République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :
№ de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.
Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Le premier Théorème de Nevanlinna p-adique et ses applications

Présenté par :

- **Bouternikh Salah.**
- **Chaine Abdennour.**

Devant le jury :

Président	: **M.Yarou**	**prof.** Université de Jijel
Encadreur	: **T.Zerzaihi**	**Prof.** Université de Jijel
Examinateur	: **B.Saoudi**	**M.A.A.** Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieux, notre Créateur, le Miséricordieux, qui nous a donné l'opportunité d'étudier, la volonté, le courage et la patience afin d'accomplir et de mener à bien ce travail.

Nous remercions en particulier notre encadreur. ***prof. Tahar Zerzaihi*** *pour avoir dirigé ce travail, pour son aide, ses encouragements, sa grande disponibilité, ses précieux conseils et pour la patience qu'il nous a accordé pendant la réalisation de ce travail.*

Un grand merci également aux membres du jury, le président ***Prof. Yarou Moustapha*** *et l'examinateur* ***Bilal Saoudi*** *pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'évaluer notre travail.*

Nos vifs remerciements vont à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de jijel qui nous ont suivis durant nos cinq années d'études à l'université, à tous les collègues de notre promotion 2018.

Nous adressons nos remerciements les plus chaleureux à nos familles et nos amis pour leur patience et leur intérêt.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui auraient contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Salah & Abdennour

TABLE DES MATIÈRES

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

$\mathbb{K}$	:	Un corps.
$\|.\|$	:	La valeur absolue sur un corps $\mathbb{K}$.
d	:	La distance sur un corps $\mathbb{K}$.
p	:	Un nombre premier.
v_p	:	La valuation p-adique.
$S_p(n)$	:	La somme des chiffres de l'écriture de n en base p.
$D^+(a,r)$	:	Le disque fermé de centre a et de rayon r.
$D^-(a,r)$	:	Le disque ouvert de centre a et de rayon r.
$D(a,r)$	:	L'un ou l'autre de ces deux disque.
$C(a,r)$	:	Le cercle de centre a et de rayon r.
$\|.\|_p$	:	La valeur absolue p-adique.
$\mathbb{Z}_p$	:	Anneau des entiers p-adique.
$\mathbb{Z}^*{}_p$	:	L'ensemble des éléments inversible de $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}_p$	:	Corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$.
$\bar{\mathbb{Q}}_p$	:	La clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\mathbb{C}_p$	:	Le complété de la clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\|C_p\|_p$	:	L'ensemble des puissances rationnelles de p.
$\mathcal{A}(D(a,r))$	:	L'ensemble des fonctions analytiques sur $D(a,r)$.
$\mathcal{A}(C_p)$	:	L'ensemble des fonctions entièrs sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{A}(C_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$	:	L'ensemble des fonctions entiers transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.
$\|\|.\|\| = \|.\|(r)$	:	Le module de maximum.
φ_f	:	La fonction de valuation p-adique de f .
$\mathcal{M}(D(a,r))$	:	L'ensemble des fonctions méromorphes sur $D(a,r)$.
$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$	:	L'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathbb{C}_p(X)$	:	L'ensemble des fonction rationnelles sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{M}(C_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$	:	L'ensemble des fonctions mromorpheés transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.
$z(\rho,f)$	:	Le nombre de zéros de f sur le cercle $\|x-a\|_p = \rho$.
$p(\rho,f)$	:	Le nombre de pôle de f sur le cercle $\|x-a\|_p = \rho$.
$Z(\rho,f)$	:	La fonction de comptage des zéros de f dans $D^+(a,\rho)$ avec l'ordre de multiplicité.
$N(\rho,f)$	:	La fonction de comptage des pôle de f dans $D^+(a,\rho)$ avec l'ordre de multiplicité.
$\bar{Z}(\rho,f) = \bar{N}(\rho,\frac{1}{f})$	:	La fonction de comptage des zéros de f sur le disque fermé $D^+(a,\rho)$ sans prendre en compte de multiplicité.
$m(\rho,f)$	:	La fonction de compensation de f.
$T(\rho,f)$	:	La fonction de caractéristique de Nevanlinna de f.

INTRODUCTION

La Théorie de Nevanlinna, appelée aussi théorie de la distribution des valeurs, est une branche de l'analyse complexe développée par le mathématicien finlandais Rolf Nevanlinna au début du $20^{ème}$ siècle. La Théorie de Nevanlinna étudie la distribution des racines de l'équation $f(z) = a$ où f est une fonction entière ou méromorphe et a un nombre complexe.

Beaucoup d'études ont été faites sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes complexes. Elles concernent les problèmes de la répartition des zéros et les applications de la théorie de distribution des valeurs dans l'étude du comportement asymptotique des solutions des équations fonctionnelles et différentielles, notamment par les mathématiciens : Nevanlinna, G.Gundersen, G.Frank, C.C.Yang, Ping.Li,. . . ,etc.

A la fin du $19^{ème}$ siècle, le mathématicien allemand kurt Hensel $(1861 - 1941)$ a introduit les nombres p-adiques. Ces derniers représentent une extension des nombres rationnelles qui sont utilisés en théorie des nombres. L'analyse p-adique est le parallèle de l'analyse complexe. Il est donc naturel d'étudier la version de la théorie de Nevanlinna dans le cas p- adique.

Au cours des années 80, A.Boutabaa et Ha Huy Khoai introduisent la théorie de Nevanlinna p-adique des fonctions méromorphes dans tout le corps des nombre p-adique. Elle possède des relations étroites avec la théorie des nombres. L'application essentielle de cette théorie est toujours dans l'étude de la taille des solutions méromorphe des équations au q-différents p-adiques.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction générale et trois chapitres.
Dans le premier chapitre, on commence par donner quelques rappels des notions fondamentales du corps normés en cas général puis on définit la norme non archimedienne et on signale quelques propriétés des corps non archimediens. En suite, on construit le corps

des nombres p-adique $\mathbb{Q}_p$ qui est le complété de $\mathbb{Q}$ muni de la norme p-adique ($|.|_p$) et on étudie plus tard les propriétés analytiques et topologiques de ce corps. Comme la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ n'est pas un espace complet, nous avons besoin de le complété pour former un corps plus grand noté $\mathbb{C}_p$ complet et algébriquement clos.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons le premier théorème de Nevanlinna au cas complexe, en suite nous présentons une partie importante qui est le polygone de valuation qui détermine la distribution des zéros des fonctions analytiques. Puis, on fait un analogue du premier théorème de Nevanlinna sur le corps $\mathbb{C}_p$ associée a trois fonctions ; $m(r, f) = \log^+ |f|(r)$ - la fonction de compensation, $N(r, f)$ - la fonction qui compte les pôles des fonctions méromorphes avec leurs multiplicités et $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$ -la fonction caractéristique de Nevanlinna qui est positive et croissante. Ces fonctions sont utilisées pour donner une version p-adique de la formule de Jensen qui est la base du première théorème de Nevanlinna. En fin, on présente certaines propriétés des fonctions méromorphes et de leurs dérivées.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'application de la théorie de Nevanlinna p-adique aux équations fonctionnelles linéaires traitées par N.Boudjerida (et autres) [20] en 2010 et par S.Bourourou (et autres) [21] en 2016. En particulier nous étudions les équations fonctionnelles aux q-différences de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(q^i x) = h(x)$$

où $q \in \mathbb{K}, 0 < |q| < 1$ et $h(x), g_0(x) \dots g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes tel que $g_0(x)g_s(x) \neq 0$.

Dans le cas p-adique Comme dans le cas complexe, on utilise la fonction caractéristique de Nevanlinna pour caractériser la taille des solutions méromorphes de ces équations et étudier le comportement et l'ordre de croissance de ces solutions.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE DE L'ANALYSE P-ADIQUE

1.1 Corps normés

Dans cette partie, on va rappeler quelques définitions et propriétés élémentaires qui concernent les corps normés.

Définition 1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps on appelle une norme sur $\mathbb{K}$ toute application $\|.\|$ de $\mathbb{K}$ dans $[0, +\infty[$ telle que :*

1. $\forall x \in \mathbb{K}$ $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{K}$ $\|xy\| = \|x\|\|y\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{K}$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Et on appelle la distance induite sur $\mathbb{K}$ par $\|.\|$ la distance $d_{\|.\|}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : d_{\|.\|}(x, y) = \|x - y\|$$

Exemple 1.1.
Il ya toujours sur un corps $\mathbb{K}$ au moins une norme, à savoir l'application
$\|.\|$ *:* $\mathbb{K} \longrightarrow [0, +\infty[$ *définie par :*

$$\|x\| = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Appelé norme triviale.

Remarque 1.1. *On peut définir sur un corps* $\mathbb{K}$ *la norme usuelle*

$$|x|_\infty = \max(x,-x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Théorème 1.1. *[1] Soit |.| la valeur absolue usuelle sur* $\mathbb{Q}$*. On a* $\|x\| = |x|^\alpha (\alpha > 0)$ *définit une norme sur* $\mathbb{Q}$ *si et seulement si* $\alpha \leq 1$*, où* $\mathbb{Q}$ *est le corps des nombres rationnels .*

1.1.1 Propriétés des normes sur un corps

Soit $(\mathbb{K}, \|.\|)$un corps normé, on a :

1. $\|x\| = \|-x\|$, $\forall x \in \mathbb{K}$.
2. $\|x \bar{+} y\| \geq \|x\| - \|y\|$,$\forall x, y \in \mathbb{K}$.
3. $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
4. $\left\|\frac{x}{y}\right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}, y \neq 0$.
5. $\|n\| \leq$ n ,$\forall n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2. *On dit que la norme* $\|.\|$ *est non archimédienne si*
$\forall x, y \in \mathbb{K} : \|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ *(inégalité triangulaire forte) .*

Remarques 1.1.
1) L'inégalité triangulaire forte $\Longrightarrow$ *l'inégalité triangulaire ordinaire .*
2) La distance induite par la norme non archimédienne est appelée distance ultra-métrique.

Exemple 1.2.
La norme triviale est une norme non archimédienne.

Définition 1.3. *Lorsque* $\mathbb{K}$ *est muni d'une norme non archimédienne, on dit que* $\mathbb{K}$ *est un corps non archimédien. Dans le cas contraire on dit que* $\mathbb{K}$ *est un corps archimédien.*

Exemple 1.3.
$(\mathbb{R}, |.|_\infty)$ *est un corps archimédien.*

1.1.2 Propriétés élémentaires d'un corps non archimédien

Dans la suite, on note par $(\mathbb{K}, \|.\|)$ un corps non archimedién.

Théorème 1.2. *[1] Soit* $\|.\|$ *une norme sur le corps* $\mathbb{K}$ *on a*

$$\|.\| \text{ non archimédienne} \Longleftrightarrow \|n\| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Preuve.

$\Longrightarrow$) (par récurrence)

pour n=0 évident car $\|0\|= 0 \leq 1$

Supposons que $\|n\|\leq 1$ est montrons que $\|n+1\|\leq 1$, on a

$$\begin{aligned}\|n+1\| &\leq \max(\|n\|, \|1\|)\\ &= \|1\|\\ &= 1\end{aligned}$$

donc $\|n+1\|\leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|n\|\leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Longleftarrow$) soit $x, y \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^n &\overset{\mathbb{K}\ corps}{=} \|(x+y)^n\|\\ &= \|\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k\|\\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \|C_n^k x^{n-k} y^k\|\\ &= \sum_{k=0}^{n} \|C_n^k\|\|x^{n-k}\|\|y^k\|\\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \|x^{n-k}\|\|y^k\| \qquad (car\ \|C_n^k\|\leq 1)\\ &\leq \sum_{k=0}^{n} (\max\{\|x\|, \|y\|\})^n\\ &= (n+1)(\max\{\|x\|, \|y\|\})^n\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|x+y\|\leq (n+1)^{1/n} \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

pour n assez grand on a $\|x+y\|\leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$ (*car* $(n+1)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$). □

Conséquence 1.1.

$$\|.\| \ archim\acute{e}dienne \Longleftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{Z},\ \|n_0\|> 1.$$

Définition 1.4. *Soit* $\|.\|$ *une norme sur le corps* $\mathbb{K}$ *on a*

$$\forall x, y \in \mathbb{K} \quad x \neq 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \|nx\|> \|y\| \Longleftrightarrow \|.\| \ archim\acute{e}dienne.$$

autrement dit $\quad Sup\{\|n\|, n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

l'espace muni de cette norme est un espace archimédien.

Proposition 1.1. *[1]* ***(propriétés des triangles isocèles)***

soit a *et* x *deux élément d'un corps non-archimédien* $(\mathbb{K}, \|.\|)$. *On a*

$$\|x-a\|< \|a\| \Rightarrow \|x\|= \|a\|$$

Preuve.
Soit $a, x \in \mathbb{K}$ tel que $\|x-a\| < \|a\|$, on a

$$\|x\| = \|x-a+a\| \leq \max\{\|x-a\|, \|a\|\} = \|a\|$$

et

$$\|a\| = \|a-x+x\| \leq \max\{\|a-x\|, \|x\|\} = \|x\|$$

puisque

$$\max\{\|a-x\|, \|x\|\} = \|a-x\|$$

est un contradiction avec l'hypothèse.
D'ou

$$\|a\| \leq \|x\| \quad et \quad \|x\| \leq \|a\| \Longrightarrow \|x\| = \|a\|.$$

□

Conséquence 1.2. *dans un espace non archimédien tous les triangles sont isocèles.*

$$\|x-y\| \neq \|y-z\| \Longrightarrow \|x-z\| = \max\{\|x-y\|, \|y-z\|\} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}.$$

En effet
Si $\|x-y\| \neq \|y-z\|$
on suppose que

$$\|x-y\| < \|y-z\|$$

on a

$$\|x-y\| = \|x-z+z-y\| = \|(x-z)-(y-z)\| < \|y-z\| \Longrightarrow \|x-z\| = \|y-z\|.$$

Définition 1.5. *Soient* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes définies sur un corps* $\mathbb{K}$, *on a* $\|.\|_1$ *est équivalente à* $\|.\|_2$ $(\|.\|_1 \sim \|.\|_2)$ *si* $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : a_n \underset{\|.\|_1}{\longrightarrow} a \Longleftrightarrow a_n \underset{\|.\|_2}{\longrightarrow} a$.

Théorème 1.3. *[1] Soit* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes définies sur le corps* $\mathbb{K}$, *on a* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalentes si et seulement si existe un réel positif* α *tel que* $\forall x \in \mathbb{K}$ $\|x\|_1 = \|x\|_2^{\alpha}$.

Remarques 1.2. *une norme archimidienne n'est jamais équivalente à une norme non archimédienne.*

1.2 Corps des nombres p-adiques

1.2.1 Valuation p-adique

Définition 1.6. *Soit* p *un nombre premier et* $n \in \mathbb{Z}^*$. *La valuation* p*-adique de* n *est le plus grand entier naturel* α *tel que* p^α *divise* n *et on note* $v_p(n)$.

$$\begin{aligned} v_p : \mathbb{Z}^* &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longrightarrow v_p(x) = \max\{\alpha \in \mathbb{N}, x = p^\alpha c, c \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

par convention on a $v_p(0)=\infty$ *car* p^α *divise 0,* $\forall\alpha\in\mathbb{N}$.
si $x=\dfrac{a}{b}$, $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}^*$ $v_p(x)=v_p(a)-v_p(b)$

Exemples 1.1.

1. $10=1.3^0+3^2\Longrightarrow v_3(10)=0$, *p=3.*
2. $a=p+p^6+3p^7$, *pour* $p\geq 5\Longrightarrow v_p(a)=1$.
3. $b=\dfrac{p^2+2p^3+P^4}{P^4+6P^5}$, *pour* $p\geq 7\Longrightarrow v_p(b)=2-4=-2$.

Proposition 1.2. *[8] Soient* $a,b\in\mathbb{Z}^*$*, on a*

1. $v_p(1)=0$ $\forall p$*-premier.*
2. $v_p(ab)=v_p(a)+v_p(b)$.
3. $v_p(a+b)\geqslant min\{v_p(a),v_p(b)\}$.

Preuve.

1. *Evident* car $1=p^0+0.p^1+0.p^2+...=p^0$ $\forall p$-premier $\Longrightarrow v_p(1)=0$
2. Soit
$$a\in\mathbb{Z}^* \quad a=p^{v_p(a)}.n_1 \quad , \quad (p,n_1)=1$$
et
$$b\in\mathbb{Z}^* \quad b=p^{v_p(b)}.n_2 \quad , \quad (p,n_2)=1.$$
Donc
$$ab=p^{v_p(a)}p^{v_p(b)}.n_1n_2=p^{v_p(a)+v_p(b)}.n_1n_2 \quad , \quad (p,n_1n_2)=1.$$
Donc
$$v_p(ab)=v_p(a)+v_p(b).$$
3. Soit
$$a\in\mathbb{Z}^* \quad a=p^{v_p(a)}.n_1 \quad , \quad (p,n_1)=1$$
et
$$b\in\mathbb{Z}^* \quad b=p^{v_p(b)}.n_2 \quad , \quad (p,n_2)=1.$$
i) Supposons que $v_p(a)\leq v_p(b)$
$$a+b=p^{v_p(a)}.n_1+p^{v_p(b)}.n_2=p^{v_p(a)}\underbrace{(n_1+p^{v_p(b)-v_p(a)}n_2)}_{n_3}=p^{v_P(a)}.n_3$$
Si $(p,n_3)=1$ on a
$$v_p(a+b)=v_p(a)=min\{v_p(a),v_p(b)\}$$
Sinon
$$v_p(a+b)=v_p(a)+v_p(n_3)\geqslant v_p(a)=min\{v_p(a),v_p(b)\}$$

ii) Supposons que $\quad v_p(b) \leqslant v_p(a)$

$$a+b = p^{v_p(a)}.n_1 + p^{v_p(b)}.n_2 = p^{v_p(b)} \underbrace{(p^{v_p(a)-v_p(b)}.n_1 + n_2)}_{n_4} = p^{v_p(b)}.n_4$$

Si $\quad (p, n_4) = 1 \quad$ on a

$$v_p(a+b) = v_p(b) = min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

Sinon

$$v_p(a+b) = v_p(b) + v_P(n_4) \geqslant v_p(b) = min\{v_p(a), v_p(b)\}.$$

Donc

$$v_p(a+b) \geqslant min\{v_p(a), v_p(b)\} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}^*.$$

$\square$

Exemples 1.2.
La valuation p-adique de $n\,!$ est

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1} \quad \forall n \geq 0$$

Où $S_p(n)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p, i.e
$S_p(n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ *où* $n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n$
En effet.
On a

$$n\,! = \prod_{k=1}^{n} k \Longrightarrow v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k).$$

tel que

$$k = a_i p^i + ... + a_j p^j, \ a_i \neq 0$$

donc

$$v_p(k) = i$$

On a

$$\begin{aligned} k &= a_i p^i + ... + a_j p^j \\ &= p^i + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s p^s. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} k - 1 &= p^i - 1 + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s p^S \\ &= (p-1)\sum_{s=0}^{i-1} p^s + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s p^S \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_p(k-1) &= (p-1)\sum_{s=0}^{i-1} 1 + (a_i - 1) + \sum_{s=i+1}^{j} a_s \\
&= i(p-1) + a_i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s - 1 \\
&= i(p-1) + S_p(k) - 1 \\
&= v_p(k)(p-1) + S_p(k) - 1.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
v_p(k) &= \frac{S_p(k-1) - S_p(k) + 1}{p-1} \\
v_p(n!) &= \sum_{k=1}^{n} v_p(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_p(k-1) - S_p(k) + 1}{p-1} \\
&= \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{n} S_p(k-1) - S_p(k) + 1 \\
&= \frac{1}{p-1}(-S_p(n) + n) \\
&= \frac{n - S_p(n)}{p-1}.
\end{aligned}
$$

1.2.2 Normes p-adiques

Définition 1.7. *Soit p-un nombre premier, on définit l'application $|.|$sur $\mathbb{Q}$ comme suite*

$$
|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}
$$

tel que $v_p(x)$ représente la valuation p-adique de x.

Théorème 1.4. *[7] L'application $|.|_p$ définit une norme non archimédienne sur $\mathbb{Q}$ appelée norme p-adique.*

Preuve.
Soit $x, y \in \mathbb{Q}$

1.

$$
\begin{aligned}
|x|_p = 0 &\Longleftrightarrow p^{-vp(x)} = 0 \\
&\Longleftrightarrow v_p(x) = +\infty \\
&\Longleftrightarrow x = 0.
\end{aligned}
$$

Donc $\quad |x|_p = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

2. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ on a

$$\begin{aligned} |xy|_p &= p^{-v_p(xy)} \\ &= p^{-(v_p(x)+v_p(y))} \\ &= p^{-v_p(x)}p^{-v_p(y)} \\ &= |x|_p|y|_p. \end{aligned}$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ $\quad x = \dfrac{a}{b},\ y = \dfrac{c}{d}$ *tel que* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *et* $b, d \neq 0$

$$\begin{aligned} v_p(x+y) &= v_p\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \\ &= v_p\left(\frac{ad+cb}{bd}\right) \\ &= v_p(ad+cb) - v_p(bd) \\ &= v_p(ad+cd) - v_p(b) - v_p(d) \\ &\geq \min\{v_p(ad), v_p(cb)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \min\{v_p(a)+v_p(d), v_p(c)+v_p(b)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \min\{v_p(a)+v_p(d)-v_p(b)-v_p(d), v_p(c)+v_p(b)-v_p(b)-v_p(d)\} \\ &= \min\{v_p(a)-v_p(b), v_p(c)-v_p(d)\} \\ &= \min\left\{v_p\left(\frac{a}{b}\right), v_p\left(\frac{c}{d}\right)\right\} \\ &= \min\{v_p(x), v_p(y)\} \\ \Longrightarrow -v_p(x+y) &\leq -\min\{v_p(x), v_p(y)\} \\ &= \max\{-v_p(x), -v_p(y)\} \\ \Longrightarrow p^{-v_p(x+y)} &\leq p^{\max\{-v_p(x), -v_p(y)\}} \\ &= \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\} \\ \Longrightarrow |x+y|_p &\leq \max\{|x|_p, |y|_p\}. \end{aligned}$$

Donc l'application $x \longrightarrow |x|_p = p^{-v_p(x)}$ est une norme non archimédienne sur $\mathbb{Q}$ (appelle norme p-adique). $\square$

Notation 1.1. *Soit* $a \in \mathbb{K}$ *et* $R > 0$. *Posons*

1. $D^+(a, R) = \{x \in \mathbb{K}, |x-a|_p \leq R\}$ *le disque fermé de centre* a *et rayon* R.
2. $D^-(a, R) = \{x \in \mathbb{K}, |x-a|_p < R\}$ *le disque ouvert de centre* a *et rayon* R.
3. $D(a, R)$: *l'un ou l'autre de ces deux disque.*
4. $C(a, R) = \{x \in \mathbb{K}, |x-a|_p = R\}$ *le cercle dans* $\mathbb{K}$ *de centre* a *et rayon* R.

1.3 Propriétés topologiques et analytiques des corps non archimédiens

1.3.1 Propriétés topologiques

Proposition 1.3. *[1] Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $R \in]0, +\infty[$, on a les propriétés suivantes*

P.1. *Le cercles est un ensemble ouvert.*

P.2. *Un disque $D(a, R)$ est un ensemble ouvert et fermé à la fois.*

P.3. *Tout point b de $D(a, R)$ est un centre de $D(a, R)$ (tout point d'un disque est un centre de ce disque).*

P.4. *Soient $D(a, R)$ et $D(b, R)$ deux disques de $\mathbb{K}$, alors il sont disjoints ou l'un est inclus dans l'autre.*

Preuve.

P.1) Soit $a \in \mathbb{K}$ et $R > 0$ pour montrer que $C(a, R)$ est un ensemble ouvert on prend $x \in C(a, R)$ et soit $0 < r < R$ alors

$$y \in D^{-}(x, r) \Longrightarrow |x - y| < r < R = |x - a|.$$

On a

$$|x - y| = |x - a + a - y| < |x - a| = R \Longrightarrow |y - a| = |x - a| = R \Longrightarrow y \in C(a, R).$$

Donc $C(a, R)$ est un ensemble ouvert.

P.2) i) On a, dans un espace métrique tout disque ouvert $D^{-}(a, R)$ est un ensemble ouvert.

D'autre part on a pour démontrer que $D^{-}(a, R)$ est fermé dans $\mathbb{K}$ on montre que

$$C_{\mathbb{K}}^{D^{-}(a,R)} = \{x \in \mathbb{K}, |x - a| \geq R\}$$

est un ensemble ouvert

on a

$$C_{\mathbb{K}}^{D^{-}(a,R)} = \{x \in \mathbb{K}, |x - a| > R\} \cup C(a, R)$$

le cercle C(a,R) est un ensemble ouvert et l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{k}, |x - a| > R\} = C_{\mathbb{k}}^{D^{+}(a,R)}$$

est ouvert car $D^{+}(a, R)$ est un ensemble fermé

$\Longrightarrow C_{\mathbb{k}}^{D^{-}(a,R)}$ est un ensemble ouvert (union de deux ouvert est un ouvert)

$\Longrightarrow D^{-}(a, R)$ est un ensemble fermé

ii) Dans un espace métrique, le disque fermé $D^{+}(a,R)$ est un ensemble fermé. D'autre part on a

$$D^{+}(a,R) = C(a,R) \cup D^{-}(a,R)$$

$C(a,R)$ est un ensemble ouvert (d'après **P.1**).
$D^{-}(a,R)$ est un ensemble ouvert (d'après **P.2**).
Donc $D^{+}(a,R)$ est un ensemble ouvert.

P.3) i) Soit $x \in D^{-}(a,R)$ montrons que $D^{-}(a,R) = D^{-}(x,R)$
soit

$$y \in D^{-}(a,R) \Longrightarrow |y-a| < R$$

$$|y-x| = |y-a+a-x| \leq max\{|y-a|, |a-x|\} < R$$

Donc

$$y \in D^{-}(x,R) \Longrightarrow D^{-}(a,R) \subset D^{-}(x,R)$$

de la même façon on montre que

$$D^{-}(x,R) \subset D^{-}(a,R)$$

donc

$$D^{-}(a,R) = D^{-}(x,R)$$

ii) de la même façon , on montre que

$$D^{+}(a,R) = D^{+}(x,R) \quad \forall x \in D^{+}(x,R)$$

P.4) Soit D(a,R) et $D(b,\rho)$ deux disque de $\mathbb{K}$ on montre que

$$D(a,R) \cap D(b,\rho) \neq \varnothing \Longrightarrow D(a,R) \subset D(b,\rho) \quad ou \quad D(b,\rho) \subset D(a,R)$$

soit $R < \rho$ et $x \in D(a,R) \cap D(b,\rho)$ d'après (**P.3**).
On a $D(a,R) = D(x,R)$ et $D(b,\rho) = D(x,\rho)$
mais

$$D(x,R) \subset D(x,\rho).$$

Donc

$$D(a,R) \subset D(b,\rho)$$

lorsque on suppose que $\rho < R$, on trouve que $D(b,\rho) \subset D(a,R)$

□

Remarque 1.2. *le cercle $C(a,R)$ est un ensemble fermé, on a* $C(a,R) = D^{+}(a,R) \cap C_{\mathbb{K}}^{D^{-}(a,R)}$.

1.3.2 Propriétés analytiques

Théorème 1.5. *[7] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans le corps non archimédien $\mathbb{K}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|a_{n+1} - a_n\| = 0.$$

Preuve.
La nécessité
on a dans un corps norme $(a_n)_{n\geq 0}$de Cauchy

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq n_0 \qquad \|a_p - a_q\| < \varepsilon \\
&\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \qquad \|a_{n+1} - a_n\| < \varepsilon \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0
\end{aligned}$$

La suffisance
Soit $\varepsilon > 0$ par hypothèse il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq n_0$ on a $\|a_{m+1} - a_m\| < \varepsilon$
On a

$$\begin{aligned}
\|a_p - a_q\| &= \|a_p - a_{p-1} + a_{p-1} - a_{p-2} + ... - a_{q+1} + a_{q+1} - a_q\| \\
&\leq \max\{\|a_p - a_{p-1}\|, \|a_{p-1} - a_{p-2}\|, .., \|a_{q+1} - a_q\|\} \\
&< \max\{\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon\} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$, $p > q \geq n_0 \quad \|a_p - a_q\| < \varepsilon$
donc la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. □

maintenant soit la série $\sum_{k\geq 0} a_k$, $a_k \in \mathbb{K}$ on sait que la série $\sum_{k\geq 0} a_k$
1) converge si et seulement si la suite de la somme partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ converge dans $\mathbb{K}$.
2) converge absolument dans $\mathbb{K}$ si $\sum_{k\geq 0} \|a_k\|$ converge dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4. *[1] soit $\mathbb{K}$ est un corps non archimédien complet et soit $\sum_{k\geq 1} a_k$, $a_k \in \mathbb{K}$*
$\sum_{k\geq 1} \|a_k\|$ converge dans $\mathbb{R} \Longrightarrow \sum_{k\geq 1} a_k$ converge dans $\mathbb{K}$.

Preuve.
Soit $\sum_{k\geq 1} \|a_k\|$, $a_k \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
on\ a \ \sum_{k\geq 1} |a_k| \ converge\ dans\ \mathbb{R} &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \ \sum_{n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon \\
&\Longrightarrow |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon \quad (\forall n, m \in \mathbb{N}, n > m \geq n_0) \\
&\Longrightarrow (S_n)_{n\geq 0}\ est\ une\ suite\ de\ cauchy\ dans\ \mathbb{K},\ et\ \mathbb{K}\ complet \\
&\Longrightarrow (S_n)\ converge\ dans\ \mathbb{K} \\
&\Longrightarrow \sum_{k\geq 1} a_k\ converge\ dans\ \mathbb{K}
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Proposition 1.5. *[4] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans le corps non archimédien complet $\mathbb{K}$, Si $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = a$ dans $\mathbb{K}$, alors on a*

$$\begin{cases} \cdot \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|a_n\| = 0 \\ ou\ \ bien \\ \cdot \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|a_n\| = \|a_{n_0}\| \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \end{cases}$$

(la suite $(\|a_n\|)_{n\geq 0}$ est stationnaire a partir d'un rang n_0).

Preuve.
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $\mathbb{K}$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$
on a $(|a_n|)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ car

$$0 \leq \|a_m\| - \|a_n\|| \leq \|a_m - a_n\| \longrightarrow 0$$

On a donc $(|a_n|)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, ce qui donne $(|a_n|)_n$est convergente dans $\mathbb{R}$. Soit l sa limite

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = l = |a|$$

Si $|a| \neq 0 \Longrightarrow |a| > 0$
alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \Longrightarrow |\|a_n\| - l| < \varepsilon$$

$$pour\ \varepsilon = \frac{l}{2} > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}\ : \forall n \geq n_1 \Longrightarrow \|a_n\| > \frac{l}{2}$$

en effet

$$|\|a_n\| - l| < \frac{l}{2} \Longrightarrow \frac{l}{2} < \|a_n\| < \frac{l}{2} + l$$

De même, comme $(a_n)_n$ est de cauchy dans $\Bbbk$, alors

$$pour\ \varepsilon = \frac{l}{2} > 0, \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad m > n > n_2 \Longrightarrow \|a_m - a_n\| < \frac{l}{2}$$

Donc

$$\forall n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$$

on a

$$\|a_m\| = \|a_m - a_n + a_n\| \leq \max(\|a_m - a_n\|, \|a_n\|) = \|a_n\|$$

si $n = n_0$ *on a* : $\|a_m\| \leq \|a_{n_0}\| \quad \forall m \geq n_0$
de même on a

$$\|a_n\| = \|a_n - a_m + a_m\| \leq \max(\|a_n - a_m\|, \|a_m\|) = \|a_m\|$$

si $n = n_0$ *on a* : $\|a_m\| \geq \|a_{n_0}\| \quad \forall m \geq n_0$
d'ou

$$\|a_m\| = \|a_{n_0}\| \quad \forall m \geq n_0$$

et pour $m \longrightarrow +\infty$ on a $|a| = |a_{n_0}|$. □

Proposition 1.6. *[1] Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *une série dans un corps non archimédien complet* $(\mathbb{K}, |.|)$.
On a

1. $\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge dans* $\mathbb{K} \Longleftrightarrow (a_n)_n$ *converge vers* 0 *dans* $\mathbb{K}$.
2. $|\sum_{n\geq 0} a_n| \leq \max_{n\geq 0} |a_n|$.

Preuve.
i)on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} a_k \quad \textit{converge dans } \mathbb{K} &\Longleftrightarrow S_n \textit{ converge dans } \mathbb{K} \\
&\overset{\mathbb{K}\ complet}{\Longleftrightarrow} (S_n) \textit{ de Cauchy} \\
&\Longleftrightarrow \|S_n - S_{n-1}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Longleftrightarrow \|a_n\| \longrightarrow 0 \\
&\Longleftrightarrow a_n \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

ii) Si $\sum a_n = 0$, on a le résultat.
Sinon d'après la proposition précédente on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \quad |\sum_{n=0}^{\infty} a_n| = |\sum_{n=0}^{n_0} a_n|$$

D'autre part on a

$$\underset{n_0\geq n\geq 0}{max} |a_n| \leq \underset{n\geq 0}{max} |a_n|$$

Donc

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| = |\sum_{n=0}^{n_0} a_n| \leq \underset{0\leq n\leq n_0}{max} |a_n| \leq \underset{0\leq n}{max} |a_n|$$

Ce qui termine la démonstration. □

1.3.3 Complétion de $\mathbb{Q}$ par rapport à la norme p-adique

L'espace métrique $\mathbb{Q}$ muni de la norme p-adique n'est pas complet.
On va donner un exemple de suite de Cauchy divergent pour $p = 5$. On définit deux suite d'entiers a_n et x_n par

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 = 2 \\ x_1 &= a_0 + a_1 5 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= a_0 + ... + a_{n-1}5^{n-1} \\ x_n &= x_{n-1} + a_n 5^n \end{aligned}$$

On détermine $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ par avoir la congruence $x_n^2 + 1 \equiv 0[5^n]$ x_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car

$$|x_n - x_{n-1}|_5 \leq \frac{1}{5^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cependant elle ne converge pas vers $x \in \mathbb{Q}$, puisque si elle avait une limite $x \in \mathbb{Q}$, on aurait $x^2 + 1 = 0$.

Puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas complet par rapport à $|.|_p$, on le complète et on obtient un corps complet que l'on note $\mathbb{Q}_p$ et qui s'appelle le corps des nombres p-adique.

Pour un nombre premier p, on définit la norme p-adique sur $\mathbb{Q}_p$ comme suite.

Remarque 1.3. *Pour la norme p-adique et pour $x \in \mathbb{Q}_p$, On a $|.|_p$ peut être prolonger de $\mathbb{Q}$ sur tout $\mathbb{Q}_p$ de la façon suivante*

$$|x|_p = \lim_{n\longrightarrow\infty} |x_n|_p, \ (x_n)_n \ \textit{ est un suite de Cauchy dans } \mathbb{Q}.$$

Définition 1.8. *On dit que $x \in \mathbb{Q}_p$ est un entier p-adique si son expansion canonique p-adique ne contient que de puissance positives de p, autrement dit la valuation p-adique de x est positive*
l'ensemble des entiers p-adique se note

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, \ x = \sum_{n\geq 0} a_n p^n\}$$

avec $a_n \in \{0, \cdots, p-1\}$ pour tout n, ce développement est unique et s'appelle le développement de Hensel de x.

Remarque 1.4. *La partie $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}_p$.*

Théorème 1.6. *[1] L'ensemble $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, \ v_p(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{Q}_p, \ |x|_p \leq 1\}$$

$\mathbb{Z}_p$ représente le disque unité de $\mathbb{Q}_p$ de rayon 1 et de centre 0. On l'appelle anneau des entiers p-adiques.

Théorème 1.7. *[2] L'ensemble $\mathbb{Z}_p$ muni de la topologie associée à la norme p-adique est un ensemble compacte.*

Définition 1.9. *On note $\mathbb{Z}_p^*$ l'ensemble des entier p-adique inversible dans $\mathbb{Z}_p$*

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x = \sum_{n \geq 0} a_n p^n,\ a_0 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{Q}_p,\ |x|_p = 1\}.$$

Conséquence 1.3. *Si $x \in \mathbb{Q}_p$ et $|x|_p = p^{-n}$ alors x admet unique représentation*

$$x = p^n.u \text{ ou } u \in \mathbb{Z}_p^*$$

car

$$|x|_p = p^{-n} \Longrightarrow x = p^n.u,\ (p,u) = 1 \Longrightarrow x = p^n \underbrace{(a_0 + a_1 p + \ldots)}_{u}, a_0 \neq 0$$

où

$$|u|_p = |a_0 + a_1 p + \ldots|_p = 1 \Longrightarrow u \in \mathbb{Z}_p^*.$$

Remarque 1.5. *L'inverse de p n'est pas un entier p-adique.*

Proposition 1.7. *[1] Le corps $\mathbb{Q}_p$ est l'ensemble des fractions de $\mathbb{Z}_p$*

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{b},\ (a,b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^*\}.$$

Théorème 1.8. *[3] L'ensemble des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$, est défini par*

$$\mathbb{Q}_p = \{\sum_{n \geq k} a_n p^n,\ k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_n < p\}.$$

1.4 $\mathbb{C}_p$-Corps des nombres complexes p-adiques

Définition 1.10. *On dit qu' un corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clôs si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$ admet des racine dans $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.8. *[2] Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs pour tout p-premier.*

Preuve.
On considère le polynôme $P(x) = x^2 - p \in \mathbb{Q}_p[x]$. Supposons que $P(x)$ admet des racines dans $\mathbb{Q}_p$, donc

$$P(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = p$$

alors

$$|x^2|_p = |x|_p^2 = |p|_p = p^{-1}$$

donc

$$\begin{aligned} |x|_p^2 = p^{-1} &\Longrightarrow |x|_p = p^{\frac{-1}{2}} \\ &\Longrightarrow v_p(x) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Contradiction avec $v_p(x) \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Q}_p$ donc $P(x)$ n'est pas des racines dans $\mathbb{Q}_p$ ce qui preuve que $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs. □

Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considérer une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ que l'on note en général $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et qui n'est pas complet. Nous avons besoin de la compléter pour former un plus grand corps complet et algébriquement clôs noté $\mathbb{C}_p$. On montrer que l'on peut prolonger la norme à ce corps qui possède aussi une norme p-adique, qui l'on note toujours $|.|_p$.

Définition 1.11. *Le corps des nombres complexes p-adique noté $\mathbb{C}_p$ est défini comme le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ par rapport à la norme p-adique $|.|_p$.*

Proposition 1.9. *[2] Le corps $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact.*

Preuve.
Considérons l'équation $x^n - p = 0$, et soit x_n l'un quelconque de ses racines. montrons que de cette suite, on ne extraire un sous suite convergente, bien qu'elle soit borne, puisque clairement x_n est des valeur absolue inférieur ou égale à un. On a

$$|x_n|_p = p^{-\frac{1}{n}} \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} |x_n|_p = \lim_{n \longrightarrow \infty} p^{-\frac{1}{n}} = 1$$

pour tout n, $|x_n|_p < 1$. Soit (x_{n_m}) une suite extraire convergente et y sa limite, alors $|y|_p = 1$, mais

$$|x_{n_m} - y|_p = \max(|x_{n_m}|_p, |y|_p) = |y|_p = 1$$

et ceci est contradiction, car cette quantité doit tendre vers zéro. □

Notation 1.2. *Le groupe des valeurs de $\mathbb{C}_p^*$ $\Big(i.e|\mathbb{C}_p^*| = \{|x|_p,\ x \in \mathbb{C}_p,\ x \neq 0\}\Big)$ est l'ensemble de puissance rationnelles de p.*

Proposition 1.10. *[5] Le corps $\mathbb{C}_p$ posséde les propriétés suivantes*

1. *$\mathbb{C}_p$ est algébriquement clôs.*
2. *$|\mathbb{C}^*{}_p|_p = \{p^q,\ q \in \mathbb{Q}\}$.*
3. *$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p \subset \overline{\mathbb{Q}}_p \subset \mathbb{C}_p$.*

1.5 Fonctions Analytiques sur $\mathbb{C}_p$

Dans cette section nous étudions les séries entières complexes p-adiques est les fonctions analytiques dans $\mathbb{C}_p$.

1.5.1 Séries entières complexes p-adiques

Définition 1.12. *Une série entière dans $\mathbb{C}_p$ est une série dont le terme général est $a_n(x-a)^n$ où n est un entier naturel $x, a \in \mathbb{C}_p$ et $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$.*

Définition 1.13. (***Rayon de convergence***)
le rayon de convergence d'une série complexe p-adique $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ qu'on note R, où $0 \leq R \leq +\infty$, est défini par

$$R = \sup\{|x-a|_p ; x \in \mathbb{C}_p \text{ et} \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n \text{ converge}\} \in \mathbb{R}^+ \cup +\infty.$$

Proposition 1.11. *[11]* (***calcul de rayon de convergence***)
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ ou $a_n \in \mathbb{C}_p$, alors

1. *si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, on a $R = \dfrac{1}{L}$ (formule de d'Alembert).*
2. *si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, on a $R = \dfrac{1}{L}$ (formule de Cauchy).*
3. *dans tout les cas, on a $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (formule d'Hadamard).*

Théorème 1.9. *[12] Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ une série entière, où $a_n \in \mathbb{C}_p$ et $0 \leq R \leq +\infty$ on a*

1. *Si $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x-a|_p < R$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ converge.*
2. *Si $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x-a|_p > R$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ diverge.*
3. *Si $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x-a|_p = R$ donc, on peut avoir :*
   i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p R^n = 0$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ est converge sur la totalité du cercle $C(a,R)$.
   ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p R^n \neq 0$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ est divergente sur la totalité du cercle $C(a,R)$.

Exemple 1.4.
Soit la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^{n+1}(x-a)^n}{n}$, d'après la formule de Cauchy on a

$$R^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|_p^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|n|_p^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p^{-\frac{v_p(n)}{n}}} = 1$$

(car $\frac{v_p(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^{n+1}(x-a)^n}{n}$ converge sur le disque $D^-(a,1)$ et pour $R=1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p.1 \neq 0$$

d'ou la série diverge sur le cercle $C(a,1)$.

Proposition 1.12. *[2] La série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *est sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Preuve.
Soit R_1 est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$
avec $a, a_n \in \mathbb{C}_p$

$$\begin{aligned} R_1^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} |na_n|_p^{\frac{1}{n-1}} &= \limsup_{n\to+\infty}(|n|_p^{\frac{1}{n}}|a_n|_p^{\frac{1}{n}}) \\ &= (\limsup_{n\to+\infty}|n|_p^{\frac{1}{n}}).(\limsup_{n\to+\infty}|a_n|_p^{\frac{1}{n}}) \end{aligned}$$

et comme

$$|n|_p^{\frac{1}{n}} = p^{-\frac{v_p(n)}{n}}$$

On a

$$R_1^{-1} = (\limsup_{n\to+\infty} p^{-\frac{v_p(n)}{n}})(\limsup_{n\to+\infty}|a_n|_p^{\frac{1}{n}})$$

on sait que $v_p(n)$ est bornée et $v_p(n) < n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
D'ou le résulta. $\square$

1.5.2 Fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_p$

Définition 1.14. *On dira qu'une fonction f :*$D^+(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ *est analytique sur* $D^+(a,r)$ *pour tout* $r > 0$*, s'il existe une suite* $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ *telle que* $|a_n|r^n \longrightarrow 0$*, et pour tout* $x \in D^+(a,r)$ *on a* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$*.*

Définition 1.15. *Une fonction f :*$D^-(a,R) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ *est analytique sur* $D^-(a,R)$ *s'il existe une suite unique* $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ *satisfaisant* $|a_n|r^n \longrightarrow 0$ *pour r, 0<r<R*
et pour $x \in D^+(a,r)$ *on a*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n.$$

Remarques 1.3.
1) Une fonction de variable complexe p-adique définie sur un disque $D(a,R)$ *ou* $a \in \mathbb{C}_p$ *est dite analytique sur ce disque lorsqu'elle admet un développement en série entière en tout point de* $D(a,R)$*.*
2) Si $R = +\infty$ *alors f est analytique sur tout* $\mathbb{C}_p$ *et on dit que f est entière.*

Exemples 1.3.
Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} p^{2n^2}x^n$*,* $x \in \mathbb{C}_p$ *on a* $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} p^{-2n}} = +\infty$ *alors* $\sum_{n\geq 0} p^{2n^2}x^n$ *est converge sur* $\mathbb{C}_p$ *donc f une fonction entière.*

Notation 1.3. *on note* $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ *l'ensemble des fonctions entières sur* $\mathbb{C}_p$ *et* $\mathcal{A}(D(a,R))$ *l'ensemble des fonctions analytiques sur le disque* $D(a,R)$.

Proposition 1.13. *[12] Soit* $f(x)=\sum a_n(x-a)^n$ *les assertions suivantes sont équivalentes*
1)$f\in\mathcal{A}(D^-(a,R))$.
2) *la série* $\sum a_n(x-a)^n$ *est convergente pour tout* $x\in D^-(a,R)$.

Théorème 1.10. *[4] (**Dérivé des fonctions analytiques**)*
On a

1. *l'ensemble* $\mathcal{A}(D^+(a,R))$,*(resp* $\mathcal{A}(D^-(a,R))$*) est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}_p$.
2. *Si* $f(x)=\sum\limits_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$ *est un élément de* $\mathcal{A}(D^+(a,R))$*(resp* $\mathcal{A}(D^-(a,R))$*)*
   Si f est continue et dérivable sur $D(a,R)$ *alors sa dérive* $f'\in\mathcal{A}(D^+(a,R))$*(resp* $\mathcal{A}(D^-(a,R))$*) tel que* $f'(x)=\sum\limits_{n\geq 1}na_n(x-a)^{n-1}$
   plus généralement si $R>0$, *alors la série f est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque de convergence de* f, *de plus on a*
   $$f^{(k)}(x)=k\,!\sum_{n\geq k}C_n^k a_n(x-a)^{n-k}.$$

Preuve.

1. il est facile de vérifier que $\mathcal{A}(D^+(a,R))$ $(resp\ \mathcal{A}(D^-(a,R)))$ pour tout $0<r<R$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}_p$.
2. i) Soit x un élément fixé de $D^+(a,R)$, et soit $h\in\mathbb{C}_p$ tel que $x+h\in D^+(a,R)$.
   On a
   $$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=\sum_{n\geq 0}a_n[(x+h-a)^n-(x-a)^n]\\&=h\sum_{n\geq 0}a_n[(x+h-a)^{n-1}+(x+h-a)^{n-2}(x-a)+...\\&\quad ...+(x+h-a)(x-a)^{n-2}+(x-a)^{n-1}]\end{aligned}$$
   la somme de droite est majorée en valeur absolu par $\max\limits_{n\geq 1}|a_n|R^{n-1}$ qui est fini car $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|R^{n-1}=0$
   on a
   $$|f(x+h)-f(x)|_p\leq |h|\max_{n\geq 0}|a_n|_pR^{n-1}$$
   donc
   $$\lim_{h\to 0}|f(x+h)-f(x)|_p=0$$
   d'ou la continuité de f sur $D^+(a,R)$
   Maintenant posons $g(x)=\sum\limits_{n\geq 1}na_n(x-a)^{n-1}$, $g\in\mathcal{A}(D^+(a,R))$ car $\forall n\geq 1$ on a
   $$0\leq |na_n|_pr^{n-1}<|a_n|_pR^{n-1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

mais

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x) = h\sum_{n\geq 0} a_n[(x+h-a)^{n-1} + (x+h-a)^{n-2}(x-a) + ...$$

$$... + (x+h-a)(x-a)^{n-2} + (x-a)^{n-1} - n(x-a)^{n-1}]$$

$$= h(\textit{somme majorée en valeur absolue par } \max_{n\geq 2}|a_n|R^{n-2})$$

donc

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1} \; et \; f' \in A(D^+(a,R)).$$

ii) Soit $x \in D^-(a,R)$ et ,$0 < r < R$ tel que $x \in D^+(a,r)$ f est analytique sur $D^+(a,r)$ elle est
d'après i) continue et dérivable en x et on a

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$$

donc f est continue et dérivable sur $D^-(a,R)$, sa dérivée est un élément de $\mathcal{A}(D^-(a,R))$ car $f'\in A(D^+(a,r))$ pour $0 < r < R$

par récurrence on montre l'égalité

$$f^{(k)}(x) = k\,! \sum_{n\geq k} C_n^K a_n(x-a)^{n-k}.$$

$\square$

CHAPITRE 2

PREMIER THÉORÈME DE NEVANLINNA P-ADIQUE.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats de la théorie de Nevanlinna Complexe, et quelques définitions sur les zéros des fonctions analytiques, ainsi que le polygone de valuation et la théorie de Nevanlinna p-adique

2.1 Premier théorème de Nevanlinna complexe

Définition 2.1. *Soit f une fonction analytique au voisinage de z_0. On a z_0 est un zéro de f si $f(z_0) = 0$.*

Définition 2.2. *On dit que le point Singulier isolé z_0 de f est un pôle de f si la partie principale de la sérié de Laurent contient un nombre fini de termes*
$(i.e. f(x) = \sum\limits_{k=-n_0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ où $c_{-n_0} \neq 0 n_0 \in \mathbb{N})$.
On dit que, dans ce cas que z_0 est un pôle de $f(z)$ d'ordre n_0.

Théorème 2.1. *[12] Soit z_0 un point singulier isolé de $f(z)$, on a l'équivalence entre*
i) z_0 est un pôle d'ordre n de $f(z)$.
ii) z_0 est un zéro d'ordre n de $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Définition 2.3. *On dit que f est une fonction méromorphe dans $D(a,R) \subset \mathbb{C}$ si $f = \dfrac{h}{g}$ où $g, h \in \mathcal{A}(D(a,R))$.*

Notation 2.1. *On note $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}(D(a,R))$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur le disque $D(a,R)$.*

2.1.1 Formule de Jensen

Théorème 2.2. *[11] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non constante dans K tel que*

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R \text{ et } 0 < R < +\infty\}$$

Soient $\{a_j\}_{j=1}^{n}$ la suite des zéros de f(z) dans K tel que $0 < |a_j| < |a_{j+1}|$ et $\{b_k\}_{k=1}^{p}$ la suite des pôles de f(z) dans K tel que $0 < |b_k| < |b_{k+1}|$ alors si $f(0) \neq 0, +\infty$ on a

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|d\theta + \sum_{j=1}^{n} \log\frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{p} \log\frac{|b_k|}{R} \tag{2.1}$$

la formule (2.1) est appelle formule de Jensen.

2.1.2 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Définition 2.4. *Soit $x \in \mathbb{R}$*

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x & si\ x \geq 1 \\ 0 & si\ 1 > x \geq 0 \end{cases}$$

Proposition 2.1. *[13] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ on a :*

1. $\log a \leq \log^+ a \quad \forall a > 0.$
2. $\log^+ a \leq \log^+ b \quad a \leq b.$
3. $\log a = \log^+ a - \log^+ \frac{1}{a} \quad \forall a \geq 0.$

Notations 2.1.

1. *on pose*
$$m(R,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(Re^{i\theta})|d\theta$$
$m(R,f)$ est appelle fonction de compensation.
2. *on pose*
$$N(R,f) = \sum_{k=1}^{p} \log\frac{R}{|b_k|} = \int_0^R \frac{n(t,+\infty)}{t}dt$$
$N(R,f)$ est la fonction de comptage des pôle s de f
où, $n(t,+\infty)$ est le nombre des pôles de f dans $|z| \leq t$
et, $n(0,+\infty)$ est l'ordre de $z_0 = 0$ comme pôle de f

3.
$$N(R,\frac{1}{f})=\sum_{j=1}^{n}\log\frac{R}{|a_j|}=\int_0^R\frac{n(t,0)}{t}dt$$

$N(R,\frac{1}{f})$ est la fonction de comptage des zéros de f
où, $n(t,0)$ est le nombre des zéros de f dans $|z|\leq t$
et, $n(0,0)$ est l'ordre de $z_0=0$ comme zéro de f

Donc d'après la proposition 2.1 et les notations on obtient la forme plus simple de Jensen :

$$\begin{aligned}\log|f(0)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(Re^{i\theta})|}d\theta+\int_0^R\frac{n(t,+\infty)}{t}dt\\ &-\int_0^R\frac{n(t,0)}{t}dt\\ &= m(R,f)-m(R,\frac{1}{f})+N(R,f)-N(R,\frac{1}{f})\end{aligned}$$

Définition 2.5. *Soit f une fonction méromorphe, on obtient*

$$T(R,f)=m(R,f)+N(R,f)$$

la fonction $T(R,f)$ est appelée fonction caractéristique de f ou bien fonction de Nevanlinna.

Remarque 2.1. *la formule de Jenseen devient*

$$T(R,f)=T(R,\frac{1}{f})+\log|f(0)|$$

Proposition 2.2. *[11] soit $a_i\in\mathbb{C},\ i=1\cdots p,$ on a*

1. $T(R,\prod_{i=1}^{p}f_i)\leq\sum_{i=1}^{p}T(R,f_i).$
2. $T(R,\sum_{i=1}^{p}f_i)\leq\sum_{i=1}^{p}T(R,f_i)+\log p.$
3. $|T(R,f)-T(R,f-a)|\leq\log^+|a|+\log 2$ *où $a=$ constante $\in\mathbb{C}$.*

2.1.3 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 2.3. *[11] Soit f une fonction méromorphe dans $|z|\leq R$, $0\leq R<+\infty$ et soit $a\in\mathbb{C}$, on pose*

$$f(z)-a=\sum_{i=\lambda}^{+\infty}c_iz^i,\ \lambda\in\mathbb{Z}\quad c_\lambda\neq 0$$

alors

$$T(R,\frac{1}{f-a})=T(R,f)-\log|f(0)-a|+\xi(R,a)$$

où

$$|\xi(R,a)|\leq\log^+|a|+\log 2.$$

Preuve.
On a

$$\begin{aligned}
m(R,\frac{1}{f-a})+N(R,\frac{1}{f-a}) &= T(R,\frac{1}{f-a})\\
&= T(R,f-a)-\log|f(0)-a|\\
&= T(R,f)+T(R,f-a)-T(R,f)-\log|f(0)-a|\\
&= T(R,f)-\log|f(0)-a|+(T(R,f-a)-T(R,f))\\
&= T(R,f)-\log|f(0)-a|+\xi(R,a)
\end{aligned}$$

où $\quad |\xi(R,a)|=|T(R,f-a)-T(R,f)|\leq \log^+|a|+\log 2.$ □

Remarque 2.2. *Le théorème de Nevanlinna s'écrit sous la forme*

$$T(R,\frac{1}{f-a})=T(R,f)+O(1)\quad \forall a\in\mathbb{C}$$

Notation 2.2. *Il est plus pratique d'écrire*
$m(R,a), N(R,a)$ *et* $T(R,a)$ *au lieu de* $m(r,\frac{1}{f-a}), N(R,\frac{1}{f-a}),$ *et* $T(R\frac{1}{f-a}).$

Exemple 2.1. *Soit* $f(z)=e^z\in\mathcal{M}(\mathbb{C}),$ *on a* $e^z=e^{R\cos\theta+iR\sin\theta},\ z=Re^{i\theta}$
- *si* $a=0,$ *on a*

$$n(t,\infty)=n(t,f)$$

et

$$N(R,f)=\int_0^R\frac{n(t,\infty)}{t}dt=0$$

$$\begin{aligned}
m(R,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\theta})|d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|e^{R\cos\theta+iR\sin\theta}|d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+e^{R\cos\theta}d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log e^{R\cos\theta}d\theta
\end{aligned}$$

ainsi

$$m(R,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}R\cos\theta d\theta=\frac{R}{\pi}$$

donc

$$m(R,f)+N(R,f)=T(R,f)=\frac{R}{\pi}$$

on a

$$N(R,0)=N(r,\frac{1}{e^z})=\int_0^R\frac{n(t,\frac{1}{e^z})}{t}dt=0$$

et

$$
\begin{aligned}
m(R,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(Re^{i\theta})|} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{e^{R\cos\theta}} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{-R\cos\theta} d\theta \\
&= -\frac{R}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos\theta \; d\theta
\end{aligned}
$$

ainsi

$$m(R,0) = \frac{R}{\pi}$$

donc

$$T(R,0) = m(R,0) + N(R,0) = \frac{R}{\pi} = T(R,f).$$

2.2 La distribution des zéros d'une fonction analytique p-adique

2.2.1 Zéros d'une fonction analytique p-adique

Dans cette partie, nous allons étudier les zéros des fonctions analytiques.

Définition 2.6. *Soit f une fonction analytique non nulle sur un disque $D(a,r), a \in \mathbb{C}_p$ et $r > 0$, on dit que $\alpha \in D(a,r)$ est un zéro de f si $f(\alpha) = 0$.*

Définition 2.7. ***(ordre de multiplicité d'un zéro)***
Soient $f \in \mathcal{A}(D^-(a,R))$,$\alpha \in D^-(a,R)$ et $r \in]0,R[$, tel que $D^+(\alpha,r) \subset D^-(a,R)$ et $f(x) = \sum_{n\geq q} a_n(x-\alpha)^n$, $\forall x \in D^+(\alpha,r)$ et $a_q \neq 0$, $q \in \mathbb{N}^*$.
On dit dans ce cas, que α est un zéro de f d'ordre q.

Remarque 2.3.
Si f admet α comme zéro d'ordre q, on posera $w_\alpha(f) = q$.
Si $f(\alpha) \neq 0$, on posera simplement $w_\alpha(f) = 0$.

Proposition 2.3. *[12] Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(a,R))$, $R > 0$ $a \in \mathbb{C}_p$, une fonction non nulle. Si α est un zéro d'ordre q de f, alors en peut écrire f sous la forme*

$$f(x) = (x-\alpha)^n g(x), \;\; \forall x \in D^+(\alpha,r), \;\; 0 < r < R$$

où g analytique au point α et $g(\alpha) \neq 0$.

Preuve.
Soit $x \in D^+(\alpha, r),\ 0 < r < R$ et comme α est un zéro d'ordre q de f, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq q} a_n (x-\alpha)^n, \quad \forall x \in D^+(\alpha, r) \\ &= (x-\alpha)^q \left[a_q + a_{q+1}(x-\alpha) + a_{q+2}(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots \right], \quad \forall x \in D^+(\alpha, r) \\ &= (x-\alpha)^q \sum_{n \geq 0} a_{q+n}(x-\alpha)^n, \quad \forall x \in D^+(\alpha, r) \\ &= (x-\alpha)^q g(x), \quad \forall x \in D^+(\alpha, r). \end{aligned}$$

Tel que $g(x) = \sum_{n \geq 0} a_{q+n}(x-\alpha)^n$ est une fonction analytique sur le disque $D^+(\alpha, r)$ et $g(\alpha) = a_q \neq 0$. □

Proposition 2.4. *[2]* ***(Principe des zéros isolés)***
Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(a, r))$ une fonction non nulle et soit $b \in D^-(a, r)$ tel que $f(b) = 0$, alors il existe $\rho > 0$ assez petit tel que

$$\forall x \in D^-(b, \rho) - \{b\}, \quad f(x) \neq 0.$$

Preuve.
Si b est un zéro de f, on peut écrire la fonction non nulle f sous la forme

$$f(x) = \sum_{n \geq q} a_n (x-b)^n, \quad a_q \neq 0, \quad q \in \mathbb{N}^*$$

il résulte que $|x-b|_p$ est assez petit, et non nul. On a

$$|f(x)|_p = |\sum_{n \geq q} a_n (x-b)^n|_p = \max_{n \geq q}\{|a|_p |x-b|_p^n\} = |a_q|_p |x-b|_p^q \neq 0$$

ce qui termine la preuve. □

Lemme 2.1. *[11] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constante, alors f admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}_p$, de plus si f n'est pas un polynôme (i.e $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[x]$) alors f a une infinité des zéros dans $\mathbb{C}_p$.*

Théorème 2.4. *[3]* ***(Strassman)***
Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$ une série entière non nulle avec des coefficient dans $\mathbb{C}_p$, et supposons que $f(x)$ converge pour tout $x \in D^-(a, 1)$, soit N un entier positif défini par les deux conditions

$$\begin{cases} 1)\ |a_N|_p = \max\limits_{n \geq 0} |a_n|_p \\ 2)\ |a_n|_p < |a_N|_p, \quad \forall n > N. \end{cases}$$

On a dans ce cas $f:\ D^+(a, 1) \longmapsto \mathbb{C}_p$, posséde au plus N zéros dans $D^+(a, 1)$.

Preuve.
La démonstration se fait par récurrence.

1. Pour $N = 0$ et d'après cette assertion $|a_0|_p > |a_n|_p$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nous démontrons que f n'a aucun zéro dans $D^+(a,1)$ $\quad (i.e.\ f(x) \neq 0,\ \forall x \in D^+(a,1))$
   En effet
   On pose $0 = f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots\ldots$, on a
   $|a_0|_p = |a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots\ldots|_p \leq \max\limits_{n\geq 1}|a_n(x-a)^n|_p \leq \max\limits_{n\geq 1}|a_n|_p < |a_0|_p$
   C'est une contradiction.

2. Supposons que $n > N$
   $$|a_N|_p = \max_{n\geq 0}|a_n|_p \ \ et \ \ |a_n|_p < |a_N|_p.$$
   et $f(\alpha) = 0$, pour certain $\alpha \in D^+(a,1)$. Choisissons $x \in D^+(a,1)$, on a
   $$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(\alpha) &= \sum_{n\geq 1} a_n[(x-a)^n - (a-\alpha)^n] \\ &= (x-\alpha)\sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n(x-a)^j(\alpha-a)^{n-1-j}. \end{aligned}$$
   Posons $k = n-1-j$, donc $n = k+j+1$, on obtient
   $$f(x) = (x-a)\sum_{j\geq 0} b_j(x-a)^j = (x-\alpha)g(x)$$
   où
   $$b_j = \sum_{k\geq 0} a_{j+1+k}(\alpha-a)^k.$$
   et $g(x)$ une série entière de coefficient b_j. Il est facile de voire que $\lim\limits_{j\to+\infty} b_j = 0$, on a
   $$|b_j|_p \leq \max_{k\geq 0}|a_{j+1+k}|_p \leq |a_N|_p,\ \ \forall j \geq 0$$
   de plus $\forall j \in \mathbb{N}$
   $$|b_{N-1}|_p = |a_N + a_{N+1}(\alpha-a) + a_{N+2}(\alpha-a)^2 + \ldots|_p = |a_N|_p$$
   et si $j \geq N$ On a
   $$|b_j|_p \leq \max_{k\geq 0}|a_{j+1+k}| \leq \max_{j\geq N+1}|a_j|_p < |a_N|_p$$
   Donc on a
   $$\begin{cases} |b_{N-1}|_p = \max|b_j|_p \\ |b_j|_p < |b_{N-1}|_p \ \ \forall j > N-1 \end{cases}$$
   Si on applique l'induction sur la fonction $g(x)$, on conclut qu'elle posséde au plus $(N-1)$ zéros sur $D^+(a,1)$. Alors $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ possédé au plus N zéros sur $D^+(a,1)$.

$\square$

2.2.2 Le module maximum d'une fonction analytique p-adique

Proposition 2.5. *[2] Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$ tel que $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$ la formule*

$$\|f\| = \max_{x \in D^+(a,r)} |f(x)|_p$$

est une norme non-archimedienne.

Preuve.
Montrons que $\|f\|$ est une norme non-archimedienne

1. Soient $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r)),\ r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ et $\forall x \in D^+(a,r)$, On a

$$\begin{aligned}
\|f\| = 0 &\Longleftrightarrow \max_{x \in D^+(a,r)} |f(x)|_p = 0 \\
&\Longleftrightarrow |f(x)|_p = 0, \ \ \forall x \in D^+(a,r) \\
&\Longleftrightarrow f(x) = 0, \ \ \forall x \in D^+(a,r) \\
&\Longleftrightarrow f \equiv 0.
\end{aligned}$$

2. Soient $f, g \in \mathcal{A}(D^+(a,r)),\ \ r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ et $\forall x \in D^+(a,r)$, on a

$$\begin{aligned}
\|fg\| &= \max_{x \in D^+(a,r)} |(fg)(x)|_p \\
&= \max_{x \in D^+(a,r)} |f(x)g(x)|_p \\
&= \max_{x \in D^+(a,r)} |f(x)|_p |g(x)|_p \\
&= \max_{x \in D^+(a,r)} |f(x)|_p \max_{x \in D^+(a,r)} |g(x)|_p \\
&= \|f\| \|g\|.
\end{aligned}$$

3. Soient $f, g \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$, $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ et pour tout $x \in D^+(a,r)$, on a

$$\begin{aligned}
\|(f+g)(x)\| &= \max_{x \in D^+(a,r)} |(f+g)(x)|_p \\
|(f+g)(x)|_p &= |f(x) + g(x)|_p, \ \ \forall x \in D^+(a,r) \\
&\leq \max\{|f(x)|_p, |g(x)|_p\}, \ \ \forall x \in D^+(a,r)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\max_{x \in D^+(a,r)} |(f+g)(x)|_p &\leq \max_{x \in D^+(a,r)} \{\max\{|f(x)|_p, |g(x)|_p\}\} \\
&= \max\{\max_{x \in D^+(a,r)} \{|f(x)|_p, |g(x)|_p\}\} \\
&= \max\{\max_{x \in D^+(a,r)} |f(x)|_p, \max_{x \in D^+(a,r)} |g(x)|_p\} \\
&= \max\{\|f(x)\|, \|g(x)\|\}.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in D^{+}(a,r) \quad \|f+g\| \leq \max\{\|f\|, \|g\|\}$.

Alors $\|.\|$ est un norme non archimedienne.

□

Proposition 2.6. *[19] Soit* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n \in \mathcal{A}(D^{+}(a,r))$ *telle que* $|a_n|_p r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *l'application*

$$f \longrightarrow |f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n \quad \textbf{\textit{(module maximum)}}$$

est une norme non-archimedienne sur $\mathcal{A}(D^{+}(a,r))$ *et on a*

$$\max_{x\in D^{+}(a,r)} |f(x)|_p = |f|(r)$$

cette relation est appelée ***égalité de Cauchy.***

Proposition 2.7. *[2] Soit* $f \in \mathcal{A}(D^{+}(a,r))$ *avec* $r > 0, a \in \mathbb{C}_p$ *une fonction non nulle, alors*

P.1. *La fonction* $|f|(r)$ *est croissante.*

P.2. *Si* f *a un zéro* b *dans le disque* $D^{+}(a,r)$, *la fonction* $|f|(r)$ *est strictement croissante* $\forall r > |b|_p$.

P.3. *La fonction* $|f|(r)$ *est continue.*

Preuve.

P.1. On a $\quad |f|(r) = \max_{x\in D^{+}(a,r)} |f(x)|_p$

Si $r_1 < r_2$ on a

$$\begin{aligned} |f|(r_1) &= \max_{x\in D^{+}(a,r_1)} |f(x)|_p \\ &\leq \max_{x\in D^{+}(a,r_2)} |f(x)|_p \\ &= |f|(r_2) \end{aligned}$$

D'ou $|f|(r)$ est croissante.

P.2. Soit $r_0 > |b|_p$, on a alors $|f|(r_0) = |a_N| r_0^N, \;\; \forall N \geq 1$, en raison de la présence d'au moins un zéro dans le disque ferme de centre a, rayon r_0

Comme a_N n'est pas nul, si $r > r_0$. On a

$$|a_N|_p r^N > |a_N|_p r_0^N.$$

alors

$$|f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n \geq |a_N|_p r^N > |a_N|_p r_0^N = |f|(r_0)$$

D'où $|f|(r)$ est strictement croissante.

P.3. Soit $f \in \mathcal{A}(D^{+}(a,r))$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|_p r^n = 0$, $\forall 0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$ fixons $\rho \in]0,r[$, Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|_p\rho^n = 0$, donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\max_{0\leq n<n_1}|a_n|_p\rho^n = \max_{n\geq 0}|a_n|_p\rho^n = |f|(\rho)$$

Donc si $t \in]0,\rho]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|_p t^n = 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\max_{0\leq n<n_1}|a_n|_p t^n = \max_{n\geq 0}|a_n|_p t^n = |f|(t)$$

Comme la fonction $t \longrightarrow \max\limits_{n\leq N}|a_n|_p t^n = |f|(t)$ est clairement continue, on a le résultat.

□

Proposition 2.8. *[4] L'espace $\mathcal{A}(D^{+}(a,r))$, $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$muni de la norme $|.|(r)$ est un espace complet, Autrement dit, il s'agit d'un espace de Banach non-archimedien.*

Théorème 2.5. ***(Spécificité ultra métrique)****[16]*
Soit $f \in \mathcal{A}(D^{-}(a,r))$, $r > 0$, $\forall \rho \in]0,r[$, on a

$$|f'|(\rho) \leq \frac{1}{\rho}|f|(\rho)$$

Preuve.
Soit $f \in \mathcal{A}(D^{-}(a,r))$, alors $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ et $f'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$, $a \in \mathbb{C}_p$, pour $\rho \in]0,r[$, on a

$$\begin{aligned} |f'|(\rho) &= \max_{n\geq 1}|a_n n|_p\rho^{n-1} \\ &= \frac{1}{\rho}\max_{n\geq 1}|a_n|_p|n|_p\rho^n \\ &\leq \frac{1}{\rho}\max_{n\geq 0}|a_n|_p\rho^n \quad (car\ |n|_p \leq 1). \end{aligned}$$

D'où le résultat, même démonstration pour $f \in \mathcal{A}(D^{+}(a,r))$ □

Théorème 2.6. *[12] Soit $f \in \mathcal{M}(D^{-}(a,r))$, $r > 0$ $\forall \rho \in]0,r[$, on a*

$$\frac{|f'|(\rho)}{|f|(\rho)} \leq \frac{1}{\rho}$$

Preuve.
Si l'on écrit $f = \dfrac{g}{h}$ avec $g,h \in \mathcal{A}(D^{-}(a,r))$ sans zéros communs, pour $\rho \in]0,r[$, On a

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'h - gh'}{gh}$$

$$\left|\frac{f'}{f}\right|(\rho) = \left|\frac{g'h-gh'}{gh}\right|(\rho) = \frac{|g'h-gh'|(\rho)}{|gh|(\rho)}$$

Et comme $|g'h - gh'|(\rho) \leq \max\{|g'h|(\rho) + |gh'|(\rho)\}$ ce qui entraine que

$$\frac{|f'|(\rho)}{|f|(\rho)} \leq \max\left\{\frac{|g'|(\rho)|h|(\rho)}{|g|(\rho)|h|(\rho)}, \frac{|g|(\rho)|h'|(\rho)}{|g|(\rho)|h|(\rho)}\right\} \leq \max\left\{\frac{|g'|(\rho)}{|g|(\rho)}, \frac{|h'|(\rho)}{|h|(\rho)}\right\}.$$

On sait que $\dfrac{|g^{'}|(\rho)}{|g|(\rho)} \leq \dfrac{1}{\rho}$ et $\dfrac{|h^{'}|(\rho)}{|h|(\rho)} \leq \dfrac{1}{\rho}$. D'où l'inégalité. □

Lemme 2.2. *[2] Soit $P(x) = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_N x^N$, un polynôme de degré N de $\mathbb{C}_p[x]$, On suppose que*

$$|b_N|_p r^N = \max_{0 \leq n \leq N} |b_n| r^n = |P|(r), \quad r > 0$$

Donc le polynôme $P(x)$ a toutes ses racines dans le disque fermé de centre 0 et de rayon r.

Preuve.
Montrons que le polynôme $P(x)$ a toutes ses racines dans le disque $D^+(0, r),\ r > 0$
On factorise $P(x)$, Soit $\alpha_i,\ i = 1 \ldots N$ racines de $p(x)$ dans $\mathbb{C}_p$ (pas forcément distincts)

$$P(x) = b_N(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_N), \text{ Où } \ b_N \neq 0$$

Alors

$$\begin{aligned} |x - \alpha_i|(r) &= \max\{1 \times r, |\alpha_i|_p\}, \quad \forall i = 1 \ldots N \\ &= \max\{r, |\alpha_i|_p\}, \quad \forall i = 1 \ldots N \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} |P|(r) &= |b_N(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_N)|_p (r) \\ &= |b_N|_p \prod_{i=1}^{N} \max\{r, |\alpha_i|_P\} \end{aligned}$$

Donc

$$|P|(r) = |b_N|_p r^N = |b_N|_p \prod_{i=1}^{N} \max\{r, |\alpha_i|_P\}$$

D'où $r^N = \prod_{i=1}^{N} \max\{r, |\alpha_i|_P\}$ et comme $\max\{r, |\alpha_i|_p\} \geq r\ \forall i = 1 \ldots N$, on a $|\alpha_i|_p \leq r$ $\forall i = 1 \ldots N$. Donc on a bien montré que toutes les racines de P sont dans le disque $D^+(0, r)$. □

Théorème 2.7. *[2] Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(a, r)),\ \ r > 0$ et N le plus grand indice tel que*

$$|f|(r) = |a_N| r^N \ \ et \ \ |a_j| r^j < |a_N| r^N \quad \forall j > N.$$

On a

1. *Si $N \geq 1$, alors la fonction f a exactement N zéros dans le disque $D^{+}(a,r)$ compte tenu des multiplicité.*
2. *la fonction f n'a aucune zéro dans le disque $D^{+}(a,r)$ si et seulement si $N=0$ et sa norme est constante dans ce disque.*

Soit n le plus petit indice tel que $|f|(r) = |a_n|r^n$ et $|a_j|r^j < |a_n|r^n \ \forall j < n$ alors

i) *n le nombre des zéros de f dans $D^{-}(a,r)$.*

ii) *N-n le nombre des zéros de f sur le cercle $C(a,r)$.*

2.2.3 Polygone de valuation

Définition 2.8. *Soit $f \in \mathcal{A}(D^{+}(a,r))$, $r>0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ telle que $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, On définit la fonction φ_f par*

$$\begin{aligned} \varphi_f :\ I =]-\infty, \log R[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \log r &\longrightarrow \varphi_f(\log r) = \log|f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log|a_n|_p + n\log r\}. \end{aligned}$$

Cette fonction est appelée la fonction de valuation p-adique de f.

Proposition 2.9. *[2] La fonction φ_f vérifie les propriétés suivantes*

P.1) *C'est une fonction croissante, convexe, continue et affine par morceaux.*

P.2) *Si f a un zéro b dans $D^{-}(a,r)$, φ_f est strictement croissante pour $\log r > \log|b|_p$.*

P.3) *φ_f admet des dérivées à droite $\dfrac{d^{+}\varphi_f}{d(\log r)}$ est à gauche $\dfrac{d^{-}\varphi_f}{d(\log r)}$ en tout point $\log r \in I$. et on a*

- *$\dfrac{d^{+}\varphi_f}{d(\log r)} = N$ Le plus grand entier tel que $\varphi_f(\log r) = \log|a_N|_p + N\log r$ où N est le nombre des zéros de f dans le disque fermé $D^{+}(a,r)$.*
- *$\dfrac{d^{-}\varphi_f}{d(\log r)} = n$ Le plus petit entier tel que $\varphi_f(\log r) = \log|a_n|_p + n\log r$ où n est le nombre des zéros de f dans le disque ouvert $D^{-}(a,r)$.*

$N-n$ est le nombre des zéros de f sur le cercle $C(a,r)$

Exemple 2.2.

$P(x) = \underbrace{(p^3+p^5+p^6)}_{a_0} + \underbrace{(p^2+p^3+3p^6)}_{a_1}x + \underbrace{(p+p^2+5p^4)}_{a_2}x^2 + \underbrace{(p+p^2)}_{a_3}x^3$, $p \geq 2$ *premier*

Calculer $|P|(r)$

- *Pour $r = \dfrac{1}{p^2}$, on a*

$$\begin{aligned} |a_0|_p r^0 &= p^{-3} \times 1 = p^{-3} \\ |a_1|_p r &= p^{-2} \times p^{-2} = p^{-4} \\ |a_2|_p r^2 &= p^{-1} \times p^{-4} = p^{-5} \\ |a_3|_p r^3 &= p^{-1} \times p^{-6} = p^{-7} \end{aligned}$$

Donc $|p|(\frac{1}{p^2}) = p^{-3}$*, d'où* $N = n = 0$*, alors* P *n'aucun zéro sur le disque fermé* $D^+(0, P^{-2})$.

- *Pour* $r = \frac{1}{p^1}$*, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3} \times 1 = p^{-3}$$
$$|a_1|_p r = p^{-2} \times p^{-1} = p^{-3}$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1} \times p^{-2} = p^{-3}$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1} \times p^{-3} = p^{-4}$$

Donc $|p|(\frac{1}{p^2}) = p^{-3}$
D'où

$N = 2$*, alors* P *a deux zéros dans le disque fermé* $D^+(0, p^{-1})$.

$n = 0$*, alors* P *n'a aucun zéros dans le disque ouvert* $D^-(0, p^{-1})$.

$N - n = 2$*, alors* P *a deux zéros sur le cercle* $C(0, p^{-1})$.

- *Pour* $r = 1$*, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3} \times 1 = p^{-3}$$
$$|a_1|_p r = p^{-2} \times 1 = p^{-2}$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1} \times 1 = p^{-1}$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1} \times 1 = p^{-1}$$

Donc $|p|(1) = p^{-1}$
D'où

$N = 3$*, alors* P *a trois zéros dans le disque fermé* $D^+(0, 1)$.

$n = 2$*, alors* P *a deux zéros dans le disque ouvert* $D^-(0, 1)$.

$N - n = 1$*, alors* P *a un zéro sur le cercle* $C(0, 1)$.

- *Pour* $r = p$*, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3} \times 1 = p^{-2}$$
$$|a_1|_p r = p^{-2} \times p = p^{-1}$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1} \times p^2 = p^1$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1} \times p^3 = p^2$$

Donc $|p|(p) = p^2$
D'où

$N = n = 3$*, alors* P *n'aucun zéro sur le cercle* $C(0, p)$

et comme $\mathbb{C}_p$ algébriquement clôs on a

$$|P|(r) = \begin{cases} p^{-3} & 0 < r \leq \dfrac{1}{p} \\ p^{-1}r^2 & \dfrac{1}{p} \leq r \leq 1 \\ p^{-1}r^3 & r \geq 1 \end{cases}$$

D'où

$$\log|P|(r) = \begin{cases} -3\log p & -\infty < \log r \leq -\log p \\ -\log p + 2\log r & -\log p \leq \log r \leq 0 \\ -\log p + 3\log r & \log r \geq 0 \end{cases}$$

2.3 Analogue p-adique du premier théorème fondamental de Nevanlinna

Pour construire l'analogue p-adique de la fonction caractéristique de Nevanlinna, on utilise la notion de polygone de valuation des fonctions analytiques p-adiques.

2.3.1 Formule de Jensen

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,r))$, $r > 0$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0, pour tout $\rho \in]0, r[$ et $\alpha \in D^+(0,\rho)$, on note

$$z(\rho, f) = \sum_{|\alpha|=\rho} \max(0, w_\alpha(f)) \text{ et } p(\rho, f) = z\left(\rho, \frac{1}{f}\right)$$

où $z(\rho, f)$ (resp. $p(\rho, f)$) est le nombre des zéros (resp. pôles) de f sur le cercle $|x|_p = \rho$ et chaque zéro (resp. pôle) est compté autant de fois que son ordre de multiplicité. $w_\alpha(f)$ est l'entier relatif $i_\alpha \in \mathbb{Z}$, tel que $f(x) = \sum_{i \geq i_\alpha} a_i(x-\alpha)^i$ avec $a_{i_\alpha} \neq 0$, la formule qu'on donne dans le théorème suivante est la version p-adique de la formule de Jensen qu'on utilise assez fréquemment tout ou long de travail.

Théorème 2.8. *[5] Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,r))$, $0 < r$, telle que f n'a ni zéro ni pôle en $z_0 = 0$ et pour $\rho \in]0, r[$. On a*

$$\log|f|(\rho) = \log|f(0)|_p + \sum_{|\alpha|_p \leq \rho} w_\alpha(f) \log\frac{\rho}{|\alpha|_p} - \sum_{|\beta|_p \leq \rho} w_\beta(\frac{1}{f}) \log\frac{\rho}{|\beta|_p}. \tag{2.2}$$

Preuve.
La démonstration de cette formule est conséquence des propriétés de polygone de valuation.

1. Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0,r)), r > 0$ telle que $f(0) \neq 0$, le polygone de valuation de f donne pour tout $\rho \in]0,r[$

$$\log|f|(\rho) = \log|f(0)|_p + \sum_{|\alpha|_p \leq \rho} w_\alpha(f) \log \frac{\rho}{|\alpha|_p} \tag{2.3}$$

Où $w_\alpha(f)$ est l'ordre de multiplicité de α, en tant que zéro de f.
Pour montrer l'égalité (2.3), on suppose $0 = \rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_k < \rho$ et $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n$. On a

$$\log|f|(\rho) = \max_{n_i \geq 0}\{\log|a_{n_i}| + n_i \log \rho\}$$

alors pour tout $t \in]0,\rho]$

$$\begin{aligned}
0 < t \leq \rho_1 :\ & \log|f|(t) = \log|a_0|_p = \log|f(0)|_p \\
\rho_1 \leq t \leq \rho_2 :\ & \log|f|(t) = \log|a_{n_1}|_p + n_1 \log t \\
& \vdots \\
& \vdots \\
\rho_{k-1} \leq t \leq \rho_k :\ & \log|f|(t) = \log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1} \log t \\
\rho_k \leq \rho :\ & \log|f|(\rho) = \log|a_{n_k}|_p + n_k \log \rho
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\log|f|(\rho) &= [\log|f|(\rho) - \log|f|(\rho_k)] + [\log|f|(\rho_k) - \log|f|(\rho_{k-1})] + \ldots + [\log|f|(\rho_2) \\
&- \log|f|(\rho_1)] + \log|f|(\rho_1) \\
&= [\log|a_{n_k}|_p + n_k \log \rho - \log|a_{n_k}|_p - n_k \log \rho_k] + [\log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1} \log \rho_k \\
&- \log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1} \log \rho_{k-1}] + \ldots + [\log|a_{n_1}|_p + n_1 \log \rho_2 - \log|a_{n_1}|_p \\
&- n_1 \log \rho_1] + \log|f(0)|_p \\
&= \log|f(0)|_p + n_k \log \frac{\rho}{\rho_k} + n_{k-1} \log \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} + \ldots + n_1 \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \\
&= \log|f(0)|_p + n_k \log \frac{\rho}{\rho_k} + n_{k-1}\left(\log \frac{\rho}{\rho_{k-1}} - \log \frac{\rho}{\rho_k}\right) + \ldots + n_1 \left(\log \frac{\rho}{\rho_1} - \log \frac{\rho}{\rho_2}\right) \\
&= \log|f(0)|_p + (n_k - n_{k-1}) \log \frac{\rho}{\rho_k} + (n_{k-1} - n_{k-2}) \log \frac{\rho}{\rho_{k-1}} + \ldots + (n_2 - n_1) \log \frac{\rho}{\rho_2} \\
&+ (n_1 - n_0) \log \frac{\rho}{\rho_1} \\
&= \sum_{i=1}^{k} (n_i - n_{i-1}) \log \frac{\rho}{\rho_i} + \log|f(0)|_p
\end{aligned}$$

où $(n_i - n_{i-1})$ le nombre des zéros de f sur le cercle $|x|_p = \rho_i$, donc $\forall \rho \in]0,r[$ on a

$$\log|f|(\rho) = \log|f(0)|_p + \sum_{i=1}^{k} (n_i - n_{i-1}) \log \frac{\rho}{|\alpha|_p}.$$

donc

$$\log|f|(\rho) = \log|f(0)|_p + \sum_{|\alpha| \leq \rho} w_\alpha(f) \log \frac{\rho}{|\alpha|_p}.$$

2. <u>le cas générale</u> : Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,r)), r > 0$ tel que $f(0) \neq 0, +\infty$, on pose $f = \dfrac{h}{g}$ telle que $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,r)), r > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\log|f|(\rho) &= \log\left|\frac{h}{g}\right|(\rho) \\
&= \log|h|(\rho) - \log|g|(\rho) \\
&= \log|h(0)|_p + \sum_{|\alpha|\leq\rho} w_\alpha(h)\log\frac{\rho}{|\alpha|_p} - \log|g(0)|_p - \sum_{|\beta|\leq\rho} w_\beta(g)\log\frac{\rho}{|\beta|_p} \\
&= \log\left|\frac{h(0)}{g(0)}\right|_p + \sum_{|\alpha|\leq\rho} w_\alpha(f)\log\frac{\rho}{|\alpha|_p} - \sum_{|\beta|\leq\rho} w_\beta\left(\frac{1}{f}\right)\log\frac{\rho}{|\beta|_p}
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

□

2.3.2 Fonction de comptage des zéros et des pôles d'une fonction méromorphe p-adique

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,r)), 0 < r$ non nulle et pour $\rho \in]0,r[, \alpha \in D^+(0,\rho)$, on pose

$$Z(\rho,f) = \sum_{\substack{|\alpha|_p\leq\rho \\ \omega_\alpha(f)>0}} w_\alpha(f)\log\frac{\rho}{|\alpha|_p}$$

On l'appelle la fonction de comptage des zéros de f dans $D^+(0,\rho)$ avec leurs ordre de multiplicité.

$$\overline{Z}(\rho,f) = \sum_{|\alpha|_p\leq\rho} \log\frac{\rho}{|\alpha|_p}$$

On l'appelle la fonction de comptage des zéros de f dans $D^+(0,\rho)$ sans prendre en compte les multiplicité.

$$N(\rho,f) = Z(\rho,\frac{1}{f})$$

et la fonction de comptage des pôles de f dans $D^+(0,\rho)$ avec un ordre de multiplicité.

$$\overline{N}(\rho,f) = \overline{Z}(\rho,\frac{1}{f})$$

la fonction de comptage des pôles de f dans $D^+(0,\rho)$ sans prendre en compte les multiplicité.

par ces définitions, on définit une autre version p-adique plus simple de la formule (2.2)

Proposition 2.10. *[18] Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0,r)), r > 0$, n'a ni zéro en $z_0 = 0$, alors*

$$\log|f|(\rho) = Z(\rho,f) + \log|f(0)|_p,\ \forall\rho \in]0,r[\tag{2.4}$$

et si $f \in \mathcal{M}(D^-(0,r)), 0 < r$, n'a ni zéro ni pôle en $z_0 = 0$, alors

$$\log|f|(\rho) = Z(\rho,f) - N(\rho,f) + \log|f(0)|_p,\ \forall\rho \in]0,r[\tag{2.5}$$

Preuve.
la formule (2.4) est claire. Pour montrer l'égalité (2.5), on écrit $f = \dfrac{g}{h}$ telle que $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,r)), 0 < r$ n'ont pas de zéros communs. On a

$$Z(\rho, g) = Z(\rho, f) \quad et \quad N(\rho, f) = Z(\rho, h) \ \ \forall \rho \in]0, r[$$

Donc $\forall \rho \in]0, r[$, on a

$$\begin{aligned} \log |f|(\rho) &= \log \frac{|g|}{|h|}(\rho) \\ &= \log |g|(\rho) - \log |h|(\rho) \\ &= Z(\rho, g) + \log |g(0)|_p - Z(\rho, h) - \log |h(0)|_p \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration □

Notations 2.2. *soit ϕ, φ et ψ trois fonctions réelles définies dans un intervalle $I =]0, r[$ et soit $\rho \in I$. S'il existe un constante $c \in \mathbb{R}$, telle que $\phi(\rho) \leq \psi(\rho) + c\varphi(\rho)$ on écrira simplement $\phi(\rho) \leq \psi(\rho) + O(\varphi(\rho))$. si $|\phi(\rho) - \psi(\rho)|$ est bornée par une fonction de la forme $c\varphi(\rho)$, on écrira $\phi(\rho) = \psi(\rho) + O(\varphi(\rho))$*
si $\lim\limits_{\rho \to +\infty} |\phi(\rho) - \psi(\rho)| = 0$ (resp. $\lim\limits_{\rho \to r} |\phi(\rho) - \psi(\rho)| = 0$), on écrira $\phi(\rho) = \psi(\rho) + o(\varphi(\rho))$.

2.3.3 Fonction caractéristique de Nevanlinna p-adique

Comme la fonction $\rho \longrightarrow \log |f|(\rho)$ quand $f \in \mathcal{M}(D^-(0,r)), r > 0$ n'est plus positive il est nécessaire de construire une fonction $\rho \longrightarrow T(\rho, f)$ (fonction caractéristique de Nevanlinna) qui soit positive et prolonge $\log |f|(\rho)$, quand $f \in \mathcal{A}(D^-(0,r))$.
Soit $x > 0$. On pose $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$, où log est une fonction logarithmique réelle de base p. De même

$$m(\rho, f) = \log^+ |f|(\rho) = \max\{0, \log |f|(\rho)\}.$$

est appelé la fonction de compensation.
On a aussi

$$\log |f|(\rho) = \log^+ |f|(\rho) - \log^+ \left|\frac{1}{f}\right|(\rho) = m(\rho, f) - m(\rho, \frac{1}{f}).$$

En fin, on définit la fonction caractéristique de Nevanlinna de f par :

$$T(\rho, f) = m(\rho, f) + N(\rho, f).$$

Remarque 2.4. *Les fonctions $m(\rho, f), N(\rho, f)$ et $T(\rho, f)$ ne changement pas si la fonction f admet un zéro ou un pôle en 0, on peut réaliser un changement de variable pour redéfinir les fonctions précédentes.*

Dans tout le reste de ce travail, on supposera que la fonction f n'a pas des zéro en 0, si $f \in \mathcal{A}(D^-(0,r))$ et n'a ni zéro ni pôle en 0, si $f \in \mathcal{M}(D^-(0,r))$.

Remarque 2.5. ***forme plus simple de la formule de Jensen***(2.5)
On a

$$\begin{aligned}
\log|f(0)|_p &= N(\rho,f) - Z(\rho,f) + \log|f|(\rho) \quad \forall \rho \in]0,r[\\
&= N(\rho,f) - Z(\rho,f) + \log^+|f|(\rho) - \log^+\left|\frac{1}{f}\right|(\rho) \quad \forall \rho \in]0,r[\\
&= N(\rho,f) - Z(\rho,f) + m(\rho,f) - m(\rho,\frac{1}{f}) \quad \forall \rho \in]0,r[\\
&= [N(\rho,f) + m(\rho,f)] - [N(\rho,\frac{1}{f}) + m(\rho,\frac{1}{f})] \quad \forall \rho \in]0,r[\\
&= T(\rho,f) - T(\rho,\frac{1}{f}) \quad \forall \rho \in]0,r[.
\end{aligned}$$

Donc la formule (2.5) *devient*

$$T(\rho,f) = T(\rho,\frac{1}{f}) + \log|f(0)|_p \quad \forall \rho \in]0,r[. \tag{2.6}$$

Proposition 2.11. *[15] Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,r)), r > 0 \;\; f(0) \neq 0, +\infty$, alors*

$$T(\rho,f) = \max\{Z(\rho,f) + \log|f(0)|_p, N(\rho,f)\} \quad \forall \rho \in]0,r[$$

Preuve.
Pour $\rho \in]0,r[$

$$\log|f|(\rho) = Z(\rho,f) - N(\rho,f) + \log|f(0)|_p$$

$$\log|f|(\rho) + N(\rho,f) = Z(\rho,f) + \log|f(0)|_p$$

Donc

$$\begin{aligned}
\max\{Z(\rho,f) + \log|f(0)|_p, N(\rho,f)\} &= \max\{\log|f|(\rho) + N(\rho,f), N(\rho,f)\} \\
&= \max\{0, \log|f|(\rho)\} + N(\rho,f) \\
&= m(\rho,f) + N(\rho,f) \\
&= T(\rho,f)
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

Théorème 2.9. *[22][15] Soient $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0,r)), r > 0$ non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors*

1. *i)* $m(\rho, f+g) \leq \max\{m(\rho,f), m(\rho,g)\} + O(1) \quad \forall \rho \in]0,r[$

   ii) $m(\rho, f-a) = m(\rho,f) + O(1) \quad \forall a \in \mathbb{C}_p \quad \forall \rho \in]0,r[$

   iii) $m(\rho, fg) \leq m(\rho,f) + m(\rho,g) + O(1) \quad \forall \rho \in]0,r[$

iv) $m(\rho, af) = m(\rho, f) + O(1) \quad \forall a \in \mathbb{C}_p \quad \forall \rho \in]0, r[$

2. *i)* $N(\rho, f+g) \leq N(\rho, f) + N(\rho, g) \quad \forall \rho \in]0, r[)$

ii) $N(\rho, fg) \leq N(\rho, f) + N(\rho, g) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$

3. *i)* $T(\rho, f+g) \leq T(\rho, f) + T(\rho, g) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$

ii) $T(\rho, fg) \leq T(\rho, f) + T(\rho, g) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$

iii) Si $f, g \in \mathcal{A}(D^-(0, r)), 0 < r$ *alors*

$$T(\rho, f+g) \leq \max\{T(\rho, f), T(\rho, g)\} + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

iv) Si $f \in \mathcal{M}(D^-(0, r)), 0 < r)$ *alors*

$$T(\rho, \frac{1}{f}) = T(\rho, f) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

v) Si $a \in \mathbb{C}_p, a \neq 0$ *et* $f(0) \neq a$ *on a*

$$T(\rho, af) = T(\rho, f) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

et

$$T(\rho, f-a) = T(\rho, f) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

Preuve.

1. On a

$$|f+g|(\rho) \leqslant \max\{|f|(\rho), |g|(\rho)\} \quad \forall \rho \in]0, r[$$

et

$$|fg|(\rho) = |f|(\rho)|g|(\rho) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

Grâce à la croissance de la fonction logarithmique, on obtient sans (i),(iii) et (iv).

ii) si $|f|(\rho) > |a|_p$, pour ρ assez proche de r, on a

$$|f-a|(\rho) = \max\{|f|(\rho), |a|_p\} = |f|(\rho)$$

d'ou

$$m(\rho, f-a) = m(\rho, f)$$

si $|f|(\rho) \leq |a|_p$, on a

$$|f-a|(\rho) \leq \max\{|f|(\rho), |a|_p\} \leq |a|_p$$

Ce qui entraine, pour tout $\rho \in]0, r[$, on a

$$\begin{aligned} |m(\rho, f-a) - m(\rho, f)| &\leq m(\rho, f-a) + m(\rho, f) \\ &\leq \log^+ |a|_p + \log^+ |a|_p \\ &\leq 2\log^+ |a|_p \end{aligned}$$

et ainsi

$$m(\rho, f-a) = m(\rho, f) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

2. i) et ii) sont vérifiées, car la multiplicité des pôles de $f+g$ (ou fg) au point x_0 est au plus égale à la somme de multiplicité de fg, au point x_0. D'ou

$$N(\rho, f+g) \leq N(\rho, f) + N(\rho, g) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

$$N(\rho, fg) \leq N(\rho, f) + N(\rho, g) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

3. i) Grâce à l'inégalité i) de 1) et 2), on déduit que

$$\begin{aligned} m(\rho, f+g) + N(\rho, f+g) &\leq \max\{m(\rho, f), m(\rho, g)\} + N(\rho, f) + N(\rho, g) + O(1) \\ &\leq m(\rho, f) + m(\rho, g) + N(\rho, f) + N(\rho, g) + O(1) \end{aligned}$$

D'où

$$T(\rho, f+g) \leq T(\rho, f) + T(\rho, g) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

ii) D'après la propriétés iii) de 1) et ii) de 2), on a

$$m(\rho, fg) + N(\rho, fg) \leq m(\rho, f) + m(\rho, g) + N(\rho, f) + N(\rho, g) + O(1)$$

D'où

$$T(\rho, fg) \leq T(\rho, f) + T(\rho, g) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

iii) Comme $N(\rho, f) = N(\rho, g) = 0$, l'inégalité découle de la propriété i) de 1)

iv) D'après la formule (2.6), l'inégalité est immédiat

v) puisque

$$N(\rho, af) = N(\rho, f) = N(\rho, f-a) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

on a aussi

$$m(\rho, af) = m(\rho, f) + O(1) \quad \textit{et} \quad m(\rho, f-a) = m(\rho, f) + O(1)$$

Donc

$$T(\rho, af) = T(\rho, f) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

et

$$T(\rho, f-a) = T(\rho, f) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

□

2.4 Premier théorème fondamental de Nevanlinna p-adique

Théorème 2.10. *[16] Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0, r)), r > 0$ n'a ni zéro ni pôle en 0 et $f(0) \neq a$, alors on a*

$$T(\rho, \frac{1}{f-a}) = T(\rho, f) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

Pour la preuve, on utilisera les formules du théorème 2.6, 3)(iv) et (v)

Remarque 2.6. *On remarque d'après le premier théorème de Nevanlinna que* $T(\rho, \dfrac{1}{f-a})$ *est égale à* $T(\rho, f)$ *(à une fonction bornée prés). Ce qui veut dire que* $T(\rho, \dfrac{1}{f-a})$ *ne dépend pas de* a*. Et par conséquent* $T(\rho, f)$ *est une fonction caractéristique de* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$

Notations 2.3. $\forall a \in \mathbb{C}_p$*, on note* $m(\rho, a), N(\rho, a)$ *et* $T(\rho, a)$ *au lieu de* $m(\rho, \dfrac{1}{f-a}), N(\rho, \dfrac{1}{f-a})$*, et* $T(\rho, \dfrac{1}{f-a})$ *respectivement.*
D'où le premier théorème de Nevanlinna s'écrit sous la forme

$$T(\rho, a) = T(\rho, f) + O(1) \quad \forall \rho \in]0, r[$$

Proposition 2.12. *[16] Pour* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p), f(0) \neq 0, +\infty$*, on a les équivalences suivantes*

1. f *est non constante* $\Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ \exists A > 0,$ *tel que* $T(\rho, f) \leq \log \rho + c, \forall \rho > A$.
2. $f \in \mathbb{C}_p(x) \iff T(\rho, f) = O(\log \rho),\ \rho \to +\infty$.
3. f *est constante* $\Longleftrightarrow T(\rho, f) = o(\log \rho),\ \ \rho \to +\infty$.

2.4.1 Certaines Propriétés des fonctions méromorphes et de leurs dérivées

Lemme 2.3. *Soit* $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0, r)), r > 0,$ *tel que* $f(0) \neq 0, +\infty$ *on a*

$$m\left(\rho, \frac{f'}{f}\right) = 0, \quad \forall \rho \in]0, r[$$

$$m\left(\rho, \frac{f}{f'}\right) \geq \log \rho, \quad \forall \rho \in]0, r[$$

Preuve.
Soit $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0, r)), 0 < r$, on a d'après les résultats classiques pour les fonctions méromorphes, il est bien connu que pour chaque $\rho \in]0, r[$, $\log \left|\dfrac{f'}{f}\right| \leq -\log \rho$, d'où

$$m\left(\rho, \frac{f'}{f}\right) = \log^{+}\left|\frac{f'}{f}\right|(\rho) = \max\left\{0, \log\left|\frac{f'}{f}\right|(\rho)\right\} = 0,\ \forall \rho \in]0, r[$$

et

$$m\left(\rho, \frac{f}{f'}\right) = \log^{+}\left|\frac{f}{f'}\right|(\rho) = \max\left\{0, \log\left|\frac{f}{f'}\right|(\rho)\right\} \geq \log \rho$$

□

Proposition 2.13. *[23][16] Soit* $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0, r)), 0 < r,$ *telle que* $f^{(n)}, (n \in \mathbb{N})$ *n'a ni zéro ni pôle en 0, alors*

1. $N(\rho, f^{(n)}) = N(\rho, f) + n\bar{N}(\rho, f), \ \ \forall \rho \in]0, r[$

2. $Z(\rho, f^{(n)}) \leq Z(\rho, f) + n\bar{N}(\rho, f) - \log \rho + O(1), \ \ \forall \rho \in]0, r[$

3. $T(\rho, f^{(n)}) \leq T(\rho, f) + n\bar{N}(\rho, f) + O(1) \leq (n+1)T(\rho, f), \ \ \forall \rho \in]0, r[$

Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.4. *[16] Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,r)), r > 0$, telle que $f = \dfrac{h}{g}$, où $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,r))$, n'ont pas de zéro commun posons $H_0 = h$ et $H_n = gH'_{n-1} - ng'H_{n-1}$, Pour $n \leq 1$, on a*

1. $f^{(n)} = \dfrac{H_n}{g^{n+1}}$.

2. tout zéros d'ordre $m(m \geq 1)$ de g est un zéro d'ordre $n(m-1)$ de H_n et un pôle d'ordre $m+n$ de $f^{(n)}$.

Preuve du la proposition 2.13.

1. Soit $\{x_1, x_2, \dots x_q\}$ l'ensemble des pôles de f dans le disque $D^+(\rho, f), \ \forall \rho \in]0, r[$ et supposons que chaque x_i et d'ordre $m_i, \ i \in \{1, 2, \dots q\}$. Donc d'après le lemme précédent, les pôles de $f^{(n)}$ dan le disque $D^+(0, \rho)$ sont $\{x_1, x_2 \dots x_q\}$ et leurs ordres sont respectivement $m_1 + n, m_2 + n, \dots m_q + n$
   D'où

$$\begin{aligned}
N(\rho, f^{(n)}) &= (m_1 + n)[\log \rho - \log |x_1|_p] + (m_2 + n)[\log \rho - \log |x_2|_p] + \dots \\
&\quad \dots + (m_q + n)[\log \rho - \log |x_q|_p] \\
&= m_1[\log \rho - \log |x_1|_p] + m_2[\log \rho - \log |x_2|_p] + \dots + m_q[\log \rho - \log |x_q|_p] \\
&\quad + n\left([\log \rho - \log |x_1|_p] + [\log \rho - \log |x_2|_p] + \dots + [\log \rho - \log |x_q|_p]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{q} m_i \log \frac{\rho}{|x_i|_p} + n \sum_{i=1}^{q} \log \frac{\rho}{|x_i|_p} \\
&= N(\rho, f) + n\bar{N}(\rho, f)
\end{aligned}$$

2. Soit $\rho \in]0, r[$, par la formule (2.2), on a

$$Z(\rho, f') - N(\rho, f') + \log |f'(0)|_p = \log |f'|(\rho)$$

   mais d'après le théorème (2.6) on a $|f'|(\rho) \leq \dfrac{1}{\rho}|f|(\rho), \ \ \forall \rho \in]0, r[$ en considérant la croissance de la fonction logarithmique, on obtient

$$\log |f'|(\rho) \leq \log |f|(\rho) - \log \rho, \ \ \forall \rho \in]0, r[$$

   Par conséquence, $\forall \rho \in]0, r[$, on a

$$\begin{aligned}
Z(\rho, f') &= \log |f'|(\rho) + N(\rho, f') - \log |f'(0)|_p \\
&\leq \log |f|(\rho) + N(\rho, f') - \log |f'(0)|_p - \log \rho \\
&\leq Z(\rho, f) + N(\rho, f') - N(\rho, f) + \log |f(0)|_p - \log |f'(0)|_p - \log \rho \\
&\leq Z(\rho, f) + N(\rho, f') - N(\rho, f) - \log \rho + O(1)
\end{aligned}$$

mais D'après i), on a

$$N(\rho, f^{'}) - N(\rho, f) = \bar{N}(\rho, f),\ \forall \rho \in]0, r[$$

D'où

$$Z(\rho, f^{'}) \leq Z(\rho, f) + \bar{N}(\rho, f) - \log \rho + O(1),\ \forall \rho \in]0, r[$$

la généralisation de cette inégalité est obtenue par récurrence
Supposons l'inégalité précédent est vrai $\forall k \leq n$, alors

$$Z(\rho, f^{(n+1)}) = Z(\rho, (f^{(n)})^{'}) \leq Z(\rho, f^{(n)}) + \bar{N}(\rho, f^{(n)}) - \log \rho + O(1)$$

et donc

$$Z(\rho, f^{(n+1)}) \leq Z(\rho, f) + n\bar{N}(\rho, f) + \bar{N}(\rho, f^{(n)}) - \log \rho + O(1)$$

puisque

$$\bar{N}(\rho, f^{(n)}) = \bar{N}(\rho, f)$$

On a

$$Z(\rho, f^{(n+1)}) \leq Z(\rho, f) + (n+1)\bar{N}(\rho, f) - \log \rho + O(1)$$

3. Soit $\rho \in]0, r[$, on a

$$\begin{aligned}
T(\rho, f^{(n)}) &= N(\rho, f^{(n)}) + m(\rho, f^{(n)}) \\
&\leq N(\rho, f^{(n)}) + n\bar{N}(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} \cdots \frac{f^{'}}{f} f\right) \\
&\leq N(\rho, f^{(n)}) + n\bar{N}(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}}\right) + m\left(\rho, \frac{f^{(n-1)}}{f^{(n-2)}}\right) + \ldots + m(\rho, f) + O(1) \\
&= N(\rho, f) + n\bar{N}(\rho, f) + m(\rho, f) + O(1)
\end{aligned}$$

d'où

$$T(\rho, f^{(n)}) \leq T(\rho, f) + n\bar{N}(\rho, f) + O(1),\quad \forall \rho \in]0, r[$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

CHAPITRE 3

APPLICATION DE NEVANLINNA P-ADIQUE

Dans ce chapitre, on donne une application de la théorie de Nevanlinna dans un corps non-archimédien algébriquement clôs $\mathbb{K}$, pour étudier les solutions méromorphes de l'équations fonctionnelles aux q-différences de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(q^i x) = h(x) \tag{3.1}$$

où $q \in \mathbb{K}, 0 < |q| < 1$ et $h(x), g_0(x) \dots g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes telles que $g_0(x)g_s(x) \neq 0$

3.1 Équation aux q-différences

Soit $\mathbb{K}$ un corps non-archimédien complet et algébriquement clôs. On va étudié l'équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x)f(q^i x) = B(x) \tag{3.2}$$

avec les même conditions précédentes dans l' équation(3.1) et on spécifie l'étude si $B(x), A_0(x) \dots A_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des fonctions rationnelles dans $\mathbb{K}$

Théorème 3.1. *[20] Supposons que dans l'équation* (3.2) *ci-dessus $B(x)$ est un polynôme et les coefficient $A_0(x), \dots, A_s(x)$ sont constants, alors toute solution $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ non* *constants de l'équation* (3.2) *dans* $\mathbb{K}$ *est une fraction rationnelle ayant au plus un pôle* $\alpha = 0$

On a besoin du lemme suivant pour la démonstration du théorème 3.1

Lemme 3.1. *[20] Soit* $f \in \mathbb{K}$ *et* $r > 0$*, on a*

1. $|f(qx)|(r) = |f|(|q|r)$
2. $m(r, f(qx)) = m(|q|r, f)$
3. $N(r, f(qx)) = N(|q|r, f)$
4. $T(r, f(qx)) = T(|q|r, f)$

Preuve du théorème 3.1.

Supposons que f admet un pôle α différent de zéro . D'après l'équation (3.2), il y a au moins un indice $i_1 \in \{1, ..., s\}$ tel que $\alpha_1 = q^{i_1}\alpha \in \mathbb{K}$ est un pôle de f. En appliquant la méthode à α_1, on déduit qu'il existe $i_2 \in \{1, ..., s\}$ tel que $\alpha_2 = q^{i_2}\alpha_1$, donc on construit des suites $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots$ pôles de f tendant vers 0. contradiction avec l'hypothèse, d'où le seul pôle de f s'il existe est le zéro
Donc f s'écrit sous la forme $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^l}$, où $l \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, $\varphi(0) \neq 0$ En remplaçant f dans l'équation (3.2) il est facile de montre que φ satisfait une équation du même type Sans prendre la circulaire, on suppose que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, on a

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x) f(q^i x) = B(x)$$

$$A_0 f(x) + \sum_{i=1}^{s} A_i f(q^i x) = B(x)$$

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{s} \frac{A_i}{A_0} f(q^i x) + \frac{B(x)}{A_0}$$

D'où

$$f(x) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(q^i x) + \beta(x), \text{ où } \alpha_i = -\frac{A_i}{A_0} \quad, i = 1 \ldots s \text{ et } \beta(x) = \frac{B(x)}{A_0}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |f|(|q|^{-k}) \leq \max\left\{|\beta|(|q|^{-k}), |\alpha_1||f(qx)|(|q|^{-k}), \ldots, |\alpha_s||f(q^s x)|(|q|^{-k})\right\}$$

D'après le lemme précédent on trouve

$$|f|(|q|^{-k}) \leq \max\left\{|\beta|(|q|^{-k}), |\alpha_1||f(|q|^{1-k}), \ldots |\alpha_s||f(|q|^{s-k})\right\}$$

car $0 < |q| < 1$, on a $|q|^{1-k} \geq \ldots \geq |q|^{s-k} \Longrightarrow |f|(|q|^{1-k}) \geq \ldots \geq |f|(|q|^{s-k})$ (car $|f|(r)$ croissante). On déduit que

$$|f|(|q|^{-k}) \leq \max\left\{|\beta|(|q|^{-k}), \eta|f|(|q|^{1-k})\right\}, \quad \eta = \max_{1 \leq i \leq s} |\alpha_i|$$

On a $|q|^{1-k} \leq |q|^{-k}$, donc $|\beta|(|q|^{1-k}) \leq |\beta|(|q|^{-k})$, on déduit

$$\begin{aligned}|f|(|q|^{1-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{1-k}), \eta|f|(|q|^{2-k})\}\\ &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \eta|f|(|q|^{2-k})\}\end{aligned}$$

d'où

$$|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \eta|\beta|(|q|^{-k}), \eta^2|f|(|q|^{2-k})\}$$

De la même façon, on trouve que

$$|f|(|q|^{2-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \eta|f|(|q|^{3-k})\}$$

Donc

$$\begin{aligned}&|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \eta|\beta|(|q|^{-k}), \eta^2|\beta|(|q|^{-k}), \eta^3|f|(|q|^{3-k})\}\\ &\qquad\vdots\\ &|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \eta|\beta|(|q|^{-k}), \eta^2|\beta|(|q|^{-k}), \dots, \eta^{k-1}|\beta|(|q|^{-k}), \eta^k|f|(1)\}.\end{aligned}$$

D'où

$$|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{\mu|\beta|(|q|^{-k}), \eta^k|f|(1)\}, \quad \mu = \max_{k-1\geq i\geq 0} \eta^i.$$

d'où

$$\log|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{\log(\mu|\beta|(|q|^{-k})), k\log\eta + \log|f|(1)\} \tag{3.3}$$

posons $\rho_k = |q|^{-k}$, donc $k = \dfrac{\log\rho_k}{\log|q|^{-1}}$ et on a

$$\begin{aligned}|f|(\rho_k) &\leq \max\{\mu|\beta|(\rho_k), \eta^k|f|(1)\}\\ \log|f|(\rho_k) &\leq \max\{\log|(\mu|\beta|(\rho_k)), k\log\eta + \log|f|(1)\}\\ &= \max\{\log(\mu|\beta|(\rho_k)), \frac{\log\eta}{\log|q|^{-1}}\log\rho_k + \log|f|(1)\}\end{aligned}$$

Donc

$$\log|f|(\rho_k) \leq \max\{\log(\mu|\beta|(\rho_k)), \frac{\log\eta}{\log|q|^{-1}}\log\rho_k + \log|f|(1)\} \tag{3.4}$$

$(\rho_k)_{k\geqslant 1}$ une suite croissante qui tend vers $+\infty$, et $\beta(x) = \dfrac{B(x)}{A_0} \in \mathbb{K}[X]$
donc

$$\log|\beta|(\rho_k) = O(\log\rho_k)$$

D'où d'après(3.4) on a

$$\log|f|(\rho_k) = O(\log\rho_k), \quad k \longrightarrow +\infty$$

On déduit d'après (3.3) que

$$\log|f|(r) = O(\log r), \quad r \longrightarrow +\infty$$

Donc $T(r,f) = O(\log r)$, $r \longrightarrow +\infty$ alors d'après la proposition 2.12 $f \in \mathbb{K}(X)$ $\square$

Théorème 3.2. *[20] Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est une solution de l'équation (3.2), alors*

$$T(r, f) = O((\log r)^2), \quad r \longrightarrow +\infty$$

Le but dans cette section est de généraliser le théorème 3.2, de la façon suivante ; Nous considérons l'équation aux q-différence de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x) y(q^i x) = h(x) \tag{3.5}$$

où $q \in \mathbb{K}, 0 < |q| < 1$ et $h(x), g_0(x) \ldots g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes telles que $g_0(x) g_s(x) \neq 0$.

Notation 3.1. *On note $T(r)$ la fonction*

$$T(r) = \max\{T(r, h), T(r, g_0), \ldots, T(r, g_s)\}, \quad \forall r > 0$$

Théorème 3.3. *[21] Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est un solution de l'équation (3.5), alors*

$$T(r, f) = O(T(r) \log r), \quad r \longrightarrow +\infty$$

Remarque 3.1. *On peut prendre $h(x) = 0$ dans l'équation (3.5) sans perte de généralité, Car si $h(x) \neq 0$ et $f(x)$ est une solution méromorphe de l'équation (3.5). Alors $f(x)$ est une solution de l'équation non triviale de la forme*

$$h(x) \sum_{i=0}^{s} g_i(qx) f(q^{i+1} x) - h(qx) \sum_{i=0}^{s} g_i(x) f(q^i x) = 0$$

Donc au lieu d'étudier l'équation (3.5) on étudie l'équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x) y(q^i x) = 0 \tag{3.6}$$

Dans toute la suite on suppose que $g_0(x) \ldots g_s(x)(s \geq 1)$ sont des fonctions entières

Pour la démonstration du la théorème 3.3, on a besoin la proposition suivantes

Proposition 3.1. *[21] Soit f une solution méromorphe dans $\mathbb{K}$ de l'équation (3.6). Alors, si α est un pôle de f, $\alpha \neq 0$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et un zéro θ de g_0 différent de zéro tels que $\alpha = q^{-m}\theta$ et $\omega_\theta(g_0) + \omega_\alpha(f) \geq 0$.*

Preuve du théorème 3.3.

Comme indiqué dans la remarque 3.1, tout le problème se ramene au cas de l'équation (3.6). Alors soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (3.5). On peut aussi supposer que f n'a pas de pôle à l'origine.

Évaluation de $N(r, f)$.

Si la fonction entière $g_0(x)$ n'a pas de zéro différent de 0, par la proposition 3.1, la fonction f est entière, donc $N(r,f)=0$. Supposons alors que $g_0(x)$ admet au moins un zéro différent de 0 et soit $r_0 = \min\{|x|, x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \textit{ et } g_0(x)=0\}$.
Pour tout $r>0$, nous avons

$$N(r,f) = -\sum_{0<|\alpha|\leq r, f(\alpha)=\infty} \omega_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Mais par la proposition 3.1, tout pôle α de f dans $D(0,r)\setminus\{0\}$ est de la forme $\alpha = q^{-n}\beta$, où $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in D(0,r)\setminus\{0\}$ tel que $g_0(\beta)=0$. Ceci implique que

$$0 \leq n \leq \left[\frac{1}{\log|q|} \log \frac{r_0}{r}\right],$$

où $[t]$ désigne la partie entière du nombre réel t.
Par conséquent,

$$N(r,f) \leq \left(\left[\frac{1}{\log|q|} \log \frac{r_0}{r}\right] + 1\right) \sum_{0<|\beta|\leq r, g_0(\beta)=0} \omega_\beta(g_0) \log \frac{r}{|\beta|}$$

i.e

$$N(r,f) \leq \left(\left[\frac{1}{\log|q|} \log \frac{r_0}{r}\right] + 1\right) N\left(\frac{1}{g_0}, r\right).$$

Par hypothèse, on a $N\left(\frac{1}{g_0}, r\right) \leq T\left(r, g_0\right) + O(1) \leq T(r) + O(1), r \to +\infty$. Nous voyons aussi que

$$\left[\frac{1}{\log|q|} \log \frac{r_0}{r}\right] + 1 = O(\log r), r \to +\infty.$$

Il en résulte que

$$N(r,f) = O(T(r)\log r), r \to +\infty \tag{3.7}$$

Évaluation de $\log|f|(r)$.
Sans perte de généralité, on peut supposer que f n'a ni zéro ni pôle à l'origine. Alors, il existe $\epsilon > 0$ telle que f n'a no zéros ni pôle dans $D(0,\epsilon)$, donc $|f|(t)$ est constante pour $0 \leq t \leq \epsilon$.
D'après l'équation(3.5), pour tout $r>0$, on a

$$|f|(r) \leq \max\left\{\left|\frac{g_1}{g_0}\right|(r)\,|f|\left(|q|\,r\right), \left|\frac{g_2}{g_0}\right|(r)\,|f|\left(|q|^2\,r\right), \ldots, \left|\frac{g_s}{g_0}\right|(r)\,|f|\left(|q|^s\,r\right)\right\}.$$

Puisque g_0 est une fonction entière non nulle, on a $|g_0|(r) \geq 1$, pour $r > 0$ assez grand. de plus, comme $g_0, \ldots, g_s \in A(\mathbb{K})$ et $T(r, g_i) \leq T(r), \forall i$, on a pour $r > 0$ assez grand

$$|f|(r) \leq e^{T(r)} \max\left\{|f|(|q|\, r), |f|(|q|^2\, r), \cdots |f|(|q|^s\, r)\right\}. \tag{3.8}$$

Prenons r assez grand pour assurer que l'entier $k = \left[\dfrac{\log r - \log \epsilon}{-\log |q|}\right] + 1 \geq s$, on a d'après (3.8)

$$|f|(r) \leq e^{T(r)} \max\left\{|f|(|q|\, r), |f|(|q|^2\, r), \cdots |f|(|q|^s\, r), \ldots, |f|(|q|^k\, r)\right\}. \tag{3.9}$$

Posons

$$\begin{cases} \mu_1 & = |f|(|q|^k\, r) \\ \mu_2 & = \max\left\{|f|(|q|^{k-1}\, r), |f|(|q|^k\, r)\right\} \\ \vdots \\ \mu_{k-1} & = \max\left\{|f|(|q|^2\, r), \cdots, |f|(|q|^s\, r, \cdots, |f|(|q|^k\, r)\right\} \\ \mu_k & = \max\left\{|f|(|q|\, r), |f|(|q|^2\, r), \cdots, |f|(|q|^s\, r, \cdots, |f|(|q|^k\, r)\right\} \end{cases} \tag{3.10}$$

Donc (3.9) devient

$$|f|(r) \leq e^{T(r)} \mu_k \tag{3.11}$$

D'autre part, nous avons $|q|\epsilon \leq |q|^k r \leq \epsilon$. Donc en utilisant le fait que $|f|(t)$ est constante pour $0 \leq t \leq \epsilon$, on a

$$|f|(|q|^k r) = |f|(|q|^{k+1} r) = |f|(|q|^{k+2} r) = \cdots = \mu_1 = Constante = C \tag{3.12}$$

On remplacer r dans (3.9) successivement par $|q|r, |q|^2 r, \ldots, |q|^{k-1} r$, on obtient

$$\begin{cases} |f|(|q|r) \leq e^{T(|q|r)} \mu_{k-1} \\ |f|(|q|^2 r) \leq e^{T(|q|^2 r)} \mu_{k-2} \\ |f|(|q|^3 r) \leq e^{T(|q|^3 r)} \mu_{k-3} \\ \vdots \\ |f|(|q|^{k-2} r) \leq e^{T(|q|^{k-2} r)} \mu_2 \\ |f|(|q|^{k-1} r) \leq e^{T(|q|^{k-1} r)} \mu_1 \end{cases} \tag{3.13}$$

Il résulte de (3.10) et (3.13) que pour $r \longrightarrow +\infty$, on a

$$\begin{cases} \mu_1 = C \\ \mu_2 \leq e^{T(|q|^{k-1} r)} \mu_1 \\ \mu_3 \leq e^{T(|q|^{k-2} r)} \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{k-1} \leq e^{T(|q|^2 r)} \mu_{k-2} \\ \mu_k \leq e^{T(|q|r)} \mu_{k-1} \end{cases} \tag{3.14}$$

De (3.11) et (3.14), on a

$$|f|(r) \leq e^{\sum_{i=0}^{k-1} T(|q|^i r)} C \tag{3.15}$$

Comme $T(|q|^i r) \leq T(r),\ \forall i = 0, \ldots, k-1$, on a

$$|f|(r) \leq e^{kT(r)} C \tag{3.16}$$

Car $k = O(\log r)$, pour $r \longrightarrow +\infty$, il est facile de voir que

$$\log^+ |f|(r) = O(T(r) \log r), \quad r \longrightarrow +\infty \tag{3.17}$$

Enfin, d'après les relation (3.7) et (3.17) on a

$$T(r, f) = O(T(r) \log r), \quad r \longrightarrow +\infty$$

ce qui termine la démonstration $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Koblitez.N**, p-adic analysis and Zeta function,springer-verlag(1984).

[2] **Bézevin J,P**, Dynamique des fractions rationnels p-adique.23 mai 2005.

[3] **Katok.S**, real and p-adic analysis, cours notes for math 497 C, Massprogram, fall 2000 (2002).

[4] **Amice.Y**, les nombres p-adique, presses Universitaire de france (1975).

[5] **Boutabaa.A.et Escassut.A**, on uniquenss of p-adic meromorphic functions, *proc.Amer.Math.soc.126(9),2557-2568(1998).*

[6] **Escassut.A,** Analytic Elements in p-adic Analysis ,*Word scientific publishing (1995).*

[7] **B.Diarra,** analyse p-adique Cours de DEA - Algèbre Commutative FAST - Université du Mali Décembre 1999 - Mars 2000 - Décembre 2000

[8] **Pierre Colmez**, les nombres p-adiques, notes du cours de M2

[9] **Bézivin J,P and Boutabaa.A,** Decomposition Of p-adic meromorphic function. *Ann.Math.Blaise Pascale,Vol.2,no 1(1995)pp51-60*

[10] **A. J. Baker**, An Introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis [4/11/2002]

[11] **Hayman W,K,** Meromorphic functions , *Calaredon press, oxford.(1964)*

[12] **Escassut.A,** Analytic Element in p-adic Analysis, *Wordscientific publiching(1995).*

[13] **C-C-Yong,** fix-points and factorisation of meromorphic functions

[14] **H.H.Khoai,** sur la theorie de Nevanlinna p-adique. Group de travail d'analyse ultramétrique, tome 15(1987-1988),p,35-40

[15] **A.O.F. Jacqueline,** Distribution de valeurs des fonctions meromorphes ultrametriques, application de la theorie de Nevanlinna. These de Doctorat, Université Blaise Pascal.

[16] **A.Boutabaa,** Théorie de Nevanlinna p-adique. Manuscripta Math.67, 251-269(1990).

[17] **A.Boutabaa,** Applications de la théorie de Nevanlinna p-adique, Collectanea Mathematica 42,1 p. 75-93,(1991).

[18] **A.Boutabaa and A. Escassut,** Urs and Ursim for p-adic meromorphic functions inside a disc. Proc. of the Edinburgh Mathematical Society 44, 485-504(2001).

[19] **A.Boutabaa and J.P. Bézévin,** Decomposition of p-adic meromorphic functions. Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 2, no 1(1995) pp51-60.

[20] **N.Boudjerida and A.Boutabaa and S.Medjerab,** On some ultrametric q-difference equations, bull.Sci.math.137(2013) 177-188.

[21] **S.Bourourou and A.Boutabaa and T.Zerzaihi,** On the of growth of solution of difference equation in ultramitric fields

[22] **S. Medjrab,** mémoire de magister, la théorie de Nevanlinna ultramétrique et ses application, université de jijel (2010).

[23] **S.Bourourou,** Thèse de doctorat Résolution de certaines classes d'équations fonctionnelles aux q-différences et aux différences dans l'espace des fonctions méromorphes p-adiques, université de jijel (2016).