = 0$:

$$P_0 = a_0 \leqslant \Xi \leqslant \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)$$

Pour $n = 1$:

$$P_1 = a_1 a_0 \leqslant \Xi^2 \leqslant \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^2$$

Supposons que la relation est vraie pour n, i.e.

$$P_n \leqslant \left(\frac{\Xi+\sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^{n+1}$$

et montrons pour $n+1$

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= a_{n+1}P_n + P_{n-1} \\
&\leqslant \Xi\left(\frac{\Xi+\sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{\Xi+\sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^{n} \\
&\leqslant \left(\frac{\Xi+\sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^{n}\left[\Xi\left(\frac{\Xi+\sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)+1\right]
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{gathered}
\Xi\left(\frac{\Xi+\sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)+1 \leqslant \left(\frac{\Xi+\sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^{2} \\
2\Xi^2+2\Xi\sqrt{\Xi^2+4}+4 \leqslant 2\Xi^2+4+2\Xi\sqrt{\Xi^2+4} \\
0 \leqslant 0
\end{gathered}$$

l'inégalité est vérifié pour $n+1$ donc

$$P_n \leqslant \left(\frac{\Xi+\sqrt{\Xi^2+4}}{2}\right)^{n+1}$$

□

Lemme 2.3.5 *Soit* $\xi = min\{a_i,\ i\in\mathbb{N}\}$ *alors*

1) Si $\xi > 1$: $Q_n \geq \xi^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

2) Si $0 < \xi \leq 1$: $Q_n \geq \xi\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+4}}{2}\right)^{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Preuve :

1) Si $\xi > 1$, on démontre par récurrence l'inégalité :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ Q_n \geq \xi^n$$

□

pour $n=0$: $Q_0 = 1 = \xi^0$.

pour $n=1$: $Q_1 = a_1 \geq \xi^1$.

Supposons que la relation est vraie pour n i.e, $Q_n \geq \xi^n$

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} &= a_{n+1}Q_n + Q_{n-1} \\
&\geq \xi.\xi^n + \xi^{n-1} \\
&= \xi^{n+1} + \xi^{n-1} \\
&\geq \xi^{n+1}
\end{aligned}$$

2) Si $0 < \xi \leq 1$
pour $n = 0$: $Q_0 = 1 \geq \dfrac{2\xi}{\xi + \sqrt{\xi^2+4}}$.
pour $n = 1$: $Q_1 = a_1 \geq \xi$.
Supposons que la relation est vraie pour n i.e, $Q_n \geq \xi \left(\dfrac{\xi + \sqrt{\xi^2+4}}{2}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} &= a_{n+1}Q_n + Q_{n-1} \\
&\geq \xi^2 \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+4}}{2}\right)^{n-1} + \xi \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+4}}{2}\right)^{n-2} \\
&\geq \xi \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+4}}{2}\right)^{n} \left[\frac{2\xi}{\xi + \sqrt{\xi^2+4}} + \frac{4}{\left(\xi + \sqrt{\xi^2+4}\right)^2}\right] \\
&= \xi \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+4}}{2}\right)^{n} \left[\frac{2\xi^2 + 2\xi\sqrt{\xi^2+4} + 4}{\left(\xi + \sqrt{\xi^2+4}\right)^2}\right] \\
&= \xi \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+4}}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Lemme 2.3.6 *Soit $Q_{i,j}$ le dénominateur du nombre rationnel $[0; a_i, \cdots, a_j]$, avec $a_{2k} \in \mathbb{Q}$ et $a_{2k+1} \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\forall m \geq 2 : Q_{1,m} \leq \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) Q_{1,j}Q_{j+1,m} \quad \forall j = 1, \cdots, m-1.$$

Preuve :

On démontre ce lemme par récurrence,

Pour $m = 2$,

$$\xi \leq a_1a_2$$

ainsi

$$a_1a_2 + 1 \leq \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) a_1a_2$$

Pour $m = 3$,

$$\xi \leq a_1a_2$$

puis

$$a_3\xi \leq a_1a_2a_3 + a_1$$

où

$$a_1a_2a_3 + a_1 + a_3 \leq \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)(a_1a_2a_3 + a_1)$$

ainsi

$$Q_{1,3} \leq \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) Q_{1,1}Q_{2,3}$$

□

même pour $j = 2$.

Suppose que l'inégalité est vrai pour m, i.e,

$$\begin{aligned}
Q_{1,m+1} &= a_{m+1}Q_{1,m} + Q_{1,m-1} \\
&\leq a_{m+1}\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) Q_{1,j}Q_{j+1,m} + \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) Q_{1,j}Q_{j+1,m-1} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) Q_{1,j}[a_{m+1}Q_{j+1,m} + Q_{j+1,m-1}] \\
&= \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) Q_{1,j}Q_{j+1,m+1}
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.7 *Soit la série* $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q_i} - \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}\right)$, *d'après la relation* (2.9)*on a :*

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

Proposition 2.3.8 *Soit* $(a_n)_n \in \mathbb{Q}_+^*$ *on a :*

$$\frac{P_n}{Q_n} = [0; a_1, a_2, \cdots, a_n] \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} a \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

Montrons que $S_n = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$

Soit $U_n = \dfrac{1}{Q_nQ_{n-1}}$,

• On a Q_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$ car : $a_n \in \mathbb{Q}^+, \forall n \in \mathbb{N}$, alors

$U_n \geq 0 \quad \forall n$

• La suite $(U_n)_n$ est décroissante car : Q_n est croissante $\forall n$.

• Q_n est bornée (d'après le lemme (2.3.5)) alors U_n est bornée.

d'où S_n est convergente. □

2.3.2 Convergence dans $\mathbb{Q}_p$

Définition 2.3.9 *Soit p un nombre premier impair, et $y \in \mathbb{Q}_p$. définit par son fraction continue de Schneider*

$$y = a_0 + \cfrac{p}{a_1 + \cfrac{p}{a_2 + \cfrac{p}{\ddots + \cfrac{}{a_n + \cfrac{p}{\cdots}}}}}$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$y = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{}{c_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}} \tag{2.8}$$

Où $c_{2n} = a_{2n}$ et $c_{2n+1} = \dfrac{a_{2n+1}}{p}$ pour $n \geqslant 0$ telle que les deux fractions sont équivalente, c'est à dire qu'elles ont les mêmes réduites, et la même nature et même valeur de convergence.

Remarque 2.3.10 *La fraction continue de Schneider* (2.8) *vérifie les relations suivantes :*

$$1)\ \begin{cases} \text{Pour tout } n \geqslant -1 : P_{-1} = 1;\ Q_{-1} = 0;\ P_0 = c_0;\ Q_0 = 1 \\ \text{Pour tout } n \geqslant 1 : \begin{cases} P_n = c_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = c_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \end{cases}$$

Pour $n \geqslant 1$:

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} \tag{2.9}$$

On donne ici deux critères de convergence pour les FCS, FCR et FCB :

Théorème 2.3.11 *Si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :*

$$v_p(c_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \tag{2.10}$$

Alors la suite des réduites $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite dans $\mathbb{Q}_p$.

Théorème 2.3.12 *Si la suite des quotients partiels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait*

$$v_p(a_k) \leqslant -1, \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

Alors la suites des réduites $([a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k])_{k\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{Q}_p$.

Ces deux théorèmes sont une conséquence des deux lemmes suivantes :

Lemme 2.3.13 *Avec les conditions* (2.10)*et* (2.11), *on a les égalités suivantes :*

1) $\mid Q_n \mid_p = \mid a_1 a_2 \cdots a_n \mid_p \ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

2) $\mid P_n \mid_p = \mid a_0 a_1 \cdots a_n \mid_p \ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a_0 \neq 0$.

Preuve :

On va démontrer les égalités par récurrence :

i) Si n=1 on a

$$Q_1 = a_1 Q_0 + Q_{-1} = a_1 \Longrightarrow \mid Q_1 \mid_p = \mid a_1 \mid_p$$

donc l'égalité est vraie au rang 1. Supposons-la vraie pour $n-1$ c'est à dire $\mid Q_{n-1} \mid_p = \mid a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \mid_p$, et montrons l'égalité pour n, on a

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \Longrightarrow \mid Q_n \mid_p = \mid a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \mid_p$$

et on a aussi $\begin{cases} \mid Q_{n-1} \mid_p = \mid a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \mid_p \\ \mid Q_{n-2} \mid_p = \mid a_1 a_2 \cdots a_{n-2} \mid_p \end{cases}$

d'autre part

$$\mid a_n Q_{n-1} \mid_p = \mid a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \mid_p > \mid Q_{n-2} \mid_p = \mid a_1 a_2 \cdots a_{n-2} \mid_p$$

En effet

$$v_p(a_1 a_2 \cdots a_n) - v_p(a_1 a_2 \cdots a_{n-2}) = v_p(a_{n-1}) + v_p(a_n) = \begin{cases} 0 + (-1) \\ \quad ou \\ (-1) + 0 \end{cases} = -1 < 0$$

Alors

$$v_p(a_1 a_2 \cdots a_n) < v_p(a_1 a_2 \cdots a_{n-2})$$

Ce qui implique que

$$p^{-v_p(a_1 a_2 \cdots a_n)} > p^{-v_p(a_1 a_2 \cdots a_{n-2})}$$

donc

$$\mid a_n Q_{n-1} \mid_p = \mid a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \mid_p > \mid Q_{n-2} \mid_p = \mid a_1 a_2 \cdots a_{n-2} \mid_p$$

Alors

$$\mid Q_n \mid_p = \mid a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \mid_p = \mid a_n Q_{n-1} \mid_p = \mid a_1 a_2 \cdots a_n \mid_p$$

donc l'égalité est vérifiée.

ii) Si $n = 1$ on a

$$P_1 = a_1 P_0 + P_{-1} = a_1 a_0 + 1 \Longrightarrow \mid P_1 \mid_p = \mid a_1 a_0 + 1 \mid_p = \mid a_1 a_0 \mid_p$$

Car

$$v_p(a_0 a_1) = v_p(a_0) + v_p(a_1) = -1 < 0$$

alors

$$p^{-v_p(a_0 a_1)} > 1 \Longrightarrow \mid a_0 a_1 \mid_p > 1$$

donc

$$\mid P_1 \mid_p = \mid a_0 a_1 \mid$$

Donc l'égalité est vraie au rang 1. Supposons l'égalité vraie pour $n-1$ c'est à dire $\mid P_{n-1} \mid_p = \mid a_0 a_1 a_2 \cdots c_{n-1} \mid_p$, et montrons l'égalité pour n on a :

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2} \Longrightarrow \mid P_n \mid_p = \mid a_n P_{n-1} + P_{n-2} \mid_p$$

et on a aussi

$$\begin{cases} \mid P_{n-1} \mid_p = \mid a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \mid_p \\ \mid P_{n-2} \mid_p = \mid a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-2} \mid_p \end{cases}$$

d'autre part,

$$\mid a_n P_{n-1} \mid_p = \mid a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \mid_p > \mid P_{n-2} \mid_p = \mid a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-2} \mid_p$$

En effet, comme dans la question (i)

$$v_p(a_0 a_1 a_2 \cdots a_n) - v_p(a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-2}) = v_p(a_{n-1}) + v_p(a_n) = -1 < 0$$

telle que

$$v_p(a_0 a_1 a_2 \cdots a_n) < v_p(a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-2})$$

qui implique que

$$p^{-v_p(a_0 a_1 a_2 \cdots a_n)} > p^{-v_p(a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-2})}$$

donc

$$\mid a_n P_{n-1} \mid_p = \mid a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \mid_p > \mid P_{n-2} \mid_p = \mid a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-2} \mid_p$$

Alors

$$\mid P_n \mid_p = \mid a_n P_{n-1} + P_{n-2} \mid_p \mid a_n P_{n-1} \mid_p = \mid a_0 a_1 a_2 \cdots a_n \mid_p.$$

donc l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ □

La démonstration est la même dans le cas $v_p(a_n) \leq -1$

Propriété 2.3.14 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :*

1) $|Q_{2n}|_p = |Q_{2n-1}|_p = p^n$.

2) $|Q_{n-1}Q_n|_p = p^n$.

Preuve :

Pour $k \in \mathbb{N}^*$

1) Si $k = 2n$, on a :

$$\begin{aligned} |Q_k|_p &= |a_1|_p|a_2|_p|a_3|_p|a_4|_p \cdots |a_{2n-1}|_p|a_{2n}|_p \\ &= p.1p.1 \cdots p.1 \\ &= \underbrace{pp\cdots p}_{\text{n fois}} \\ &= p^n \end{aligned}$$

Donc

$$|Q_{2n}|_p = p^n$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |Q_{2n}|_p &= |a_1|_p|a_2|_p|a_3|_p|a_4|_p \cdots |a_{2n-1}|_p|a_{2n}|_p \\ &= |a_{2n-1}|_p|a_{2n}|_p \\ &= |a_{2n-1}|_p \\ &= p^n. \end{aligned}$$

2) Si $n = 2k + 1$, on a

$$\begin{aligned} |Q_{2k}Q_{2k+1}|_p &= p^k p^{k+1} \\ &= p^{2k+1} \end{aligned}$$

Alors

$$|Q_{n-1}Q_n|_p = p^n.$$ □

Proposition 2.3.15 *La série* $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$ *converge dans* $\mathbb{Q}_p$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Preuve :

Pour étudie la convergence de $\dfrac{P_n}{Q_n}$ (i.e, de fraction continue), on doit étudie la convergence de la série alternée $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$

En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}Q_n} \right|_p &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|Q_{n-1}Q_n|_p} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p^n} = 0 \end{aligned}$$

Alors le terme générale converge vers 0

D'où la série alternée converge dans $\mathbb{Q}_p$.

Remarque 2.3.16 *Sous l'hypothèse des critères du convergence précédent, la série de somme partielle* $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$ *converge vers* $\dfrac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k+1}}$ *dans* $\mathbb{Q}_p$.

Lemme 2.3.17 *Pour* $k \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$|yQ_k - P_k|_p = \frac{1}{|Q_k|_p|a_{k+1}|_p} = \frac{1}{|a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}|_p}.$$

Preuve :

Soit $k < n$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_k}{Q_k} \right|_p &= \left| \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i} - \frac{P_0}{Q_0} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i} \right|_p \\ &= \left| \sum_{i=k+1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i} \right|_p \end{aligned}$$

on passe à la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_k}{Q_k} \right|_p = \left| \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i} \right|_p$$

D'après le théorème (2.3.12) on a

$$y = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

alors

$$\left| y - \frac{P_k}{Q_k} \right|_p = \left| \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i} \right|_p$$

D'après la remarque (2.3.16) la série $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$ converge vers $\frac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k+1}}$ dans $\mathbb{Q}_p$ ce qui implique que

$$\left| y - \frac{P_k}{Q_k} \right|_p = \left| \frac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k+1}} \right|_p = \frac{1}{|Q_kQ_{k+1}|_p}$$

D'où

$$|yQ_k - P_k|_p = \frac{1}{|Q_{k+1}|_p} = \frac{1}{|Q_k|_p|a_{k+1}|_p} = \frac{1}{|a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}|_p}. \qquad \square$$

Exemple 2.3.18 *D'après les exemples précédents on a :*

1) Pour $p = 3$, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{P_n}{Q_n} = -1$, c'est à dire

$$2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{\ddots + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2}}}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -1.$$

Chapitre 3

Théorèmes du sous-espace et ses applications

Dans ce chapitre, on va démontrer la transcendance d'un nombre dans le cas réel et dans le cas p-adique, pour cela on a présenté le théorème du sous-espace de Schmidt. Ainsi, que sa version p-adique. On termine ce chapitre par le théorème principal pour démonter la transcendance dans le cas p-adique.

3.1 Alphabets et mots

Pour plus de détail sur les définitions et les théorèmes voir ([4]).

Définition 3.1.1

• *On appelle **alphabet** tout ensemble fini, on le note $\boldsymbol{A}$. Un élément w de l'alphabet est appelé **lettre**.*

• *Un **mot** W est la concaténation des lettres de $\boldsymbol{A}$, on écrit*

$$W = w_1 w_2 w_3 \cdots w_n \quad \text{avec } w_i \in \boldsymbol{A}, \forall i = \overline{1, n}$$

• *La **longueur**de W est le nombre des lettres qui le composent W, on le note $|W|$. D'où on aura*

$$|W| = |w_1 w_2 w_3 \cdots w_n| = n$$

• *Le* ***miroir****de W est le mot* $\overline{W}$ *défini par* $\overline{W} = w_n \cdots w_2 w_1$. *D'où on a* $|W| = |\overline{W}| = n$.
Par exemple : W=2018 donc $\overline{W} = 8102$. *Notons que* $\overline{WX} = \overline{X}\ \overline{W}$.
• *On dit que le mot W est un* ***palindrome*** *si* $W = \overline{W}$.
Par exemple : W= radar, $\overline{W} = radar$ *donc* $\overline{W} = W$.
• *On dit que le mot W est un* ***quasi-palindrome*** *s'il est de la forme* $W = XYZ\overline{Y}\ \overline{X}$ *où* X, Y, Z *sont des mots, dans ce cas on a* $\overline{W} = XY\overline{Z}\ \overline{Y}\ \overline{X}$.
• *On note par* $|W|_w$ *le nombre d'occurrences de la lettre w dans le mot W.*
Par exemple

$$|W|_1 = |111001001001|_1 = 6$$

Définition 3.1.2 *Soit la suite* $(t_n)_{n\geq 0}$ *définie par*

$$t_n = \begin{cases} 0 & \textit{si le nombre des 1 dans l'ècriture binaire de } n \textit{ est paire.} \\ 1 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

La suite $(t_n)_{n\geq 0}$ *est appelé* ***suite de Thue-Morse****, de sorte qu'elle calcule le nombre de* 1 *modulo* 2 *dans la représentation de n en base* 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$(n)_2$	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	$\cdots$
t_n	0	1	1	0	1	0	0	1	1	$\cdots$

Le ***mot de Thue-Morse*** (***infini***) *qui correspond est donné par*

$$W = 0110100110010110100101100111010011\cdots$$

Définition 3.1.3 *Soient* α *et* β *deux entiers naturels différents. La suite de Thue-Morse* $(t_n)_{n\geqslant 0}$ *à valeurs dans l'ensemble* $A = \{\alpha, \beta\}$ *est définie par* $t_n = \alpha$ *(resp.*β*) si l'écriture binaire de n contient un nombre paire (resp. impair) du chiffre* 1. *Autrement dit*

$$t_n = \begin{cases} \alpha & \textit{si le nombre des 1 dans l'ècriture binaire de } n \textit{ est paire.} \\ \beta & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Le ***mot de Thue-Morse*** (***infini***) *qui correspond est donné par*

$$W = \alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta\cdots$$

Théorème 3.1.4 *On peut définir la suite de Thue-Morse par les relations de récurrence suivantes :*

$$\begin{cases} t_0 = 0 \quad (resp, \alpha) \\ t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = 1 - t_n, \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$$

Théorème 3.1.5 *Le mot fini défini par les lettres de la suite de Thue-Morse*

$$W = t_0 t_1 \cdots t_{4^k - 1}, \forall k \geqslant 1$$

est un palindrome, i.e. $W = \overline{W}$*, et les deux lettres de l'alphabet* A *ont le même nombre d'occurrences. par exemple, si* $k = 2$ *:*

$$W = t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8 t_9 t_{10} t_{11} t_{12} t_{13} t_{14} t_{15} = 0110100110010110$$

3.2 Théorèmes du sous-espace

Dans cette section on va donner l'énoncé du théorème du sous-espace de Schmidt dans le cas réel. Ainsi, on donne la version p-adique de ce théorème dû à Schlickwei . On donne aussi des applications du théorème de schmidt et de Schlickwei

3.2.1 Théorèmes dans le cas réel

Théorème 3.2.1 (Schmidt) *Soient* $m \geqslant 2$ *un entier relatif, et* $\delta > 0$ *un nombre réel. Considérons* $L_1, \cdots, L_m$ *des formes linéaires en les variables* $X_1, \cdots, X_m$*, à coefficients algébriques réels et linéairement indépendantes sur* $\overline{\mathbb{Q}}$*. On pose*

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_m) \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$$
$$|| X ||_\infty = \max(| X_i |, \ i = \overline{1, m})$$

Alors l'ensemble des solutions X *de l'inégalité*

$$\prod_{i=1}^{m} || L_i(X) ||_\infty \leqslant || X ||_\infty^{-\delta}$$

est contenu dans une union finie de sous-espaces vectoriels propres de $\mathbb{Q}^m$*.*

Dans ce qui suit, on va montrer comment le théorème de Roth se déduit facilement du théorème Schmidt ce qui donne une idée de la puissance de ce dernier.

Théorème 3.2.2 (Roth) *Soit* α *un nombre algébrique et* $\delta > 0$*. Alors l'inégalité*

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| \leqslant s^{-2-\delta}$$

ne possède qu'un nombre fini de solutions rationnelles $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.

Preuve :

Prenons dans le théorème du sous-espace de Schmidt : $m = 2$, et

$$L_1(X_1, X_2) = X_1,\ L_2 = \alpha X_1 - X_2$$

Ces deux formes linéaires de deux variables sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ et leurs coefficients sont des nombres algébriques. L'inégalité de Schmidt suivante :

$$\mid L_1(X) L_2(X) \mid \leqslant \mid X \mid^{-\delta}$$

correspond à $s \mid s\alpha - r \mid \leqslant s^{-\delta}$, pour $X = (s, r)$. □

Pour énoncé les autres théorèmes qui utilisent le théorème de Schmidt, on a besoin de définir des conditions de combinatoire sur les mots :

Condition $((*)_w)$ *Soit $w > 1$ un nombre rationnel. Soit le mot $a = (a_i)_i$, on dit que a vérifie la condition $(*)_w$ s'il n'est pas ultimement périodique, et s'il existe deux suites de mots finis $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ telles que $\forall n \geq 1$:*

1) $U_n V_n \overline{U_n}$ est le début de a.

2) $|V_n| \leq w|U_n|$.

3) $|U_n| \leq |U_{n+1}|$.

Condition $((*)_{w,w'})$ *Soit $w, w' > 1$ deux nombres rationnels. Soit le mot $a = (a_i)_i$, on dit que a vérifie la condition $(*)_{w,w'}$ s'il n'est pas ultimement périodique, et s'il existe trois suites de mots finis $(U_n)_{n\geq 1}$, $(V_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ telles que $\forall n \geq 1$:*

1) $T_n U_n V_n \overline{U_n}$ est le début de a.

2) $|V_n| \leq w|U_n|$.

3) $|U_n| \geq w'|T_n|$.

4) $|U_n| \leq |U_{n+1}|$.

Adamczewski et Bugeaud ont utilisé le théorème de Schmidt pour démontrer la transcendance d'un nombre réel défini par son développement décimal et en fraction continue réel (théorème(3.2.3) et (3.2.4)).

Théorème 3.2.3 (A&B1) *S'il existe un nombre réel* $w > 1$ *tel que la suite* $a = (a_k)_{k>1}$ *satisfait à la condition* $(*)_w$*, alors le nombre réel* $\eta = \sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{b^k}$ *est transcendant.*

Théorème 3.2.4 (A&B2) *Soit* $a = (a_m)_{m\geq 1}$ *une suite d'entiers naturels. S'il existe* $w \in \mathbb{Q}^+$ *tel que* a *satisfait la condition* $(*)_w$*, alors le nombre réel* $a = [0; a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots]$ *est transcendant.*

Théorème 3.2.5 (A&B3) *Soit* $a = (a_m)_{m\geq 1}$ *une suite d'entiers naturels, Soit un nombre réel* α *donnée par son développement en fraction continue* $[0; a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots]$*, supposons que la suite* $(Q_k^{\frac{1}{k}})$ *est bornée, et* $M = \lim_{k\to\infty} \sup(Q_k^{\frac{1}{k}})$ *et* $m = \lim_{k\to\infty} \inf(Q_k^{\frac{1}{k}})$*. Soit deux nombres rationnels positifs tels que*

$$w' > \frac{2\log M}{\log m} - 1$$

Si la suite des quotients partiels $(a_i)_i$ *satisfait la condition* $(*)_{w,w'}$ *, alors* α *est transcendant.*

3.2.2 Théorèmes dans le cas p-adique

Théorème 3.2.6 (Schlickewei) *Soient* $\nu \geqslant 2$ *un entier,* S *un ensemble fini de nombres premiers,* $\delta > 0$ *un nombre réel. Soient,* $L_{1,\infty}, \cdots, L_{\nu,\infty}$ *des formes linéaires en les variables* $X_1, \cdots, X_\nu$*, à coefficients algébriques réels et linéairement indépendantes sur* $\overline{\mathbb{Q}}$*. Pour tout* $p \in S$*, soient* $L_{1,p}, \cdots, L_{\nu,p}$ *des formes linéaires en les variables* $X_1, \cdots, X_\nu$*, à coefficients* p*-adiques algébriques et linéairement indépendantes sur* $\overline{\mathbb{Q}}$*. Alors, l'ensemble des solutions* X *de l'inégalité*

$$\prod_{i=1}^{\nu} \left(\mid L_{i,\infty}(X) \mid_\infty \prod_{p\in S} \mid\mid L_{i,p}(X) \mid\mid_p \right) \leqslant \mid\mid X \mid\mid_\infty^{-\delta}$$

avec

$$X = (X_1, \cdots, X_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu \setminus \{0\}$$
$$\mid\mid X \mid\mid_\infty = \max\left(\mid X_i \mid,\ i = \overline{1,\nu}\right)$$
$$\mid\mid X \mid\mid_p = \max\left(\mid X_i \mid_p,\ i = \overline{1,\nu}\right)$$

est contenu dans une union finie de sous-espaces vectoriels propres de $\mathbb{Q}^\nu$*.*

De même que le théorème de Schmidt implique facilement le théorème de Roth, le théorème de Ridout découle de la version p-adique du théorème de Schmidt (théorème de Schlickewei).

Théorème 3.2.7 (Ridout) *Pour tout nombre algébrique α, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble des $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ avec $s = 2^k$ qui satisfaisant $\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| \leqslant s^{-1-\delta}$ est fini.*

Preuve :

Dans la version p-adique du théorème du sous-espace de Schmidt, on prend $\nu = 2,\ p = 2$,

$$\begin{cases} L_{1,\infty}(X_1, X_2) & = X_1 \\ L_{2,\infty}(X_1, X_2) & = \alpha X_1 - X_2 \end{cases} \quad \begin{cases} L_{1,2}(X_1, X_2) & = X_1 \\ L_{2,2}(X_1, X_2) & = X_2 \end{cases}$$

donc, pour $x = (s, r)$

$$\begin{cases} \mid L_{1,\infty}(X) \mid & = s \\ \mid L_{2,\infty}(X) \mid & =\mid s\alpha - r \mid \end{cases} \begin{cases} \mid L_{1,2}(X) \mid_2 & = s^{-1} \\ \mid L_{2,2}(X) \mid_2 & =\mid r \mid_2 \leqslant 1 \end{cases}$$

Le théorème du sous-espace nous donne

$$\prod_{i=1}^{2} (\mid L_{i,\infty}(X) \mid . \mid L_{i,p}(X) \mid_2) =\mid s\alpha - r \mid . \mid r \mid_2 \leqslant s^{-\delta}$$

d'où

$$\mid \alpha - \frac{r}{s} \mid \leqslant s^{-1-\delta} \qquad \square$$

Adamczewski et Bugeaud ont utilisé le théorème de Schlickewei pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.2.8 (A&B4) *Soient : $A = \{0, 2, \cdots, p-1\}$ un alphabet, $a = (a_k)_{k>1}$ une suite de l'alphabet A n'est pas ultimement périodique, $\eta = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k p^k$ un nombre p-adique. S'il existe un nombre réel $w > 1$ tel que la suite $a = (a_k)_{k>1}$ satisfait à la condition $(*)_w$, alors le nombre p-adique η est transcendant.*

Belhadef, Esbelin et Zerzaihi, on démontré un résultat de transcendance pour les nombres p-adiques en utilisant la version p-adique du théorème du sous-espace.

Théorème 3.2.9 (**Belhadef, Esbelin et Zerzaihi** [6]) *Soient $p \geqslant 3, \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ et $\beta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ deux nombres rationnel appartient à $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \cap (0; p)$ tels que*

$$v_p(\alpha_1) = v_p(\beta_1) = 0$$

et

$$v_p(\alpha_2) \geqslant v_p(\beta_2) \geqslant 1$$

On note $\Xi = Max\{\alpha, \beta\}$. *Soit* $\theta \in \mathbb{Q}_p$ *défini comme limite de la fraction continue* $[0; a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots]$ *où* $a_i \in \{\alpha, \beta\}$, $\forall i \geqslant 1$. *On suppose que la suite des quotients partiels* $(a_i)_{i \geqslant 1}$ *est de Thue-Morse.*
Si on a

$$p^{\dfrac{5v_p(\beta_2) - v_p(\alpha_2)}{6}} > Max\{\alpha_2; \beta_2\} \times \frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2 + 4}}{2} \tag{3.1}$$

alors θ *est transcendant ou quadratique.*

Preuve :

Supposons que θ est algébrique de degré supérieur strictement à 2. On note
$v_0 = -\dfrac{v_p(\alpha) + v_p(\beta)}{2}$.
Nous Considérons les formes linéaires en la variable $X = (X_1, X_2, X_3)$

$$\begin{cases} L_{i,\infty}(X) & = X_i, 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ L_{1,p}(X) & = \theta^2 X_3 - X_1 \\ L_{2,p}(X) & = \theta X_3 - X_2 \\ L_{3,p}(X) & = X_3 \end{cases}$$

On va les évaluer pour le triple $X' = (c_{4^k} P'_{4^k - 1}, P'_{4^k}, Q'_{4^k})$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} |L_{i,\infty}(X')| = |X'_i|, 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ |L_{1,p}(X')|_p = \left|\theta^2 Q'_{4^k} - c_{4^k} P'_{4^k-1}\right|_p \\ |L_{2,p}(X')|_p = \left|\theta Q'_{4^k} - P'_{4^k}\right|_p \\ |L_{3,p}(X')|_p = \left|Q'_{4^k}\right|_p \end{cases}$$

En appliquant la définition (2.3.2) et le lemme (2.3.17), on trouve

$$|L_{2,p}(X')|_p = |\Pi|_p \, |\theta Q_{4^k} - P_{4^k}|_p = \frac{1}{|Q_{4^k}|_p \, |a_{4^k+1}|_p} < \frac{1}{p^{4^k v_0}} |\Pi|_p \tag{3.2}$$

et

$$|L_{3,p}(X')|_p = |\Pi|_p \, |Q_{4^k}|_p = p^{4^k v_0} |\Pi|_p$$

avec $\Pi = \prod_{j=1}^{4^k} c_j$
Pour évaluer $L_{1,p}(X')$ nous avons pour $n = 4^k$

$$\theta^2 - \frac{P_n P_{n-1}}{Q_n Q_{n-1}} = \left(\theta + \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)\left(\theta - \frac{P_n}{Q_n}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n-1}}\theta \tag{3.3}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left|\theta^2 - \frac{P_n P_{n-1}}{Q_n Q_{n-1}}\right|_p &= \left|\left(\theta + \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)\left(\theta - \frac{P_n}{Q_n}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n-1}}\theta\right|_p \\
&\leqslant \max\left\{\left|\theta + \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|_p \left|\theta - \frac{P_n}{Q_n}\right|_p ; |\theta|_p \left|\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}\right|_p\right\} \\
&< \frac{1}{\mid Q_n \mid_p^2} \max\left\{\left|\theta + \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|_p ; |\theta|_p \left|\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right|_p\right\}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a d'après le lemme (2.3.17) : $a_i = a_{n-i+1}$ et $a_0 = 0$, alors $P_n = Q_{n-1}$. Alors, on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\left|\theta^2 Q_n - P_{n-1}\right|_p &= \mid Q_n \mid_p \left|\theta^2 - \frac{P_{n-1}}{Q_n}\right|_p \\
&= \mid Q_n \mid_p \left|\theta^2 - \frac{P_n}{Q_{n-1}} \frac{P_{n-1}}{Q_n}\right|_p \\
&< \frac{1}{\mid Q_n \mid_p} \max\left\{\left|\theta + \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|_p ; |\theta|_p \left|\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right|_p\right\}
\end{aligned}$$

donc il existe une constante C_1 tel que

$$|L_{1,p}(X')|_p = \left|\theta^2 Q'_{4^k} - c_{4^k} P'_{4^k-1}\right|_p = \mid \Pi \mid_p \left|\theta^2 Q_{4^k} - P_{4^k-1}\right|_p < \frac{C_1}{p^{4^k v_0}} \mid \Pi \mid_p \tag{3.4}$$

On fait maintenant le produit des trois formes

$$\prod_{i=1}^{3} \left(|L_{i,p}(X')|_p\right) < \frac{C_1}{p^{4^k v_0}} \mid \Pi \mid_p^3 \tag{3.5}$$

Pour les formes linéaires réelles, nous avons l'inégalité suivante, en appliquant le lemme

$$\prod_{i=1}^{3} (|L_{i,\infty}(X')|) = \prod_{i=1}^{3} \mid X'_i \mid = \mid c_{4^k} P'_{4^k-1} \mid\mid P'_{4^k} \mid\mid Q'_{4^k} \mid < \Lambda^{3(1+4^k)} \mid \Pi \mid^3$$

avec $\Lambda = \dfrac{\Xi + \sqrt{\Xi^2 + 4}}{2}$. On aura donc pour $\delta \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{\mid X' \mid^{\delta}} \prod_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{|L_{i,\infty}(X')|}\right) > \frac{1}{\Lambda^{(3+\delta)(1+4^k)} \mid \Pi \mid^{3+\delta}} \tag{3.6}$$

D'après l'inégalité (3.1) du théorème, on peut choisir δ tel que pour k assez grand, on combine les inégalités(3.5) et (3.6), pour aboutir à

$$\prod_{i=1}^{3} \left(|L_{i,\infty}(X')| \, . \, |L_{i,p}(X')|_p\right) < \frac{1}{\mid X' \mid^{\delta}} \tag{3.7}$$

A ce stade, la version p-adique du théorème du sous-espace de Schmidt (due à Schlickewei), nous confirme l' existence des entiers non nuls y_1, y_2, y_3, tel que

$$y_1 c_{4^k} P'_{4^k-1} + y_2 P'_{4^k} + y_3 Q'_{4^k} = 0$$

i.e

$$y_1 \frac{P_{4^k-1}}{Q_{4^k}} + y_2 \frac{P_{4^k}}{Q_{4^k}} + y_3 = 0 \tag{3.8}$$

donc

$$y_1 \frac{P_{4^k-1}}{Q_{4^k-1}} . \frac{Q_{4^k-1}}{Q_{4^k}} + y_2 \frac{P_{4^k}}{Q_{4^k}} + y_3 = 0$$

d'où

$$y_1 \frac{P_{4^k-1}}{Q_{4^k-1}} . \frac{Q_{4^k}}{Q_{4^k}} + y_2 \frac{Q_{4^k}}{Q_{4^k}} + y_3 = 0 \tag{3.9}$$

d'autre part on sait que la suite de réduites $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$ tend vers θ dans $\mathbb{Q}_p$. Donc par passage à la limite dans l'équation (3.9) quand $k \longrightarrow +\infty$, on trouve

$$y_1 \theta^2 + y_2 \theta + y_3 = 0$$

Contradiction avec la supposition que θ est algébrique de degré supérieur strictement à 2. Alors θ est quadratique ou transcendant. $\square$

Maintenant, on donne notre résultat principale, On va utiliser le théorème de Schlickewei pour démontrer la transcendance d'un nombre p-adique défini par son développement en fraction continue de Browkin, telle que la suite des quotients partielles vérifie les conditions $(*)_w$ et $(*)_{w,w'}$.

Théorème 3.2.10 *Soit $\theta \in \mathbb{Q}_p$, avec $\theta = [0, a_1, a_2, \cdots]$ telle que la suite $(\sqrt[n]{Q_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, et soit $M = \lim_{n \to +\infty} \sup \sqrt[n]{Q_n}$, $m = \lim_{n \to +\infty} \inf \sqrt[n]{Q_n}$*

1) *Si la suite de quotient $(a_i)_i$ satisfaite le critère de convergence de fraction continue, et la condition $(*)_w$, alors θ est transcendant où quadratique.*

2) *Si la suite de quotient $(a_i)_i$ satisfaite le critère de convergence de fraction continue, et la condition $(*)_{w,w'}$ avec $w, w' \in \mathbb{Q}^+$, telle que :*

$$w' > \frac{2 \log M}{\log m} - 1. \tag{3.10}$$

Alors θ est transcendant ou quadratique.

Preuve :

1) Soit $(a_i)_i = U_n V_n \overline{U_n}$, $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ deux suites des mots finis, et

$$\begin{cases} r_n & =\mid U_n \mid \\ s_n & =\mid V_n \mid \\ t_n & = 2r_n + s_n \end{cases}$$

On suppose θ est algébrique de degré supérieure où égal à 3.

Soit $\theta' = [0, U_n V_n \overline{U_n} U_n V_n \overline{U_n} U_n V_n \overline{U_n} \cdots]$.

On a d'après le lemme (2.3.1)

$$|\theta \ Q_{t_n} - P_{t_n}| < Q_{t_n}^{-1}$$

et

$$|\theta \ Q_{t_n-1} - P_{t_n-1}| < Q_{t_n}^{-1}$$

et d'après le lemme (2.1.11) on a

$$\mid \theta' - \beta_n \mid < Q_{r_n}^{-2} \quad \text{tel que} \quad \beta_n = \frac{Q_{t_n-1}}{Q_{t_n}} = [0, U_n \overline{V_n} \ \overline{U_n}]$$

alors

$$\mid \theta' - \frac{Q_{t_n-1}}{Q_{t_n}} \mid < Q_{r_n}^{-2}$$

$$\mid \theta' Q_{t_n} - Q_{t_n-1} \mid < Q_{t_n} Q_{r_n}^{-2}$$

Nous considérons les formes linéaires en la variable $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$

$$\begin{cases} L_{1,\infty}(X) & = X_1 \\ L_{2,\infty}(X) & = \theta' X_1 - X_3 \\ L_{3,\infty}(X) & = \theta' X_2 - X_4 \\ L_{4,\infty}(X) & = \theta' X_1 - X_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_{1,p}(X) & = X_1 \\ L_{2,p}(X) & = \theta' X_1 - X_3 \\ L_{3,p}(X) & = \theta' X_2 - X_4 \\ L_{4,p}(X) & = X_2 \end{cases}$$

On va les évaluer pour $X' = (Q_{t_n}, Q_{t_n-1}, P_{t_n}, P_{t_n-1})$

$$\begin{cases} L_{1,\infty}(X') & =\mid Q_{t_n} \mid \\ L_{2,\infty}(X') & =\mid \theta' Q_{t_n} - P_{t_n} \mid < Q_{t_n}^{-1} \\ L_{3,\infty}(X') & =\mid \theta' Q_{t_n-1} - P_{t_n-1} \mid < Q_{t_n}^{-1} \\ L_{4,\infty}(X') & =\mid \theta' Q_{t_n} - Q_{t_n-1} \mid < Q_{t_n} Q_{r_n}^{-2} \end{cases} \begin{cases} L_{1,p}(X') & =\mid Q_{t_n} \mid_p \\ L_{2,p}(X') & =\mid \theta' Q_{t_n} - P_{t_n} \mid_p = \dfrac{1}{\mid Q_{t_n} \mid_p \mid a_{t_n+1} \mid_p} \\ L_{3,p}(X') & =\mid \theta' Q_{t_n-1} - P_{t_n-1} \mid_p = \dfrac{1}{\mid Q_{t_n-1} \mid_p \mid a_{t_{n-1}+1} \mid_p} \\ L_{4,p}(X') & =\mid Q_{t_n-1} \mid_p \end{cases}$$

On fait maintenant le produit des quatre formes :

Pour les formes linéaires réels :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{4}\left(|L_{i,\infty}(X')|\right) &\leqslant Q_{t_n}Q_{t_n}^{-1}Q_{t_n}^{-1}Q_{t_n}Q_{r_n}^{-2}\\ &\leqslant Q_{r_n}^{-2}\end{aligned}$$

Pour les formes linéaires p-adique :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{4}(|L_{i,p}(X')|_p) &= |Q_{t_n}|_p\frac{1}{|Q_{t_n}|_p|a_{t_n+1}|_p}\frac{1}{|Q_{t_n-1}|_p|a_{t_n}|_p}|Q_{t_n-1}|_p\\ &= \frac{1}{|a_{t_n+1}|_p|a_{t_n}|_p}\\ &\leq \frac{1}{p^2}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\prod_{i=1}^{4}(|L_{i,\infty}(X')||L_{i,p}(X')|_p) \leq \frac{Q_{r_n}^{-2}}{p^2} < Q_{r_n}^{-2} \tag{3.11}$$

D'autre part on a : $r_n\log\xi \geq r_n\log\xi$

alors

$$\begin{aligned}\log\xi^{r_n} &\geq \frac{r_n\log\xi}{t_n\log M}\ t_n\log M\\ &\geq \frac{r_n\log\xi}{t_n\log M}\ \log M^{t_n}\end{aligned}$$

donc
$$\xi^{r_n} \geq (M^{t_n})^{\frac{r_n\log\xi}{t_n\log M}}$$
et

$$\left(M^{t_n}\right)^{\frac{r_n\log\xi}{t_n\log M}} \geq (Q_{t_n})^{\frac{r_n\log\xi}{t_n\log M}}.$$

Puisque $M = \lim_{n\to+\infty}\sup\sqrt[t_n]{Q_{t_n}}$ et D'après le lemme(2.3.5) on a : $Q_{r_n} \geq \xi^{r_n}$

Alors

$$Q_{t_n} \geq \xi^{r_n} \geq \left(M^{t_n}\right)^{\frac{r_n\log\xi}{t_n\log M}} \geq (Q_{t_n})^{\frac{r_n\log\xi}{t_n\log M}}.$$

Selon l'assertion (2) de la condition $(*)_w$, nous avons

$$\frac{s_n}{r_n} < w$$

Où

$$t_n \leq (2+w)r_n$$

Ainsi

$$Q_{t_n}^{\frac{r_n \log \xi}{t_n \log M}} \geq Q_{t_n}^{\frac{\log \xi}{(2+w)\log M}}$$

retour à l'inégalité (3.11), il existe $\delta = \frac{\log \xi}{(2+w)\log M}$ tel que

$$\prod_{i=1}^{4}(|L_{i,\infty}(X')||L_{i,p}(X')|_p) < Q_{t_n}^{-\delta}$$

A ce stade la version p-adique de théorème de sous-espace Schmidt (due à Schlickwei), nous confirme l'existence des entiers non nuls, y_1, y_2, y_3, y_4 tel que

$$y_1 Q_{t_n} + y_2 Q_{t_n-1} + y_3 P_{t_n} + y_4 P_{t_n-1} = 0$$

i,e

$$y_1 + y_2 \frac{Q_{t_n-1}}{Q_{t_n}} + y_3 \frac{P_{t_n}}{Q_{t_n}} + y_4 \frac{P_{t_n-1}}{Q_{t_n}} = 0 \tag{3.12}$$

D'autre part, nous savons que

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N}/\ \forall t_n \geq N_1 : \left| \theta - \frac{P_{t_n}}{Q_{t_n}} \right|_p < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N}/\ \forall t_n \geq N_2 : \left| \frac{Q_{t_n-1}}{Q_{t_n}} - \frac{P_{t_n}}{Q_{t_n}} \right|_p < \varepsilon_2$$

$$\left| \theta - \frac{Q_{t_n-1}}{Q_{t_n}} \right|_p \leq \max\left\{ \left| \theta - \frac{P_{t_n}}{Q_{t_n}} \right|_p, \left| \frac{Q_{t_n-1}}{Q_{t_n}} - \frac{P_{t_n}}{Q_{t_n}} \right|_p \right\}$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}/\ \forall t_n \geq N : \left| \theta - \frac{Q_{t_n-1}}{Q_{t_n}} \right|_p < \varepsilon$$

Où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{Q_{t_n-1}}{Q_{t_n}} = \theta$

retour à l'équation (3.12), passant à la limite comme $n \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$y_1 + (y_2 + y_3)\theta + y_4\theta^2 = 0$$

contradiction avec la supposition que θ est algébrique de degrés supérieur strictement à 2. Alors θ est quadratique ou transcendant.

2) Comme dans la partie 1, nous raisonnerons par contradiction. Supposons que θ est algébrique de degré supérieure où égal à 3.

Soit $r_n =| D_n |, s_n =| D_n U_n |, t_n =| D_n U_n V_n \overline{U_n} |$. Soit le nombre réel θ_n défini par le développement périodique de période $D_n U_n V_n \overline{U_n}$

$$\theta_n = \left[0; D_nU_nV_n\overline{U_n}D_nU_nV_n\overline{U_n}\cdots\right]$$

Définir le nombre rationnel

$$\frac{\varphi_n}{\psi_n} = \left[0; D_nU_nV_n\overline{U_n}\ \overline{D_n}\right]$$

il est clair que le mot $D_nU_nV_n\overline{U_n}\ \overline{D_n}$ est un quasi-palindrome, note par $\dfrac{P'_{n,k}}{Q'_{n,k}}$ convergente vers $\dfrac{\varphi_n}{\psi_n}$, donc on a $\dfrac{P'_{n,t_n+r_n}}{Q'_{n,t_n+r_n}} = \dfrac{\varphi_n}{\psi_n}$. Par la suite, nous omettons l'indice n
D'après le lemme (2.3.1) on a

$$|\psi_n\theta' - \varphi_n| < \psi Q_{t_n}^{-2}$$
$$\left|Q'_{t_n+r_n-1}\theta' - P'_{t_n+r_n-1}\right| < Q'_{t_n+r_n-1}Q_{t_n}^{-2}$$

et

$$\frac{Q'_{t_n+r_n-1}}{Q'_{t_n+r_n}} = \left[0; D_nU_n\overline{V_nU_nD_n}\right]$$

i.e

$$\frac{Q'_{t_n+r_n-1}}{\psi_n} = \left[0; D_nU_n\overline{V_nU_nD_n}\right]$$

où

$$\left|\psi_n\theta_n - Q'_{t_n+r_n-1}\right| < \psi Q_{s_n}^{-2}$$

Nous considérons les formes linéaires en la variable $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$

$$\begin{cases} L_{1,p}(X) & = X_i, 1 \leq i \leq 4 \\ L_{1,\infty}(X) & = X_2 \\ L_{2,\infty}(X) & = \theta' X_1 - X_3 \\ L_{3,\infty}(X) & = \theta' X_2 - X_4 \\ L_{4,\infty}(X) & = \theta' X_1 - X_2 \end{cases}$$

On va les évaluer pour $X' = (\psi_n, Q'_{t_n+r_n-1}, \varphi_n, P'_{t_n+r_n-1})$:

$$\begin{cases} L_{i,p}(X') & =\mid X'_i \mid_p \leq 1 \\ L_{1,\infty}(X') & =\mid Q'_{t_n+r_n-1} \mid < \mid Q'_{t_n+r_n} \mid < \psi_n \\ L_{2,\infty}(X') & =\mid \theta'\psi_n - \varphi_n \mid < \psi_n Q_{t_n}^{-2} \\ L_{3,\infty}(X') & =\mid \theta' Q'_{t_n+r_n-1} - P'_{t_n+r_n-1} \mid < Q'_{t_n+r_n-1}Q_{t_n}^{-2} < \psi_n Q_{t_n}^{-2} \\ L_{4,\infty}(X') & =\mid \theta'\psi_n - Q'_{t_n+r_n-1} \mid < \psi_n Q_{s_n}^{-2} \end{cases}$$

On fait maintenant le produit des quatre formes linéaires réels et p-adique :

$$\prod_{i=1}^{4}\left(|L_i(X')|\,|L_{i,p}(X')|_p\right) < \psi_n^4 Q_{t_n}^{-4} Q_{s_n}^{-2} \tag{3.13}$$

D'après le lemme (2.3.6) on a

$$\psi \leq \left(1+\frac{1}{\xi}\right) Q_{t_n} Q_{r_n}$$

donc l'inégalité (3.13) devient

$$\prod_{i=1}^{4}\left(|L_i(X')|\,|L_{i,p}(X')|_p\right) \ll Q_{r_n}^4 Q_{s_n}^{-2} \tag{3.14}$$

d'autre part, selon l'assertion 3 de la condition $(*)_{w'w'}$, et l'inégalité (3.10) de notre théorème, il existe un nombre réel positif η tel que pour n très grand, nous avons
Si $\eta > 1$

$$\begin{aligned} 1+\eta &\geq 1-\eta \\ \frac{1+\eta}{1-\eta} &\leq 1 \\ \frac{2\log M}{\log m}\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right) - 1 &\leq \frac{2\log M}{\log m} - 1 \end{aligned}$$

donc

$$\frac{2\log M}{\log m}\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right) - 1 \leq \frac{s_n - r_n}{r_n}$$

où

$$m^{(1-\eta)s_n} \geq M^{2(1+\eta)r_n}$$

Par définition de M et m, on a

$$Q_{r_n}^{2(1+\eta)} \leq M^{2(1+\eta)r_n} \leq m^{(1-\eta)s_n} \leq Q_{s_n}^{(1-\eta)}$$

ainsi

$$Q_{r_n}^{2\frac{1+\eta}{1-\eta}} \leq Q_{s_n}$$

D'après l'inégalité (3.14)

$$\prod_{i=1}^{4}\left(|L_i(X')|\,|L_{i,p}(X')|_p\right) \ll Q_{s_n}^{-4\frac{\eta}{1+\eta}} \tag{3.15}$$

d'autre part, par le lemme (2.3.5), on a

$$Q_{s_n} \geq \xi^{s_n} \geq (M^{t_n})^{\frac{s_n \log \xi}{t_n \log M}} \geq (Q_{t_n})^{\frac{s_n \log \xi}{t_n \log M}} \geq (\psi_n)^{\frac{s_n \log \xi}{2t_n \log M}}$$

retour à l'inégalité (3.15) il existe $\delta = \left(\dfrac{4\eta}{1+\eta}\right)\left(\dfrac{s_n \log \xi}{2t_n \log M}\right)$ tel que

$$\prod_{i=1}^{4}\left(|L_i(X')|\,|L_{i,p}(X')|_p\right) \ll \psi_n^{-\delta}$$

A ce stade la version p-adique de théorème de sous-espace Schmidt (due à Schlickwei), nous confirme l'existence des entiers non nuls, y_1, y_2, y_3, y_4 tel que

$$y_1\psi_n + y_2 Q'_{t_n+r_n-1} + y_3\varphi_n + y_4 P'_{t_n+r_n-1} = 0$$

d'où

$$y_1 + y_2\frac{Q'_{t_n+r_n-1}}{\psi_n} + y_3\frac{\varphi_n}{\psi_n} + y_4\frac{Q'_{t_n+r_n-1}}{\psi_n}.\frac{P'_{t_n+r_n-1}}{Q'_{t_n+r_n-1}} = 0 \tag{3.16}$$

d'autre part, nous pouvons montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{Q'_{t_n+r_n-1}}{\psi_n} = \theta$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\varphi_n}{\psi_n} = \theta$$

retour à l'équation (3.16), passant à la limite comme $n \longrightarrow +\infty$ (in $\mathbb{Q}_p$), on obtient

$$y_1 + (y_2+y_3)\theta + y_4\theta^2 = 0$$

contradiction avec la supposition que θ est algébrique de degré supérieure où égale a 3. Alors θ est quadratique ou transcendant.

$\square$

Bibliographie

[1] **B. Adamczewski, Y. Bugeaud & L.Davision** : Continued fractions and transcendental numbers, Ann. Inst. Fourier 56(2006), 2093-2113.

[2] **B. Adamczewski, Y. Bugeaud** : On the complexity of algebraic numbers, I. Expansions in integer bases, Annals of Math. 165 (2007), 547-565.

[3] **B. Adamczewski, Y. Bugeaud** : On the complexity of algebraic numbers, II. Continuedfractions, Acta Math. 195(2005) 1-20.

[4] **J.P. Allouche, J. Shallit** : Automatic sequences. Theory, Applications, Generalizations, Cambridge University Press (2003).

[5] **G. Bachman** : Introduction to p-Adic Numbers and Valuation Theory, Academic press, New York and London, (1964).

[6] **R. Belhadef, H-A. Esbelin & T.Zerzaihi** : Transcendence of Thue-Morse p-Adic Continued Fraction, Mediterr. J. Math. 13(2016),1429-1434 .

[7] **Yu. Bilu** : The many faces of the Subspace Theorem [after Adamczewski, Bugeaud, Corvaja, Zannier $\cdots$], Séminaire Bourbaki 2006/2007, exposé no. 976, Astérisque 317 (2008), 1-38.

[8] **J. Browkin** : Continued fractions in local fields, II. Mathematics of Computation. vol 70. N 235 (2000), 1281-1292.

[9] **D.Duverney** : Théorie des nombres. Cours et exercices corrigés. Dunond(1998).

[10] **J. H. Evertse and K. Györy**, Finiteness criteria for decomposable from equations, Acta Arith. 50 (1988), 357-379.

[11] **J. H. Evertse, K. Györy, C. L. Stewart, and R. Tijdeman**, on S-unit equations in two unknowns, Invent. Math. 92 (1988), 461-477.

[12] **J. H. Evertse, K. Györy, C. L. Stewart, and R. Tijdeman**, on S-unit equations and their applications. In : New advances in transcendence theory (Durham, 1986), 110-174, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[13] **F.Q.Gouvêa** :P-adic Numbers. An Introduction, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York,Second Edition, Universitext, 2000.

[14] **S.Katok** :P-adic Analysis Compared with Real. American Mathematical Society,(2007).

[15] **M. Laurent**, Equations diophantiennes exponentielles, Invent. Math. 78 (1984), 299-327.

[16] **M.Morse** :Recurrent geodesics on surface of negative curvature, Trans. Amer. Math. Sos. 22 (1921) 84-100.

[17] **T. Ooto** : Transcendental p-adic continued fractions, arXiv :1407.0832, math.NT, Verlag(1997).

[18] **D.Ridout** : Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika 4(1957), 125-131.

[19] **K.F.Roth** : Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika 2(1955), 1-20 ;corrigendum, 169.

[20] **A.A.Ruban** :Certain metric properties of p-adic numbers, (Russian), Sibirsk. Mat. Zh. 11 (1970), 222-227.

[21] **H.P.Schlickewei** : On prudects of special linear forms with algebric coefficients, Acta Arith. 31,(1976), 389-398.

[22] **W.M.Schmidt** : Diophantine approximation, Lecture Notes in Mathematics 785, Springer 1980.

[23] **U. Zannier** : Some Applications of Diophantine Approximation to Diophantie Equations (with special emphasison the Schmidt Supspace Theorem), From, Udine 2003.