République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes Et Informatique
Département De Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques

Option Analyse Fonctionnelle

Thème

Étude d'un problème d'évolution régis par un opérateur maximal monotone ne dépendant pas du temps

Présenté par

Bezzaz khaoula

Zitouni Hadjer

Devant le jury

Président	Belhadef.R	M.C.B Université de Jijel
Encadreur	Boutana.I	M.A.A Université de Jijel
Examinateur	Slamnia.F	M.A.A Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Remerciements

Nos remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il nous a donné pour terminer ce mémoire.

Nous remercions vivement madame Boutana I.docteur à université de jijel d'avoir voulu proposer le sujet et assurer la direction de ce mémoire, sa disponibilité, son soutien, ses encouragements et ses précieux conseils tout au long de ce travail, nous ont beaucoup aidé, nous tenons à lui exprimer ici toute notre reconnaissance et tout notre respect.

Nous remercions vivement D.Belhadef.R pour avoir accepter de présider le jury et évaluer ce mémoire.

Nous adressons également nos sincères remerciements à Mme Slamnia.F pour avoir bien voulu prendre la responsabilité d'évaluer ce travail.

Enfin, c'est avec beaucoup de plaisir que nous pouvons remercier profondément nos familles pour leurs conseils et encouragements durant toutes les années de notre études.

Sans oublier de remercier tous les enseignants du département de mathématiques qui de prés ou de loin ont contribué à notre formation.

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'études à mes chers parents Ahcene et Nassia pour leur soutien moraux et pour leurs encouragements...

Que Dieu nous protége.

A mon marie Rachid.

A mes frères Sohaib et Massoud.

A mes sœurs Insaf et Safa.

A ma chére Hadjer.

A tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.

Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux qui j'aime.

Khaoula

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'études à mes chers parents Mouhammed et Naima pour leur soutien moraux et pour leurs encouragements...

Que Dieu nous protége.

A mes frères Yasser et Ramzi et Mouman

A mon fiancé Houssin.

A mes sœurs Amel, sarah, yousra et Ikram.

A mes oncles Abdelaziz, Mouhammed, Azedine, Abdelmalak et mouloud.

A ma tante Zahira.

A mes chéres khaoula, Razika, Asma, Farah et Ibtissam

A tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.

Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux qui j'aime.

Hadjer

Table des matières

Introduction

Les opérateurs monotones (multivoques) est notamment ceux qui sont maximaux (i.e. dont les graphes sont des éléments maximaux par rapport à l'inclusion) ont été fondé pour être plutôt utiles dans divers domaines de mathématiques tel que l'optimisation (les sous différentiels des fonctions propres convexes s.c.i. sont des opérateurs maximaux monotones), équations différentielles (souvent l'opérateur qui engendre l'équation est maximal monotones) et l'analyse variationnelle, en particulier les opérateurs monotones sont l'instrument dans l'étude des inéquations variationnelles lesquelles les plus fort dispositifs pour la construction des modèles mathématiques pour différents problèmes physiques et techniques.

Golomb été l'un des premiers qui a présenté les opérateurs monotones en 1935. Ainsi l'un des articles pour considérer les applications des opérateurs monotones est donné par E.H.Zarantonllo.

La théorie moderne des opérateurs monotones était initiée indépendamment par une série d'articles par G. Minty et F. Browder en 1962, après les concepts dans ces documents ont été étendu considérablement par R. T. Rockafellar, pour développer la théorie.
Naturellement, le progresse de la théorie des opérateurs monotones était des espaces de Hilbert [6]. Aux espaces de Banach réflexifs [3], et finalement aux espace de Banach non réflexifs [8].

L'objet de notre travail est d'étudier les opérateurs monotones et ces propriétés, en particulier le concept le plus important dans cette théorie, les opérateurs maximaux monotone, pour abordé l'étude d'un problème d'évolution non linéaire régis par la classe des opérateurs maximaux monotones.
Il est bien connu de la théorie de Hille-Yosida que pour une condition initiale $x_0 \in D(A)$, il existe une solution unique $x \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ de

$$x'(t) + Ax(t) = 0, t > 0$$

où $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur maximal monotone sur un espace de Hilbert.
Dans le cas multivoque, c'est à dire pour des inclusions différentielles, les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones trouvent leurs motivations dans différentes applications, en mécanique elasto-plasticité contrôle optimal, économétrie, etc...et englobent différentes classe de problèmes, notamment les opérateurs sous différentiels et le processus de rafle.
Ce type de problème a été d'abord étudie lorsque A ne dépende pas du temps par H.Brezis [6] qui utilise la méthode de la régularisation Yosida pour démonter l'existence d'une unique solution Lipschitzienne de ce problème.
De nombreux auteurs se sont intéressés à chercher des approximation ou régularisation pour obtenir à partir d'un opérateur monotone donné un autre qui a plus de propriétés régulières. On note comme exemple la régularisés de Yosida voir [1],[5]...

Ce mémoire comprend trois chapitres ordonné comme suit,
le premier chapitre contient les outils et les notions de base nécessaire pour élaborer notre travail. Nous rappelons quelque définitions et théorèmes que nous allons utiliser dans le deuxième et le troisième chapitre.
Dans le deuxième chapitre, on commence par donner des notions sur les opérateurs monotones et maximaux monotones et donner aussi des exemples explicatifs, et on donne aussi quelques propriétés des opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert.
Le troisième chapitre est consacré à une classe très importante des inclusions différentielles, l'étude d'existence et d'unicité de solution pour le problème,

$$(\mathcal{P}) \qquad -\frac{du}{dt}(t) \in Au(t) \quad p.p \quad t \in [0, +\infty[$$

où A est un opérateur maximal monotone, nous consacrons en premier lieu à poser les bases théoriques nécessaires à la démonstration du théorème principale. En particulier nous étudions les propriétés générales de l'approximation de Yosida.
Enfin, on va donner une démonstration régureuse du théorème d'existence et d'unicité de problème $(\mathcal{P})$ qui été étudier par H.Brezis [6].

Chapitre 1

Notations et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de bases, tous les résultats et les notions qui nous serons utile tout au long de ce mémoire.
On commence par quelque notations, puis nous représentons des définitions et concepts fondamentaux, on donne la notion de la topologie faible, fonction convexe, Lipschitzienne, sous différentielle et cône normale, une brève sur les multi-application et la continuité et enfin quelque théorème utiles.

1.1 Notations

Dans tout le document nous désignerons par,

- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$
- E ou X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ $E\prime$ ou X' le dual topologique muni de norme $\|.\|_{E'} = \sup\limits_{x \in \overline{B}_E} |\langle ., x\rangle|$ (E' est l'espace vectoriel normé des formes linéaire continue sur E)
- H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle$ et la norme $\|., .\|_H$.
- I_H l'identité de H.
- $V(x_0)$ l'ensemble des voisinages d'un point x_0.
- $\limsup$(resp $\liminf$) désigne la limite supérieure (resp inférieure).
- $\sigma(X, X')$ la topologie faible de X
- $x_n \rightharpoonup x$ exprime que la suite x_n converge faiblement vers x.
- $x_n \to x$ exprime que la suite x_n converge fortement vers x.
- [.] désigne le couple élément de $H \times H$.

- A un opérateur de H dans H.
- D(A) le domaine de A.
- R(A) l'image de A dans H.
- $Int(A)$ l'intérieur de A dans H.
- $gphA$ le graphe de A.
- $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble des parties de H.
- $B_H, \overline{B}_H$ la boule unité ouvert de H, (fermé de A respectivement).
- $B(x_0, r)$ la boule ouvert de centre x_0 et de rayon r.
- $\overline{B}(x_0, r)$ la boule fermé de centre x_0 et de rayon r.
- χ_A la fonction indicatrice de A définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in A \\ +\infty & sinon \end{cases}$
- $C([0, +\infty[; H)$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans H.
- $L^1([0, T]; H)$ l'espace des fonctions intégrable définies sur [0,T] à valeurs dans H.
- $L^2([0, T]; H)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré Lebesgue-intégrable muni de sa norme habituelle.
- $\partial\varphi(x_0)$ le sous différentiel de φ au point x_0.
- $C^1([0, +\infty[; H)$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans H et la dérivée première continue.
- $Proj_C$ la fonction définie de H dans C, projection sur C.
- (S,$\mathcal{B}, \mu$) un espace mesuré.
- $D(H, G)$ espace normé des opérateurs linéaires bornés de H vers G.
- p.p. presque par tout.

1.2 Définitions et concepts fondamentaux

Définition 1.1. *[3]*

Soient Z et Y deux ensembles quelconques.
Soit D un sous ensemble de $Z(D \subseteq Z)$.

▶ *Si à tout éléments $x \in D$ correspond un élément $y \in Y$, on dit que y=A(x) est un opérateur et note $A : D \to Y$.*

▶ *L'ensemble D est le domaine de définition de A et se note généralement par D(A) .*

▶ *L'ensemble $R(A) = \{y, y = A(x), x \in D\}$ s'appelle ensemble des valeurs de A .*

Définition 1.2. *[3]*

Soient Z et Y deux ensembles quelconques,

- *Soit $A : Z \longrightarrow Y$, on dit que A est localement borné ou point $u \in D(A)$ si et seulement si,*

$$\exists M > 0, r > 0, \textit{telle que} \quad \|v'\|_Y \leq M, \quad \forall v' \in Av \quad \textit{et} \quad v \in D(A) \cap \bar{B}(u,r).$$

- *On dit qu 'un opérateur $A : Z \longrightarrow Y$ est borné si l'image d'un sous ensemble borné de Z est un sous ensemble borné de Y.*

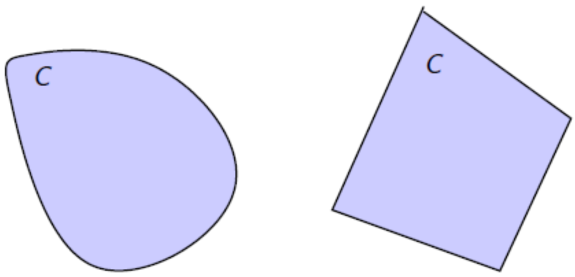
Définition 1.3. *[6]*

On dit qu'un ensemble $C \subset E$ est convexe si et seulement si,

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0,1]; \; \lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

Et on a tout sous espace vectoriel est convexe.

► Exemples des ensembles convexes



Définition 1.4. *[12]*

Soit $A \subset E$

1) *On appelle enveloppe convexe de C qu'on note $conv(C)$ l'intersection de tous les sous ensembles convexe contenant C, c'est le plus petit convexe contenant C.*
2) *On appelle enveloppe convexe fermé de C qu'on note $\overline{conv(C)}$ l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés contenant C, c'est le plus petit convexe fermé contenant C.*

Théorème 1.5. *[12]*

Soit $C \subset E$

$$conv(C) = \left\{ y = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j / k \in \{0,1,...\}, (\lambda_j)_j \subset \mathbb{R}^{k+1}, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 1, x_j \in C, \forall j = 1..k+1 \right\}$$

Définition 1.6. *[6]*

Soit $D \subset H$ et $J : D \mapsto H$. On dit que J est une contraction si,

$$\| Jx - Jy \|_H \leq \| x - y \|_H , \forall x, y \in D.$$

Définition 1.7. *[3]*

On dit qu'un opérateur $A : X \mapsto X^{'}$ est coercif si,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\langle y_n, x_n - x_0 \rangle}{\| x_n \|} = +\infty, \quad \exists x_0 \in X \quad et\, \forall [x_n, y_n] \in A \times A \quad telle\, que, \lim_{n \to +\infty} \| x_n \| = +\infty.$$

Ou bien A est coercif si,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\langle y_n, x_n \rangle}{\| x_n \|} = +\infty, \quad pour [x_n, y_n] \in A \times A \quad telle\, que, \lim_{n \to +\infty} \| x_n \| = +\infty.$$

1.3 Topologie faible

Définition 1.8. *[5]*

Soit $f \in X'$ un élément fixé et,

$$\begin{aligned} \varphi_f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \varphi_f = \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

Lorsque f parcourt $X^{'}$, on obtient une famille d'applications φ_f i.e. $(\varphi_f)_{f \in X'}$.
On appelle la topologie faible sur X, la topologie la moins fine sur X rendant les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$ continues et on la note $\sigma(X, X')$.

Proposition 1.9. *[5]*

Soit $(x_n)_n$ une suite de X alors, quand $n \longrightarrow \infty$ on a,

1. $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \forall f \in X'$.
2. $x_n \to x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$.
3. $x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow (\|x_n\|)_n$ *est borné et* $\|x\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|x_n\|$.
4. $x_n \rightharpoonup x$ *et* $f_n \longrightarrow f \Longrightarrow \langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

Démonstration.

1. On a $x_n \rightharpoonup x$ équivaut à $\varphi_f(x_n) \longrightarrow \varphi_f(x), \forall f \in X'$.
   D'où
   $$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall f \in X'.$$
2. Nous avons $x_n \longrightarrow x$ donc, $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.
   D'autre part nous avons,
   $|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| = |\langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f\|_{X'}\|x_n - x\|$, alors $\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle \forall f \in X'$,
   d'où $x_n \rightharpoonup x$.
3. On a $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall f \in X'$.
   La suite $(\langle f, x_n\rangle)_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$, donc elle est bornée,
   d'autre part nous avons,
   $\|x_n\| = \underset{f\in\overline{B}_{X'}}{sup} |\langle f, x_n\rangle|$, comme $(\langle f, x_n\rangle)_n$ est bornée alors, $(\|x_n\|)_n$ est bornée. Nous avons,
   $$\forall f \in X', |\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\|_{X'}\|x_n\|$$
   Donc,
   $$\liminf_{n\to+\infty} |\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\|_{X'} \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$
   Alors,
   $$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{X'} \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$
   Ceci donne,
   $$\underset{f\in\overline{B}_{X'}}{sup} |\langle f, x\rangle| \leq \underset{f\in\overline{B}_{X'}}{sup} \|f\|_{X'} \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$
   C'est à dire,
   $$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$
4. Soit $(x_n)_n \subset X$ et $(f_n)_n \subset X'$ et $x_n \rightharpoonup x, f_n \longrightarrow f$,
   donc,
   $\langle h, x_n\rangle \longrightarrow \langle h, x\rangle, \forall h \in X'$ et $(\|x_n\|)_n$ est bornée de plus, $\|f_n - f\|_{X'} \longrightarrow 0$,
   et par conséquent,
   $$\|f_n - f\|_{X'}\|x_n\| \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &= |\langle f_n, x_n\rangle + \langle f, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \\
&\leq |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \\
&= |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n\rangle| - |\langle f, x\rangle| \\
&\leq \|f_n - f\|_{x'} \|x_n\| + |\langle f, x_n\rangle| - |\langle f, x\rangle|.
\end{aligned}$$

Donc,

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \longrightarrow 0.$$

D'ou le résultat désiré. ■

1.4 Fonctions convexes

Définition 1.10. *[12]*

Soit E un espace vectoriel topologie réel et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.
On appelle domaine effectif de f qu'on note Dom(f) l'ensemble,

$$Dom(f) = \{x \in E : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.11. *[12]*

On dit que la fonction f est propre si,

$$f : E \longrightarrow]-\infty, +\infty] \quad et \quad f \not\equiv +\infty.$$

Ou bien, $domf \neq \emptyset$.

Définition 1.12. *[12]*

- *Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est convexe si,*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

  à condition que le deuxième membre soit bien défini
- *f est dit concave si,*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

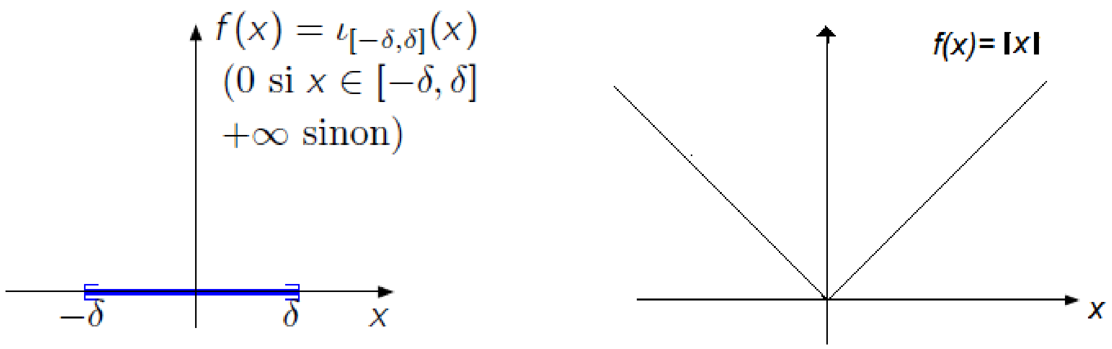


FIGURE 1.1 – Exemples des fonctions convexes

1.5 Fonctions lipschitziennes

Définition 1.13. *[5]*

Soit X un espace de Banach et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, On dit que f est Lipschitzienne de rapport k s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X$.

Définition 1.14. *[5]*

Soient X un espace de Banach, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est localement Lipschitzienne de rapport $k > 0$ au voisinage de x_0 si pour un certain $\varepsilon > 0$, f est Lipschitzienne de rapport k sur l'ensemble $x_0 + \varepsilon B(0, 1) = B(x_0, \varepsilon)$.

Théorème 1.15. *[5]*

Soient X un espace de Banach, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction, si f est Lipschitzienne. Alors f est localement Lipschitzienne.

Définition 1.16. *[5]*

Soient X un espace de Banach $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est contractante (ou bien est une contraction) si elle est k-Lipschitzienne avec $k < 1$.

1.6 Fonctions semi continues inférieurement

Définition 1.17. *Soit $\mathbb{E}$ un espace topologique et soit $f : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$.*
Alors f est dit semi continue inférieurement (s.c.i en abréger) au point $x_0 \in E$ si et seulement si,

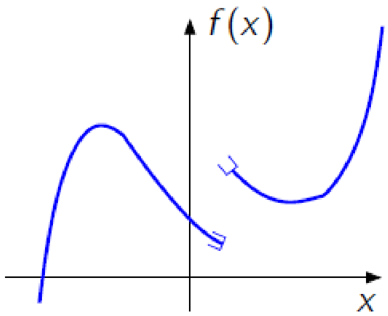
$$\forall h \in \mathbb{R} \quad h < f(x_0), \exists v \in V(x_0)/h < f(x) \quad \forall x \in v.$$

Définition 1.18. *Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, et soit $x_0 \in E$. on définit*

$$\liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \underset{v \in v(x_0)}{sup} \; \underset{x \in v}{inf} f(x).$$

$$\limsup_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \underset{v \in v(x_0)}{inf} \; \underset{x \in v}{sup} f(x).$$

▶ Exemple d'une fonctions s.c.i



Proposition 1.19. *[5]*

Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et soit $x_0 \in E$ alors,
f est s.c.i ou point x_0 si seulement si $\liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$.
Et puisque nous avons toujours $\liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$ alors,
f est s.c.i au point x_O si seulement si $\liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Proposition 1.20. *[5]*

Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors les conditions suivant sont équivalentes,

1. *f est s.c.i sur E.*
2. *Les ensembles $\{x \in E : f(x) \leq \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont fermés.*
3. *L'épigraphe de f est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.*

Proposition 1.21. *[1]*

Soit E un espace vectoriel topologique compact et soit $f : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction s.c.i, alors f atteint son minimum sur E.

1.7 Fonctions absolument continues

Définition 1.22. *[1]*

Soit H un espace de Hilbert, une fonction $f : [a, b] \longrightarrow H$ est dite absolument continue si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, telle que pour toute suite $([b_n, a_n])_{n\in N}$ de sous intervalles de [a,b] d'intérieurs disjoints on a,

$$\sum_{n\geq 0}(b_n - a_n) < \delta \Longrightarrow \sum_{n\geq 0}\|f(a_n) - f(b_n)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.23. *[1]*

Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$ est absolument continue si et seulement si elle est intégrable de sa dérivée c'est à dire

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)ds.$$

Remarque 1. *On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.*

Lemme 1.24. *[1]*

Soit $u : [0, T] \longrightarrow H$ une fonction absolument continue . Alors,
1) $\int\limits_0^T \langle u^{'}(t), u(t)\rangle dt = \frac{1}{2}\big(\|u(T)^2\| - \|u(0)^2\|\big)$.
2) $\frac{1}{2}\big(\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2\big) = \langle u^{'}(t), u(t)\rangle = \|u(t)\|^2$.

Remarque 2.

- ▶ *Toute application Lipschitzienne est absolument continue.*
- ▶ *Toute application absolument continue est uniformément continue.*

1.8 Sous-différentiel et cône normal

Définition 1.25. *[12]*

Soient $\varphi : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in E$, telle que $\varphi(x_0)$ est finie ($\varphi(x_0) \in \mathbb{R}$).
Alors un point $x' \in E'$ est dit sous gradient à f au point x_0 si et seulement si,

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle, \quad \forall x \in E$$

L'ensemble de tous les points sous gradients à f au point x_0 est a appelé sous différentiel de f au point x_0 noté $\partial\varphi(x_0)$ i.e.

$$\partial\varphi(x_0) = \{x' \in E' / \varphi(x) - \varphi(x_0) \geq \langle x', x - x_0 \rangle \quad \forall x \in E\}.$$

On dit que f est sous différentiable de f au point x_0 si $\partial\varphi(x_0) \neq \varnothing$.

Définition 1.26. *[4]*

Un sous ensemble $C \subset H$ est un cône si,

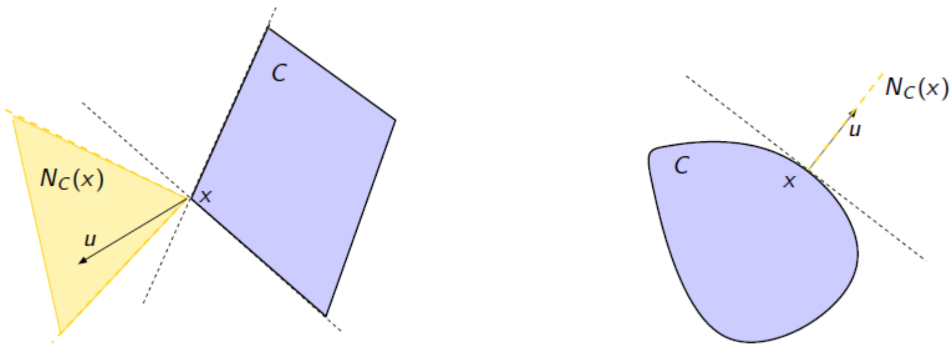
$$\forall x \in C, \forall \lambda \geq 0, \lambda x \in C.$$

Définition 1.27. *[4]*

Soit $C \subset H$, pour tout $x \in H, \mathcal{X}_C(x)$ la fonction indicatrice de C, $\partial\mathcal{X}_C(x)$ est le cône normal à C en x définie par,

$$N_C(x) = \begin{cases} \{u \in H / \forall y \in C, \quad \langle u, y - x \rangle \leq 0\} & si \quad x \in C \\ \varnothing & sinon \end{cases}$$

▶ *Exemple d'un cône normal*



1.9 Multi-applications et continuité

Définition 1.28. *Soient T, Y deux ensembles non vides, on appelle multi-application définie sur T à valeurs dans Y, toute application de T ayant sa valeur dans $\mathcal{P}(Y)$ (ensemble des parties de Y). On note,*

$$F : T \rightrightarrows Y$$
$$t \longmapsto F(t).$$

c'est à dire $\forall t \in T$ *? F(t) est un sous ensemble de Y.*

- *On appelle domaine de F qu'on note D(F) l'ensemble suivant,*

$$D(F) = \{t \in T, F(t) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle image de F qu'on note R(F) l'ensemble,*

$$R(F) = \{x \in Y / \exists t \in T, x \in F(t)\}.$$

Définition 1.29. *Soit* $F : T \rightrightarrows Y$ *une multi-application, on appelle multi-application inverse associée à F la multi-application,*

$$F^{-1} : Y \rightrightarrows T$$
$$y \longmapsto F^{-1}(y)$$

définie par,

$$t \in F^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in F(t)$$
$$F^{-1}(y) = \{t \in T, y \in F(t)\}.$$

Définition 1.30. *Soit* $F : T \rightrightarrows Y$ *une multi-application, on appelle graphe de F qu'on note gph(F), le sous ensemble de* $T \times Y$ *défini par,*

$$gph(F) = \{(t, y) \in T \times Y, y \in F(t)\}.$$

Définition 1.31. *[1]*

Soient X un espace métrique, A, B deux sous ensembles fermés non vide de X

▶ *L'excès ou (écart) de A sur B (de B sur A resp) est défini par,*

$$e(A, B) = sup\{d(x, B)/x \in A\}$$
$$e(B, A) = sup\{d(y, A)/y \in B\}.$$

▶ *On appelle distance de Hausdorff entre A et B, la fonction* $d_H(.,.)$ *définie par,*

$$d_H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Définition 1.32. *[1]*

Soient X, Y deux espaces métriques, et $F : X \rightrightarrows Y$

▶ *On dit que F est continue, si pour tout* x_1, $x_2 \in X$ *nous avons,*

$$\lim_{x_1 \longrightarrow x_2} d_H(F(x)_1, F(x_2)) = 0.$$

▶ *On dit que F est Lipschitzienne de rapport* $k > 0$, *si pour tout* $x_1, x_2 \in X$ *nous avons,*

$$d_H(F(x)_1, F(x_2)) \leq k \parallel x_1 - x_2 \parallel_X.$$

1.10 Quelques théorèmes utiles

Théorème 1.33. *[6]*

Soit E un espace de Banach, et soit C un sous ensemble fermé de E, soit T une contraction stricte de C dans C alors T admet un point fixe unique.

Théorème 1.34. *[6]*

Soit E un espace de Banach et soit C un sous ensemble fermé de E, soit T un application de C dans C. Supposons qu'il existe un entier k tel que T^k une contraction stricte alors T admet un point fixe unique.

Lemme 1.35. *[5] (lemme de Zorn)*
tout ensemble inductif (i.e.totalement ordonné) non vide admet un élément maximal.

Définition 1.36. *[5]*

Soient H un espace préhilbertien, $C \subset H$ un convexe fermé et $y \in H$. Alors il existe un unique point $x \in C$ tel que, $\parallel y - x \parallel_H = \inf\limits_{z \in C} \parallel z - x \parallel_H$.
On l'appel projection de y sur C $Proj_C(y)$ et on a l'inégalité variationnelle suivante,

$$\langle y - Proj_C(y), z - Proj_C(y) \rangle \leq 0, \, \forall z \in C.$$

Définition 1.37. *[10]*

Soit $(S,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré. Une partie N de S est dite négligeable lorsqu'il existe un $y \in \mathcal{B}$ contenant N est de mesure nulle.

Définition 1.38. *[10]*

Lorsqu'une relation $P\{x\}$ dépend d'une variable $x \in X$, on dit que $P\{x\}$ est vrais presque partout (p.p) si l'ensemble des x tel que $P\{x\}$ ne soit pas vrais est de mesure nulle (négligeable)

Chapitre 2

Étude des opérateurs maximaux monotones

Ce chapitre comporte des concepts d'opérateur monotone, aussi on donne une condition sous laquelle un opérateur monotone sera maximal monotone, cette dernière est une notion très importante dans la théorie d'opérateur monotone. Puisque la nature d'un opérateur monotone peut être assez difficile à manipuler, soit du point de vue théorique, ou du point de vue numérique.

D'un autre coté, souvent on se ramène a considérer certaines opérations sur des opérateurs monotones comme par exemple la somme ponctuelle de deux opérateurs monotones, il est bien connu que cet opérateur donne un opérateur monotone, par contre même si les opérateurs concernés sont maximaux monotones, le résultat n'est pas obligé d'être un opérateur maximal.

Les résultats de ce chapitre sont pris de [1],[4],[6],[7],[8],[9] et [11].

Définition 2.1.

Un opérateur multivoque sera une application de H dans $\mathcal{P}(H)$.

On identifie toujours A avec son graphe dans $H \times H$ et l'on écrit $y \in Ax$ où $[x, y] \in A$.

Définition 2.2.

Soit A un opérateur de H.

▶ *On appelle graphe de A qu'on note gph(A) l'ensemble définie par,*

$$gph(A) = \{(x, y) \in H \times H; y \in Ax\}.$$

▶ *On appelle domaine de A l'ensemble définie par,*

$$D(A) = \{x \in H, Ax \neq \emptyset\}.$$

► *On appelle l'ensemble des valeurs de A qu'on note R(A) l'ensemble définie par,*

$$R(A) = \underset{x\in H}{\cup} Ax$$

Définition 2.3. *Soient A et B deux opérateurs de H, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ alors ; $\lambda A + \mu B$ est l'opérateur défini comme suite,*

$$\begin{aligned} &H \longrightarrow \mathcal{P}(H) \\ &x \longmapsto (\lambda A + \mu B)(x) = \lambda Ax + \mu Bx = \{\lambda \upsilon + \mu\omega; \upsilon \in Ax, \omega \in Bx\} \end{aligned}$$

Avec

$$D(\lambda A + \mu B) = D(A) \cap D(B)$$

Définition 2.4. *l'opérateur A^{-1} est l'opérateur dont le graphe est symétrique de celui de A, c'est a dire,*

$$x \in A^{-1}y \Longleftrightarrow y \in Ax$$

et on a

$$D(A^{-1}) = R(A). \tag{2.1}$$

Démonstration.

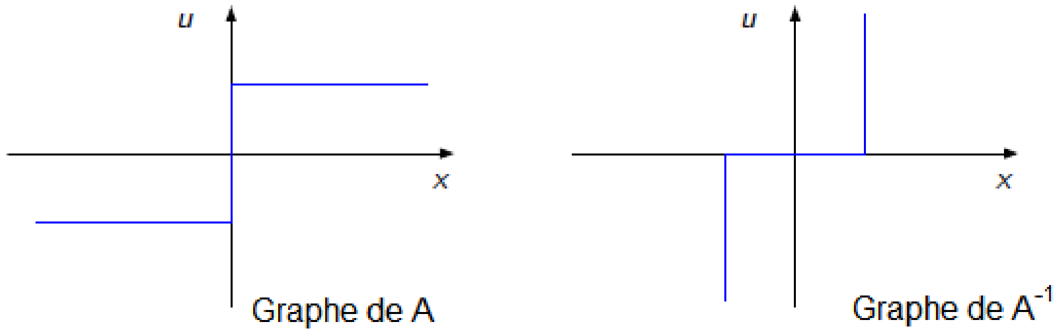
Soit $y \in H$,

$$\begin{aligned} y \in R(A) &\Longleftrightarrow \exists\, x \in H : y = Ax \\ &\Longleftrightarrow \exists\, x \in H : x \in A^{-1}y \\ &\Longleftrightarrow A^{-1}y \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow y \in D(A^{-1}) \end{aligned}$$

■

Définition 2.5. *Soient H un espace de Hilbert, soit $A : H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$*
A^{-1} est l'opérateur de H vers $\mathcal{P}(H)$ de graphe, $gph(A^{-1}) = \{(y, x), (x, y) \in gphA\}$. ►

Exemples sur des graphes de A^{-1}



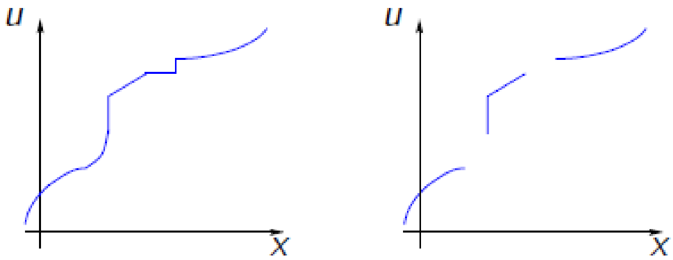
2.1 Notions d'un opérateur monotone

Les résultats de cette section sont pris de [1],[6]

Définition 2.6. *Soit X un espace vectoriel topologique de dual X', un opérateur A défini sur X à valeurs dans X' est dit monotone si,*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A); \langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

► *Exemples pour des graphes associés à des opérateurs monotones*



Remarque 3. *La notion d'opérateur monotone dans un espace de Hilbert H apparait comme cas particulier de celle d'opérateur monotone d'un espace vectoriel dans dual (H est identifie à son dual).*

Définition 2.7. *Un opérateur A de H est dit monotone si*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A);\ \langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

ou plus précisément,

$$\forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2; \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \tag{2.2}$$

Exemple 2.8. *Soient A et B deux opérateurs monotones de H et pour tout $\lambda > 0$, alors les opérateurs,*

i) $A + B = \{[x, y + z], [x, y] \in A, [x, z] \in B\}$.

ii) $\lambda A = \{[x, \lambda y]; [x, y] \in A\}$.

iii) $A^{-1} = \{[y, x]; [x, y] \in A\}$.
sont aussi des opérateurs monotones .

Démonstration.
i) Soient $x_1, x_2 \in D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ alors ;

$$x_1, x_2 \in D(B) \quad \text{et} \quad x_1, x_2 \in D(A)$$

Et comme A et B deux opérateurs monotones alors ;

$$\langle Bx_1 - Bx_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$$

et

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0.$$

Par addition on trouve ;

$$\begin{aligned}
&\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle + \langle Bx_1 - Bx_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0 \\
&\Longrightarrow \langle (Ax_1 - Ax_2) + (Bx_1 - Bx_2), x_1 - x_2\rangle \geq 0 \\
&\Longrightarrow \langle (A + B)x_1 - (A + B)x_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0
\end{aligned}$$

D'ou l'opérateur $A + B$ est un opérateur monotone.

ii) Soient $x_1, x_2 \in D(A)$, soit $\lambda > 0$, on a $D(\lambda A) = D(A)$,
donc
$x_1, x_2 \in D(A)$ et A est un opérateur monotone, alors,

$$\begin{aligned}
\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0 &\Longrightarrow \lambda\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0 \\
&\Longrightarrow \langle \lambda Ax_1 - \lambda Ax_2, x_1 - x_2)\rangle \geq 0
\end{aligned}$$

D'ou, λA est un opérateur monotone.

iii) Soit $x_1, x_2 \in D(A)$, soit $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$ alors ;
$y_1, y_2 \in R(A)$ et par (2.1) on a, $y_1, y_2 \in D(A^{-1})$ et $x_1 \in A^{-1}y_1, x_2 \in A^{-1}y_2$.
De plus A est un opérateur monotone, donc,

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

$$\Longrightarrow \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0.$$

Alors A^{-1} est un opérateur monotone.

■

On donne maintenant la définition d'un opérateur accrétif dans un espace de Banach définit par T.Kato. [6]

Définition 2.9. *Soit X un espace de Banach de norme $\|.\|$. On dit qu'un opérateur A de X dans $\mathcal{P}(X)$ est accrétive si ;*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \forall \lambda > 0, \|x_1 - x_2\| \leqslant \|(x_1 - x_2) + \lambda(Ax_1 - Ax_2)\|$$

Remarque 4.

- *La notion d'opérateur monotone dans un espace de Hilbert apparait comme cas particulier de celle d'opérateur accrétif dans un espace de Banach.*
- *Accrétif et monotone sont deux notions équivalentes dans un espace de Hilbert.*

Proposition 2.10. *Soit H un espace de Hilbert, soit A un opérateur de H de norme $\|.\|_H$. A est monotone si et seulement si il est accrétif.*

Démonstration.

Condition nécessaire

Soit A un opérateur monotone, soit $\lambda > 0$, soient $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$, alors,

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

$$\Longrightarrow 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0,$$

$$\Longrightarrow 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 \geq 0,$$

$$\Longrightarrow \|x_1 - x_2\|^2 + 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2,$$

$$\Longrightarrow \|(x_1 - x_2) + \lambda y_1 - y_2\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2,$$

$$\Longrightarrow \|(x_1 - x_2) + \lambda y_1 - y_2\| \geq \|x_1 - x_2\|.$$

Condition suffisante

Soit $\lambda > 0$, soient $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$, et

$$\|(x_1 - x_2) + \lambda y_1 - y_2\| \geq \|x_1 - x_2\|.$$

Alors,

$$\|(x_1 - x_2) + \lambda y_1 - y_2\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2$$

$$\Longrightarrow \|x_1 - x_2\|^2 + 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2$$

$$\Longrightarrow 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 \geq 0,$$

On divise par λ, et lorsque $\lambda \longrightarrow 0$; $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$.

Donc A est monotone. ■

Proposition 2.11. *Soit $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre sur H, le sous différentiel $\partial\varphi$ est monotone.*

Démonstration.

Soient $x_1, x_2 \in H$, soient $y_1 \in \partial\varphi(x_1), y_2 \in \partial\varphi(x_2)$, on a par définition,

$$y_1 \in \partial\varphi(x_1) \Longleftrightarrow \partial\varphi(x_2) \geq \partial\varphi(x_1) + \langle x_2 - x_1, y_1\rangle$$

$$y_2 \in \partial\varphi(x_2) \Longleftrightarrow \partial\varphi(x_1) \geq \partial\varphi(x_2) + \langle x_1 - x_2, y_2\rangle$$

par addition,

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \langle x_2 - x_1, y_1\rangle + \langle x_1 - x_2, y_2\rangle.$$

Alors,

$$\langle x_2 - x_1, y_1\rangle + \langle x_1 - x_2, y_2\rangle \leq 0$$

donc,

$$\langle x_1 - x_2, y_1\rangle + \langle x_1 - x_2, -y_2\rangle \geqslant 0$$

et par suit,

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle \geq 0, \forall x_1, x_2 \in H.$$

D'ou, $\partial\varphi$ est monotone. ■

Proposition 2.12. *Soit H un espace de Hilbert, C un convexe fermé de H. Alors l'opérateur $Proj_C$ est un opérateur monotone.*

Démonstration.

soient $x_1, x_2 \in D(Proj_C) = D(C)$. Par définition,

$$\langle x_1 - Proj_C(x_1), z - Proj_C(x_1)\rangle \leq 0, \quad \forall z \in C.$$

et

$$\langle x_2 - Proj_C(x_2), z^{'} - Proj_C(x_2)\rangle \leq 0, \quad \forall z^{'} \in C.$$

Pour $z = Proj_C(x_2) \in Cet \quad z^{'} = Proj_C(x_1) \in C$. On obtient ,

$$\langle x_1 - Proj_c(x_1), proj_C(x_2) - proj_C(x_1)\rangle \leq 0,$$

$$\text{et } \langle x_2 - Proj_C(x_2), Proj_C(x_1) - Proj_C(x_2)\rangle \leq 0$$

D'ou,

$$\langle x_1 - Proj_C(x_1) + Proj_C(x_2) - x_2, Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1)\rangle \leq 0.$$

$$\langle x_1 - x_2, Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1)\rangle + \langle Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1), Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1)\rangle \leq 0$$

Alors,

$$-\langle x_1 - x_2, Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1)\rangle \geq \langle Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1), Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1)\rangle$$

On conclut que ;

$$\langle x_1 - x_2, Proj_C(x_1) - Proj_C(x_2)\rangle \geq \| Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1) \|^2 \geq 0.$$

D'ou l'opérateur $Proj_C$ est monotone. ∎

Proposition 2.13. *Soient H un espace de Hilbert, (S, β, μ) un espace mesuré positif, soit un opérateur $A : H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$, et soit $\mathcal{A} : L^2(S, H) \longrightarrow L^2(S, H)$ l'opérateur $\mathcal{A}$ définie par*

$$v \in \mathcal{A}u \Longleftrightarrow v(t) \in Au(t) \quad \mu.p.p, t \in S.$$

Si A est monotone alors $\mathcal{A}$ l'est aussi.

Démonstration.

Soient $u_1, u_2 \in D(\mathcal{A})$, $v_1 \in \mathcal{A}u_1, v_2 \in \mathcal{A}u_2, t \in S$ et $\lambda > 0$.
Donc, $u_1(t), u_2(t) \in D(A(t))$, $v_1(t) \in Au_1(t), v_2(t) \in Au_2(t)$ Pour tout $t \in S$ et A est monotone, d'après la Proposition (2.10), on obtient

$$\| u_1(t) - u_2(t) \| \leq \| u_1(t) - u_2(t) + \lambda(v_1(t) - v_2(t)) \| .$$

$$\Longrightarrow \| u_1(t) - u_2(t) \|^2 \leq \| u_1(t) - u_2(t) + \lambda(v_1(t) - v_2(t)) \|^2$$
$$\Longrightarrow \int_S \| u_1(t) - u_2(t) \|^2 \, d\mu(t) \leq \int_S \| u_1(t) - u_2(t) + \lambda(v_1(t) - v_2(t)) \|^2 \, d\mu(t)$$
$$\Longrightarrow \int_S \| (u_1 - u_2)(t) \|^2 \, d\mu(t) \leq \int_S \| (u_1 - u_2 + \lambda(v_1 - v_2))(t) \|^2 \, d\mu(t)$$
$$\Longrightarrow \| u_1 - u_2 \|^2_{L^2(S,H)} \leq \| u_1 - u_2 + \lambda(v_1 - v_2) \|^2_{L^2(S,H)}$$
$$\Longrightarrow \| u_1 - u_2 \|_{L^2(S,H)} \leq \| u_1 - u_2 + \lambda(v_1 - v_2) \|_{L^2(S,H)} .$$

D'ou $\mathcal{A}$ est un opérateur monotone. ■

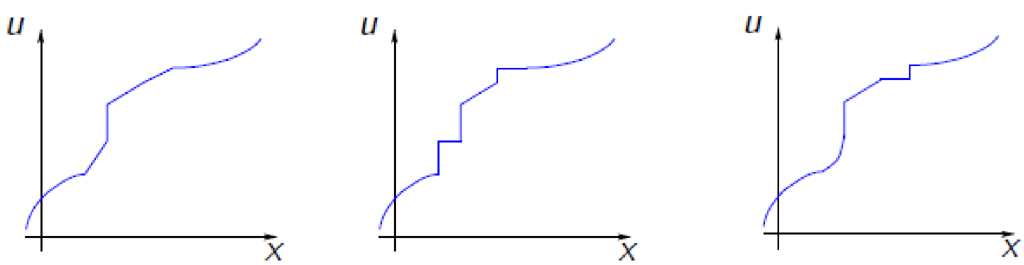
2.2 Notions d'un opérateur maximal monotone

Définition 2.14. *Un opérateur A de H est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones.*

Proposition 2.15. *A est un opérateur maximal monotone si et seulement si A est monotone, et pour tout $(x, y) \in H \times H$ tel que $\langle y - Ax_0 \ , \ x - x_0 \rangle \geq 0$, $\forall x_0 \in D(A)$, alors $y \in Ax$*
Ou plus précisément,

$$\langle y - y_0, x - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall \quad y_0 \in Ax_0, \ alors \ y \in Ax$$

► Exemples pour des graphes associés à des opérateurs maximaux monotones



Remarque 5. *Le graphique de n'importe qu'elle opérateur monotone est contenu dan le graphique d'un opérateur maximal monotone, car l'union d'une famille croissante d'opérateur monotone est évidemment dans le graphique d'un opérateur monotone.*

Proposition 2.16. *Soit A un opérateur de H, on dit que l'opérateur A est maximal monotone s'il est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone A' de H , tel que $gph(A) \subset gph(A')$.*

Proposition 2.17. *Soit H un espace de Hilbert. Si A un opérateur de H. Si A un opérateur monotone et continue. Alors A est maximal monotone .*

Proposition 2.18. *Soient H un espace de Hilbert, A un opérateur monotone, alors il existe $\tilde{A} : H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ un opérateur maximal monotone de H ($\tilde{A}$ n'est pas nécessairement unique) tel que $gph(A) \subset gph(\tilde{A})$.*

Démonstration.

Le résultat de ce théorème se déduit en utilisant le Lemme de Zorn.
Posons $M_0 = gph(A) \subset H \times H$, puisque A est monotone donc M_0 est aussi monotone.
Soit

$$\mathcal{M}(M_0) = \{L \subset H \times H / M_0 \subset\ L\, , et\, L\, est\, monotone\}.$$

Puisque $M_0 \in \mathcal{M}(M_0)$, donc $\mathcal{M}(M_0) \neq \emptyset$.
Considérant la famille

$$(L_i)_{i\in I} \subset \mathcal{M}(M_0) \text{ telle que } \forall \text{ i,j} \in I, L_i \subset L_j \text{ ou } L_j \subset L_i,$$

donc,

$$L_0 = \bigcup_{i\in I} L_i \in \mathcal{M}(M_0).$$

En effet,

$$\forall [x, y], [x_1, y_1] \in L_0, \exists i, j \in I \text{ tels que } [x, y] \in L_i, \text{ et } [x_1, y_1] \in L_j.$$

La famille est totalement ordonnée et donc on peut supposer que $L_j \subset L_i$ ce qui donne $[x, y], [x_1, y_1] \in L_i$.
Puisque L_i est monotone alors, L_0 est aussi monotone ,
C'est à dire,

$$\exists i \in I \text{ tel que } [x,y],[x_1,y_1] \in L_i \text{ et } \langle y-y_1, x-x_1\rangle \geq 0.$$

Donc,

$$\exists i \in I \text{ tel que } [x,y],[x_1,y_1] \in L_0, \langle y-y_1, x-x_1\rangle \geq 0$$

Donc L_0 est monotone, et $M_0 \subset L_0$. Par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal dans $\mathcal{M}(M_0)$, cet élément maximal doit correspondre au graphe d'un opérateur maximal monotone, c'est à dire,

$$\exists \tilde{A} : H \longrightarrow \mathcal{P}(H) \text{ maximal monotone tel que } gph(A) \subset gph(\tilde{A}).$$

■

Proposition 2.19. *Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur monotone de H, si A est maximal monotone, alors Ax est convexe fermé pour tout $x \in D(A)$.*

Démonstration.

Supposons A est maximal monotone. Soient $x \in D(A)$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H convergeant vers y dans H, avec $y_n \in Ax$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour démontrer que Ax est fermé, il suffit de démontrer que $y \in Ax$, c'est à dire,

$$\langle y - z_2, x - z_1\rangle \geq 0, \quad \forall z_1 \in D(A), \quad \forall z_2 \in Az_1$$

Puisque A est monotone, Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle y_n - z_2, x - z_1\rangle \geq 0, \quad \forall z_1 \in D(A), \quad \forall z_2 \in Az_1.$$

Par passage à la limite, et par la continuité du produit scalaire, on déduit que ,

$$\langle y - z_2, x - z_1\rangle \geq 0, \forall z \in D(A), \forall z_2 \in Az_1.$$

Alors $y \in Ax$, il résulte que Ax est fermé pour tout $x \in D(A)$.
Montrons maintenant que Ax est convexe,
Soit $x \in D(A)$, Soit $y_1, y_2 \in Ax$, $\lambda \in [0,1]$ nous avons,

$$\langle y_1 - z_2, x - z_1\rangle \geq 0, \forall z_2 \in Az_1$$

et,

$$\langle y_2 - z_2, x - z_1\rangle \geq 0, \forall z_2 \in Az_1.$$

Donc,

$$\lambda\langle y_1 - z_2, x - z_1\rangle \geq 0, \forall z_2 \in Az_1$$

et

$$(1-\lambda)\langle y_2 - z_2, x - z_1\rangle \geq 0, \forall z_2 \in Az_1.$$

Alors, en sommant les deux inégalité on trouve,

$$\langle \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 + z_2, x - z_1\rangle \geq 0, \forall z_2 \in Az_1.$$

Et puisque A est maximal monotone donc,

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in Ax.$$

D'où, Ax est convexe. ■

Proposition 2.20. *Soit A un opérateur définie sur H tel que $D(A) = H$. On a l'équivalence entre les trois propriétés suivantes,*

1. *A est maximal monotone.*
2. *A monotone et $R(I + \lambda A) = H, \forall \lambda > 0$.*
3. *Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur de contractante définie sur H .*

Proposition 2.21. *Soit $A : H \longmapsto \mathcal{P}(H)$ un opérateur maximal monotone et*

$$\mathcal{A} : L^2_H([0,T]) \longrightarrow \mathcal{P}\big(L^2_H([0,T])\big)$$

l'opérateur définie par,

$$v \in \mathcal{A}u \Longleftrightarrow v(t) \in Au(t) p.p, t \in [0,T]$$

alors $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone.

Démonstration.

On a $\mathcal{A}$ est un opérateur monotone d'après la Proposition(2.13). Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est maximal monotone, c'est à dire que pour tout $\lambda > 0$, $R(I_{L^2} + \lambda\mathcal{A}) = L^2([0,T];H)$ tel que I_{L^2} est l'identité de $L^2([0,T];H)$
Puisque A est maximal monotone, alors $(I+\lambda A)^{-1}$ est lipschitzienne de H dans H, d'après la Proposition (2.20) et par suit est mesurable
Par conséquent, Si $g \in L^2(]0,T[;H)$. La fonction $\overline{g}$ définie par, $\overline{g}(t) = (I+\lambda A)^{-1}g(t)$ est mesurable.

Donc, $\exists \bar{g} \in L^2_H([0,T])$ telle que, $\bar{h} : t \longrightarrow (I+\lambda A)^{-1}\bar{g}(t) \in L^2_H(]0,T[;H)$ Considérons maintenant la fonction : $h : t \longrightarrow (I+\lambda A)^{-1}g(t)$
Nous avons,

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^2} &\leqslant \|h+\bar{h}-\bar{h}\|_{L^2} \\ &\leqslant \|h-\bar{h}\|_{L^2}+\|\bar{h}\|_{L^2} \\ &\leqslant \|(I+\lambda A)^{-1}(g-\bar{g})(t)\|_{L^2}+\|\bar{h}\|_{L^2} \\ &\leqslant \|g-\bar{g}\|_{L^2}+\|\bar{h}\|_{L^2} \end{aligned}$$

(car $(I+\lambda A)^{-1}$ est contractant par la Proposition (2.20), comme g et $\overline{g}$ et $\overline{h}$ sont des fonction de $L^2([0,T])$, on déduit que h est Lebesgue mesurable et appartient à $L^2(]0,T[;H)$.
D'autre par nous avons,

$$\begin{aligned} & h(t)=(I+\lambda A)^{-1}g(t), \quad \forall t \in [0,T] \\ \iff & g(t) \in (I+\lambda A)h(t), \quad \forall t \in [0,T] \\ \iff & g \in \lambda\mathcal{A}h+h \\ \iff & h \in (I_{L^2}+\lambda\mathcal{A})^{-1}g. \end{aligned}$$

c'est à dire, $\forall g \in L^2(]0,T[;H)$, $\exists\, h \in L^2_H(]0,T[)$ telle que, $h \in (I_{L^2}+\lambda\mathcal{A})^{-1}g$.
D'ou $R(I_{L^2}+\lambda A)=L^2([0,T],H)$.
Donc A est maximal monotone sur l'espace $L^2([0,T];H)$. ■

Lemme 2.22. *Soit A un opérateur monotone. II existe un prolongement $\mathcal{A}$ maximal monotone de A dont le domaine est contenu dans $\overline{conv(D(A))}$.*

Proposition 2.23. *Soit A un opérateur maximal monotone définie sur H alors, A est faiblement fortement fermé dans H.*
c'est à dire,

$$\forall([x_n,y_n])_n \subset A; x_n \rightharpoonup x, y_n \to y \Longrightarrow y \in Ax$$

Démonstration.

Soit $([x_n,y_n])_n \subset A\,telle\,que\,x_n \rightharpoonup x \quad et \quad y_n \to y$.
On a $y_n \in Ax_n$ et nous avons A est monotone donc,

$$\langle y_n-v, x_n-u\rangle \geq 0, \forall \quad [u,v] \in A.$$

donc,

$$\langle y_n,x_n\rangle+\langle v,u\rangle-\langle y_n,u\rangle-\langle v,x_n\rangle \geq 0, \quad \forall[u,v] \in A.$$

Puisque $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, et $(y_n)_n$ converge fortement vers y, d'après la proposition(1.9) on obtient, $(\langle y_n, x_n\rangle)_n$ converge fortement vers $\langle y, x\rangle$, et $(\langle v, x_n\rangle)_n$ converge fortement vers $\langle v, x\rangle$.
De plus, nous avons,

$$\|\langle y_n - y, u\rangle\| \leq \|y_n - y\|\|u\| \quad et \quad \|y_n - y\| \longrightarrow 0$$

On aura,

$$\|\langle y_n, u\rangle - \langle y, u\rangle\| \longrightarrow 0$$

Donc, $(\langle y_n, u\rangle)_n$ converge fortement vers $\langle y, u\rangle$.
En passant à la limite on trouve ,

$$\langle y, x\rangle + \langle v, u\rangle - \langle y, u\rangle - \langle v, x\rangle \geq 0, \quad \forall\, [u, v] \in A.$$

Donc,

$$\langle y - v, x - u\rangle \geq 0, \quad \forall [u, v] \in A.$$

Et puisque A est maximal monotone donc $y \in Ax$.
On résulte que A est faiblement fortement fermé. ■

Théorème 2.24. *Soit C un convexe fermé de H et A un opérateur monotone de H . Alors pour tout $y \in H, \exists\, x \in C$ telle que ;*

$$\langle u + x, v - x\rangle \geq \langle y, v - x\rangle, \quad \forall v \in D(A), u \in Av.$$

Exemple 2.25.

i) Si A un opérateur maximal monotone alors A^{-1} est maximal monotone.
ii) $\forall \lambda > 0$, si A est maximal monotone alors λA est maximal monotone.

Démonstration.

(i) D'après l'exemple (2.8) A^{-1} est monotone.
Soit $x \in D(A), y \in H$ telle que ;

$$\langle x - x_0, y - y_0\rangle \geq 0, \quad \forall x_0 \in A^{-1}y_0,$$

donc ,

$$\langle y - y_0, x - x_0\rangle \geq 0, \quad \forall y_0 \in Ax_0.$$

Par la maximal monotonie de A on aura,

$$y \in Ax \Longleftrightarrow x \in A^{-1}y,$$

ceci implique que A^{-1} est maximal monotone.

ii) D'après l'exemple (2.8), λA est monotone.
Soit $x \in D(\lambda A), y \in H$ telle que ,$\langle x - x_0, y - y_0 \rangle \geq 0, \forall y_0 \in (\lambda A)x_0$.
Donc, $\exists z \in D(A)$, $z = \lambda x, z_0 \in D(A), z_0 = \lambda x_0$, $\langle \lambda x - \lambda x_0, y - y_0 \rangle \geq 0, \forall y_0 \in Az_0$.
Alors,

$$\langle z - z_0, y - y_0 \rangle \geq 0, \quad \forall y_0 \in Az_0.$$

Comme A est maximal monotone on obtient,

$$y \in Az \Longrightarrow y \in (\lambda Ax).$$

Donc λA est maximal monotone.

■

2.3 La maximal monotonie de la somme de deux opérateur

Proposition 2.26. *Soit A et B deux opérateur maximal monotones, $A+B$ est monotone mais il n'est pas nécessairement maximal monotone car on peut avoir*
$D(A+B) = D(A) \cap D(B) = \emptyset$.

Démonstration.

Contre-Exemple

Soit A et B deux opérateur maximal monotones, d'après l'exemple (2.8), A+B est monotone mais n'est pas nécessairement maximal monotone.
Soit $c \in H \setminus \{0\}$, $A = N_{\bar{\mathcal{B}}(c,\|c\|)}$ et $B = N_{\bar{\mathcal{B}}(-c,\|c\|)}$,
Par définition du cône normal on a,

$$A = N_{\bar{B}(c,\|c\|)} = \begin{cases} \{\alpha(x-c), \alpha \in [0,+\infty[\} & si \; \|x-c\| = \|c\| \\ 0 & si \; \|x-c\| < \|c\| \\ \emptyset & sinon \end{cases}$$

$$B = N_{\bar{B}(-c,\|c\|)} = \begin{cases} \{\beta(x+c), \beta \in [0,+\infty[\} & si \ \|x+c\| = \|c\| \\ 0 & si \ \|x+c\| < \|c\| \\ \emptyset & sinon \end{cases}$$

On a aussi $D(A+B) = D(A) \cap D(B) = \{0\}$,
et,

$$(A+B)(0) = A(0) + B(0) = \{-\alpha c + \beta c/\alpha \in [0,+\infty[, \beta \in [0,+\infty[\} = \{\gamma c/\gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Donc A+B est de domaine borné n'est pas surjectif.
D'où A+B n'est pas maximal monotone. ■

Proposition 2.27. *[9]*

Soit H un espace de Hilbert. Si A et B deux opérateurs maximaux monotones de H tel que l'un des propriétés suivantes, soient vérifiées,

1) $D(B) = H$.
2) $D(A) \cap int(D(B)) \neq \varnothing$.
3) $0 \in int(D(A) - D(B))$.

Alors $A + B$ est maximal monotone.

conséquence 1. *Soit $\alpha \in [0, +\infty[$, si A est un opérateur maximal monotone, alors $A+\alpha I$ est maximal monotone.*

En effet, pour $B = \alpha I_H$, $D(B) = D(\alpha I_H)$=$D(I_H) = H$, donc $A + \alpha I_H$ est maximal monotone.

Lemme 2.28. *Soit A un opérateur maximal monotone et B un opérateur monotone lipschitzien de H dans H, alors A+B est maximal monotone.*

Proposition 2.29. *Soit $J : H \longrightarrow H$ est une contraction et $\lambda \in [-1, 1]$ alors, $I + \lambda J$ est maximal monotone.*

Démonstration.

On a J est une contraction. Donc, $\forall (x, y) \in H$

$$\|Jx - Jy\| \leq \|x - y\|.$$

et par l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\langle Jx - Jy, x - y\rangle \leq \|Jx - Jy\|\|x - y\|.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\langle (I+\lambda J)x-(I+\lambda J)y, x-y\rangle &= \langle x+\lambda J_x - y + \lambda J_y, x-y\rangle \\ &= \langle x-y, x-y\rangle + \lambda\langle J_x - J_y, x-y\rangle \\ &= \|x-y\|^2 - \lambda\langle Jx - Jy, x-y\rangle \\ &\geq \|x-y\|^2 - |\lambda| \|Jx-Jy\| \parallel x-y \parallel \\ &\geq (1-|\lambda|)\|x-y\|^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

D'où $(I+\lambda J)$ est monotone. ■

2.4 La maximal monotonie du sous différentielle

Théorème 2.30. *Soit H un espace de Hilbert et $f : H \longrightarrow H$ une fonction convexe et s.c.i.Alors ∂f est un opérateur maximal monotone sur H. Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant,*

Lemme 2.31. *Soit φ une fonction propre convexe sur H et $\alpha \geq 0$. La fonction convexe*

$$x \longrightarrow \varphi(x) + \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2$$

atteint son minimum en x_0 si seulement si $\alpha(y-x_0) \in \partial\varphi(x_0)$.

Démonstration.

Soit $x_0, y \in H, \alpha \geq 0$. On a $\varphi(x_0) < +\infty$, car f est propre. Supposant $\alpha(y-x_0) \in \partial\varphi(x_0)$, alors

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(x_0) \geqslant \langle \alpha(y-x_0), \varepsilon - x_0\rangle \quad \forall \varepsilon \in H. \tag{2.3}$$

Et on a,

$$\begin{aligned}\|\varepsilon - y\|^2 &= \|(\varepsilon - x_0) + (x_0 - y)\|^2 \\ &= \|\varepsilon - x_0\|^2 + 2\langle \varepsilon - x_0), x_0 - y\rangle + \|x_0 - y\|^2.\end{aligned}$$

Donc,

$$\|x_0 - y\|^2 - \|\varepsilon - y\|^2 - 2\langle \varepsilon - x_0, y - x_0\rangle = -\|\varepsilon - x_0\|^2 \leq 0,$$

$$\|x_0 - y\|^2 - \|\varepsilon - y\|^2 \leq 2\langle y - x_0, \varepsilon - x_0\rangle,$$

$$\frac{\alpha}{2}[\|x_0 - y\|^2 - \|\varepsilon - y\|^2] \leq \alpha\langle y - x_0, \varepsilon - x_0\rangle,$$

et d'après (2.3) on obtient ,

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(x_0) \geq \frac{\alpha}{2}[\|x_0 - y\|^2 - \|\varepsilon - y\|^2]$$

$$\varphi(\varepsilon) + \frac{\alpha}{2}\|\varepsilon - y\|^2 \geq \varphi(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x_0 - y\|^2, \forall \varepsilon \in H$$

.

$$\psi(\varepsilon) \geq \psi(x_0) \forall \varepsilon \in H$$

D'où, la fonction

$$x \longmapsto \varphi(x) + \frac{\alpha}{2}|x - y|^2$$

atteint son minimum en x_0.

Inversement,

Soit $y \in H$,$\alpha \geqslant 0$, soit x_0 est le minimum de la fonction

$$x \longmapsto \varphi(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2,$$

c'est à dire,

$$\varphi(\varepsilon) + \frac{\alpha}{2}\|\varepsilon - y\|^2 \geq \varphi(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x_0 - y\|^2, \forall \varepsilon \in H.$$

Donc

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(x_0) \geq \frac{\alpha}{2}[\|x_0 - y\|^2 - \|\varepsilon - y\|^2]$$

En prenant, $\varepsilon = (1-t)x_0 + t\eta$ avec $t \in [0, 1]$.

On obtient,

$$\begin{aligned}
\varphi(\varepsilon) - \varphi(x_0) &\geq \frac{\alpha}{2}[\|x_0 - y\|^2 - \|(1-t)x_0 + t\eta - y\|^2] \\
&= \frac{\alpha}{2}[\|x_0 - y\|^2 - \|(x_0 - y) + t(\eta - x_0)\|^2] \\
&= \frac{\alpha}{2}[\|x_0 - y\|^2 - \|x_0 - y\|^2 + 2t\langle y - x_0, \eta - x_0\rangle + t^2\|\eta - x_0)\|^2 \\
&= \frac{\alpha}{2}[2t\langle y - x_0, \eta - x_0\rangle - t^2\|\eta - x_0\|]^2 \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

et puisque φ est un fonction convexe donc,

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi((1-t)x_0 + t\eta) \leq (1-t)\varphi(x_0) + t\varphi(\eta)$$

$$\varphi(\epsilon) - \varphi(x_0) \leq t\left(\varphi(\eta) + \varphi(x_0)\right) \qquad (2.5)$$

de(2.5) et(2.6) on obtient,

$$t(\varphi(\eta) + \varphi(x_0)) \geq \frac{\alpha}{2}\left[2t\langle y - x_0, \eta - x_0\rangle + t^2|\eta - x_0|^2\right]$$

on divisant par t,

$$\phi(\eta) - \phi(x_0) \geq \alpha\langle y - x_0, \eta - x_0\rangle - (\frac{\alpha}{2})t|\eta - x_0|^2.$$

On faisant tendre t vers 0 on obtient,

$$\varphi(\eta) - \varphi(x_0) \geq \alpha\langle y - x_0, \eta - x_0\rangle, \forall \eta \in H$$

$$\varphi(\eta) - \varphi(x_0) \geq \langle \alpha(y - x_0), \eta - x_0\rangle, \forall \eta \in H$$

Donc, $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$. ■

Revenons maintenant pour démontrer le théorème(2.30)

Démonstration.

On sait d'après la proposition (2.11) que ∂f est monotone, pour montrer qu'il est maximal, on doit démontrer que $R(I + \partial f) = H$
D'après la proposition (2.20)
Il est claire que $R(I + \partial f) \subset H$.
Montrons maintenant que $R(I + \partial f) \supset H$,
soit $y \in H$, et montrons que $y \in R(I + \partial f)$, c'est à dire,

$$y \in \bigcup_{x \in D(I+\partial f)} (I + \partial f)(x) \Longleftrightarrow \exists x_0 \in D(I + \partial f) \quad tel \quad que \quad y \in (I + \partial f)(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \exists x_0 \in D(I + \partial f) \quad tel \quad que \quad y \in x_0 + \partial f(x_0).$$

Soit $y \in H$, la fonction $x \longmapsto f(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$ est convexe s.c.i et tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\| \longrightarrow +\infty$,donc d'après le lemme (2.31) elle atteint donc son minimum en $x_0 \in H$.
On conclu $y \in x_0 + \partial f(x_0)$, d'ou ∂f est maximal monotone. ■

Exemple

Soit H un espace de Hilbert, pour tout $x \in H$, supposons

$$h(x) = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ +\infty & sinon \end{cases} , \qquad g(x) = x$$

On a h est une fonction propre convexe continue et

$$\partial h(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ ]-\infty, 1] & six = 0 \\ \emptyset & sinon \end{cases} , \qquad \partial g(x) = \{1\}$$

Donc

$$gph(\partial h) = [0, +\infty[\times] - \infty, 1]$$

$$gph(\partial g) = \mathbb{R} \times 1$$

c'est à dire $gph\partial h \nsubseteq gph\partial g$, d'où ∂h est maximal monotone.

Proposition 2.32. *[8]*

Le sous-différentielle d'une fonction convexe et propre est non nécessairement maximal monotone .

Contre-Exemple

Soit H un espace de Hilbert, pour tout $x \in H$, supposons

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x > 0 \\ +\infty & sinon \end{cases}, \qquad g(x) = x$$

On a f est une fonction propre et convexe et

$$\partial f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ \emptyset & sinon \end{cases}, \qquad \partial g(x) = \{1\}$$

mais, $gph(\partial f) =]0, +\infty[\times 1 \subset \mathbb{R} \times 1 = gph(\partial g)$.
D'où ∂f est n'est pas maximal monotone.

Chapitre 3

Existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone

L'objet de ce chapitre est de l'étude dans un espace de Hilbert, une inclusion différentielle du premier ordre de type,

$$-\frac{du}{dt}(t) \in Au(t) \quad p.p. \quad t \in [0, +\infty[.$$

o$\grave{u}$, A est un opérateur multivoque maximal monotone, en suite en fait l'étude pour une généralisation du théorème précédent à un problème perturbée par une fonction $f \in L^1([0, +\infty; H[)$, c'est à dire,

$$-\frac{du}{dt} \in Au(t) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0, +\infty[$$

3.1 Résultats préliminaires

Nous allons commencer par rappeler quelques résultats qui nous seront utile dans la preuve du résultat principal ce qui sont pris de [1], [6], [3]

3.1.1 Approximation de yosida

On montre qu'un opérateur A maximal monotone peut être approché dans un certain sens par des applications univoques Lipschitziennes $A_\lambda : H \longrightarrow H$, qui sont maximaux monotones.
Ces applications appelées l'approximation de Yosida, jouent un rôle important.

Définition 3.1. *Soit H un espace de Hilbert. Soit A un opérateur maximal monotone définie sur H.*

1) *Pour $\lambda > 0$, l'opérateur $J_\lambda : H \longrightarrow D(A) \subset H$ définie par $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A .*
2) *Pour $\lambda > 0$, l'opérateur $A_\lambda : H \longrightarrow D(A) \subset H$ définie par $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$, est appelé approximation de Yosida de A.*

Proposition 3.2. *Soit H un espace de Hilbert, $A : D(A) \subset H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$, un opérateur maximal monotone*

i) *J_λ, A_λ sont univoques.*
ii) *$(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}$ pour tout $\lambda, \mu > 0$.*
iii) *Pour tout $x \in D(A)$ on a $|A_\lambda x| \leq |A^\circ x|$, avec $|A^\circ x| = \inf\{\|y\|, y \in Ax\}$ et $A_\lambda x \longrightarrow A^\circ x$ quand $\lambda \downarrow 0$ avec $|A_\lambda x - A^\circ x|^2 \leq |A^\circ x|^2 - |A_\lambda x|^2$.*

Démonstration.

i) Supposons que A_λ n'est pas univoque, soient y_1, y_2 l'image de x par J_λ telle que $J_\lambda x = (I + \lambda A)^{-1} x$, soit

$$\begin{aligned} y_1 \in (I + \lambda A)^{-1} x &\Longleftrightarrow x \in (I + \lambda A)(y_1) \\ &\Longleftrightarrow x \in y_1 + \lambda A y_1 \\ &\Longleftrightarrow x - y_1 \in \lambda A y_1. \end{aligned}$$

On a, aussi,

$$\begin{aligned} y_2 \in (I + \lambda A)^{-1} x &\Longleftrightarrow x \in (I + \lambda A)(y_2) \\ &\Longleftrightarrow x \in y_2 + \lambda A y_2 \\ &\Longleftrightarrow x - y_2 \in \lambda A y_2. \end{aligned}$$

et comme λA est monotone d'après l'exemple (2.8), on aura

$$\begin{aligned}\langle x-y_1-x+y_2, y_1-y_2\rangle \geq 0 &\Longleftrightarrow \langle y_2-y_1, y_1-y_2\rangle \geq 0\\ &\Longleftrightarrow -\langle y_1-y_2, y_1-y_2\rangle \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \|y_1-y_2\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

D'ou $y_1-y_2=0$,

alors $y_1=y_2$ donc J_λ est univoque, et par suit $A_\lambda=\frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)$ est univoque .

ii) En premier lieu remarquant que

$$[x,y]\in A_\lambda \Longleftrightarrow [x-\lambda y, y]\in A. \tag{3.1}$$

En effet,

$$\begin{aligned}[x,y]\in A_\lambda &\Longleftrightarrow y\in A_\lambda x=\frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)x,\\ &\Longleftrightarrow \lambda y\in (I-J_\lambda)x,\\ &\Longleftrightarrow x-\lambda y\in J_\lambda x,\\ &\Longleftrightarrow x-\lambda y\in (I+\lambda A)^{-1}x,\\ &\Longleftrightarrow x\in (I+\lambda A)(x-\lambda y),\\ &\Longleftrightarrow x-x+\lambda y\in \lambda A(x-\lambda y),\\ &\Longleftrightarrow y\in A(x-\lambda y).\\ &\Longleftrightarrow [x-\lambda y, y]\in A.\end{aligned}$$

Donc, on applique cette équivalence deux fois on obtient,

$$\begin{aligned}[x,y]\in A_{\lambda+\mu} &\Longleftrightarrow [x-(\lambda+\mu)y, y]\in A.\\ &\Longleftrightarrow [x-\lambda y-\mu y, y]\in A.\\ &\Longleftrightarrow [x-\mu y, y]\in A_\lambda.\\ &\Longleftrightarrow [x,y]\in (A_\lambda)_\mu.\end{aligned}$$

D'ou

$$(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}.$$

iii) Soient $x\in D(A), z=A^\circ x, y=A_\lambda x$ Donc $z\in Ax$ et par (3.1) $y\in A(x-\lambda y)$ et comme A est monotone et par l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient,

$$\begin{aligned}\langle z-y, x-(x-\lambda y)\rangle \geq 0 &\Longleftrightarrow \lambda\langle A^{\circ}x - A_\lambda x, A_\lambda x\rangle \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \langle A^{\circ}x, A_\lambda x\rangle - |A_\lambda x|^2 \geq 0\\ &\Longleftrightarrow |A^{\circ}x||A_\lambda x| \geq |A_\lambda x|^2\\ &\Longleftrightarrow |A_\lambda x| \leq |A^{\circ}x|.\end{aligned}$$

Substituant A_μ à A dans les inégalités précédentes et utilisant (ii), on obtient

$$|A_{\lambda+\mu}x|^2 \leq \langle A_\lambda x, A_{\lambda+\mu}x\rangle \quad et \quad |A_{\lambda+\mu}x| \leq |A_\lambda x|, \quad \forall\lambda,\mu > 0.$$

On en déduit que, $|A_{\lambda+\mu}x - A_\lambda x|^2 \leq |A_\lambda x|^2 - |A_{\lambda+\mu}x|^2$
$|A_\lambda x|$ est borné quand $\lambda \longrightarrow 0$, $(A_\lambda x)$ est de Cauchy et par suite $A_\lambda x \longrightarrow y$ alors, $|y| \leq |A^{\circ}x|$, mais $y \in Ax$ c'est à dire $|A^0 x| \leq y$ implique $y = A^{\circ}x$, ce qui donne $A_\lambda x \longrightarrow A^{\circ}x$.

■

Proposition 3.3. *Soient H un espace de Hilbert, $A : D(A) \subset H$ un opérateur maximal monotone. Alors,*

1. *J_λ est une contraction de H dans H.*
2. $\| A_\lambda(x) - A_\lambda(y) \|_H \leq \frac{1}{\lambda} \| x-y \|_H \quad \forall x,y \in D(A), \quad \forall\lambda > 0.$

Démonstration.

1) Soient x, y $\in D(A)$.
Soient $x_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}x$, $y_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}y$ c'est à dire, $x_\lambda = J_\lambda x, y_\lambda = J_\lambda y$.
On a A est maximal monotone,
donc,

$$x \in \lambda A x_\lambda - x_\lambda,$$

et,

$$y \in \lambda A y_\lambda - y_\lambda \text{ donc, } y - x \in \lambda(Ay_\lambda - Ax_\lambda) + x_\lambda - y_\lambda.$$

Multipliant par $x_\lambda - y_\lambda$ on obtient,

$$\begin{aligned}\langle y-x, x_\lambda - y_\lambda\rangle &= \lambda\langle y^{'} - x^{'}, x_\lambda - y_\lambda\rangle - \|x_\lambda - y_\lambda\|^2, x^{'} \in Ax_\lambda, y^{'} \in Ay_\lambda,\\ &= -\lambda\langle x^{'} - y^{'}, x_\lambda - y_\lambda\rangle - \|x_\lambda - y_\lambda\|^2.\end{aligned}$$

Donc

$$-\langle x-y, x_\lambda - y_\lambda\rangle = -\lambda\langle x^{'} - y^{'}, x_\lambda - y_\lambda\rangle - \|x_\lambda - y_\lambda\|^2,$$

$$\langle x-y, x_\lambda - y_\lambda\rangle = \lambda\langle x^{'} - y^{'}, x_\lambda - y_\lambda\rangle + \|x_\lambda - y_\lambda\|^2,$$

comme A est monotone on trouve,

$$\|x-y\|\,\|x_\lambda - y_\lambda\| \geq \|x_\lambda - y_\lambda\|^2,$$

d'ou,

$$\|x_\lambda - y_\lambda\| \leq \|x-y\|.$$

donc, J_λ est lipschitzienne, de plus c'est une contraction de H dans H.

2) Nous avons,

$$\begin{aligned} 0 \in \lambda A J_\lambda x + J_\lambda x - x &\Longleftrightarrow \frac{x - J_\lambda x}{\lambda} \in A J_\lambda x, \\ &\Longleftrightarrow A_\lambda x \in A J_\lambda x. \end{aligned}$$

De plus,

$$A_\lambda x = \tfrac{x - J_\lambda x}{\lambda} \Longrightarrow x = \lambda A_\lambda x + J_\lambda x.$$

On a, $\forall x, y \in D(A), \forall \lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|x-y\|\,\|A_\lambda x - A_\lambda y\| &\geq \langle A_\lambda x - A_\lambda y, x - y\rangle \\ &= \langle A_\lambda x - A_\lambda y, \lambda A_\lambda x + J_\lambda x - \lambda A_\lambda y - J_\lambda y\rangle \\ &= \lambda\langle A_\lambda x - A_\lambda y, A_\lambda x - A_\lambda y\rangle + \langle A_\lambda x - A_\lambda y, J_\lambda x - J_\lambda y\rangle \\ &= \lambda\|A_\lambda x - A_\lambda y\|^2 + \langle A_\lambda x - A_\lambda y, J_\lambda x - J_\lambda y\rangle. \end{aligned}$$

Puisque $A_\lambda x \in A J_\lambda x$ et A est monotone alors,

$$\langle A_\lambda x - A_\lambda y, J_\lambda x - J_\lambda y\rangle \geq 0,$$

d'ou,

$$\|x-y\|\,\|A_\lambda x - A_\lambda y\| \geq \lambda\|A_\lambda x - A_\lambda y\|^2,$$

donc,

$$\|A_\lambda x - A_\lambda y\| \leq \tfrac{1}{\lambda}\|x-y\|.$$

Par conséquent A_λ est lipschitzienne de constante $\frac{1}{\lambda}$.

■

3.1.2 Équations différentielles ordinaires sur des ensembles convexes

Soit H un espace de Hilbert, et soit C un ensemble fermé de H.

Soit pour presque tout $t \in]0, T[$, une application $J(t)$ de C vérifiant,

(1) $\| J(t)x - J(t)y \| \leq L \| x - y \|, \forall x, y \in C$, où L est indépendante de t.

(2) Pour tout $x \in C$, l'application $t \longmapsto J(t)x$ est intégrable.

Théorème 3.4. *On fait les hypothèses* (1) *et* (2). *Alors pour tout $u_0 \in C$, il existe une fonction $u(t)$ unique telle que*

(3) u est absolument continue sur $[0, T]$, dérivable p.p. sur $]0, T[$, $u(t) \in C$ pour tout $t \in [0, T]$

(4) $\frac{du}{dt}(t) + u(t) - J(t)u(t) = 0$, p.p. sur $]0, T[$.

(5) $u(0) = u_0$.

Démonstration.

Soit u une fonction vérifie (3) et (5).

Posons $v(t) = e^t u(t)$, l'équation (4) s'écrit alors,

$$\frac{dv}{dt}(t) = e^t \frac{du}{dt}(t) + e^t u(t) = e^t J(t) e^{-t} v(t).$$

D'ou l'on déduit que,

$v(0) = e^0 u(0) = u(0)$ et u est absolument continue donc v est absolument continue.

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t \frac{dv}{ds}(s) ds \\ &= u_0 + \int_0^t e^s J(s) e^{-s} v(s) ds, \end{aligned}$$

donc,

$$u(t) = e^{-t} v(t) = e^{-t} u_0 + \int_0^t e^{s-t} J(s) e^{-s} v(s) ds.$$

Par conséquent,

$$u(t) = e^{-t} u_0 + \int_0^t e^{s-t} J(s) u(s) ds. \tag{3.2}$$

On considère l'ensemble ζ défini par,

$$\zeta = \{u \in C([0,T];H), u(t) \in C, \forall t \in [0,T]\}.$$

On défini l'application B de ζ dans ζ par,

$$Bu(t) = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{s-t}J(s)u(s)ds.$$

On a pour tout $u \in \zeta$, la fonction, $s \longmapsto J(s)u(s)$ est intégrable.

D'autre part, $Bu(t) \in C$, pour tout $t \in [0,T]$.

En effet,

$$\frac{\int_0^t e^{s-t}J(s)u(s)ds}{\int_0^t e^{s-t}ds} \in C$$

et donc,

$$\int_0^t e^{s-t}J(s)u(s)ds \in (1-e^{-t})C.$$

et $u_0 \in C$, d'où,

$$e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{s-t}J(s)u(s)ds \in C.$$

Montrons maintenant que B^k est une contraction stricte de ζ dans ζ.

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\|Bu_1(t) - Bu_2(t)\| &= \|e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{s-t}J(s)u_1(s)ds - e^{-t}u_0 - \int_0^t e^{s-t}J(s)u_2(s)ds\| \\
&= \|\int_0^t e^{s-t}(J(s)u_1(s) - J(s)u_2(s))ds\| \\
&\leq \int_0^t e^{s-t}\|J(s)u_1(s) - J(s)u_2(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Par (1) on obtient,

$$\begin{aligned}
\| Bu_1(t) - Bu_2(t) \| &\leq L \int_0^t e^{s-t} \| u_1(s) - u_2(s) \| ds \\
&\leq L\|u_1 - u_2\| \int_0^t e^{s-t} ds \\
&\leq L\|u_1 - u_2\|(1 - e^{-t}) \\
&\leq Lt \| u_1 - u_2 \| .
\end{aligned}$$

Il en résulte que,

$$\begin{aligned}
\|B^2u_1(t) - B^2u_2(t)\| &= \|B(Bu_1(t)) - B(Bu_2(t))\| \\
&= \|e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{s-t}J(s)Bu_1(s)ds - e^{-t}u_0 - \int_0^t e^{s-t}J(s)Bu_2(s)ds\| \\
&= \|\int_0^t e^{s-t}(J(s)(Bu_1(s) - Bu_1(s)))ds\| \\
&\leq \int_0^t e^{s-t}\|J(s)(Bu_1(s) - Bu_1(s))\|ds.
\end{aligned}$$

D'après(1) on obtient,

$$\begin{aligned}
\| B^2u_1(t) - B^2u_2(t) \| &\leq L \int_0^t e^{s-t} \| Bu_1(s) - Bu_2(s) \| ds \\
&\leq L \int_0^t e^{s-t} Ls\|u_1 - u_2\|ds \\
&\leq L^2 \| u_1 - u_2 \| \int_0^t se^{s-t}ds \\
&\leq L^2 \| u_1 - u_2 \| (e^{-t} + t - 1) \\
&= \frac{L^2t^2}{2} \| u_1 - u_2 \| .
\end{aligned}$$

Par récurrence on obtient,

$$\begin{aligned}
\| B^ku_1(t) - B^ku(t) \| &\leq \frac{L^kt^k}{k\,!} \| u_1 - u_2 \|, \\
&\leq \frac{(Lt)^k}{k\,!} \| u_1 - u_2 \| .
\end{aligned}$$

D'où B^k est un contraction stricte. On déduit par le théorème(1.34) que B admet un point fixe dans C, c'est à dire, $u \in C$ tel que $Bu(t) = u(t)$.
Donc, $e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{s-t}J(s)u(s)ds = u(t)$.
D'ou, (3) et (5) sont vérifiés. ■

Corollaire 3.5. *Soit H un espace de Hilbert, soit C un convexe fermé de H. Soit Pour presque tout $t \in]0, T[$, une application $J(t)$ de C vérifiant (1) et (2). Alors pour tout $u_0 \in C$ et tout $\lambda > 0$, il existe une fonction $u(t)$ unique vérifiant (3),(5) et (6)*

$$(6) \qquad \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t) - J(t)u(t)}{\lambda} = 0, \quad p.p. \quad t \in]0, T[.$$

De plus on a,

$$(7) \qquad u(t) = e^{\frac{-t}{\lambda}}u_0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda}}J(s)u(s)ds.$$

Démonstration.

Par le changement de fonction $v(t) = u(\lambda t)$ dans la forme (4),

$$\begin{aligned}
&\frac{dv}{dt}(t) + v(t) - J(t)v(t) = 0 \\
&\Longrightarrow \frac{du(\lambda t)}{dt} + u(\lambda t) - J(t)u(\lambda t) = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda\frac{du(\lambda t)}{dt} + u(\lambda t) - J(t)u(\lambda t) = 0 \\
&\Longrightarrow \frac{du(\lambda t)}{dt} + \frac{u(\lambda t) - J(t)u(\lambda t)}{\lambda} = 0 \\
&\Longrightarrow \frac{dv}{dt}(t) + \frac{v(t) - J(t)v(t)}{\lambda} = 0.
\end{aligned}$$

D'où (6).
Et on a,

$$\begin{aligned}
v(t) &= e^{-t}v_0 + \int_0^t e^{s-t}J(s)v(s)ds \\
&= u(\lambda t) = e^{-t}v_0 + \int_0^t e^{s-t}J(\lambda s)u(\lambda s)ds
\end{aligned}$$

Pour $t^{'}=\lambda t, s^{'}=\lambda s$, alors $ds^{'}=\lambda ds$ et quand $s=0, s^{'}=0$ et quand $s=\frac{t^{'}}{\lambda}, s^{'}=t^{'}$ donc,

$$\begin{aligned} u(t^{'}) &= e^{\frac{-t^{'}}{\lambda}}u_0+\int_0^{\frac{t^{'}}{\lambda}} e^{s-\frac{t^{'}}{\lambda}}J(\lambda s)u(\lambda s)ds \\ &= e^{\frac{-t^{'}}{\lambda}}u_0+\frac{1}{\lambda}\int_0^{t^{'}} e^{\frac{s^{'}}{\lambda}-\frac{t^{'}}{\lambda}}J(s^{'})u(s^{'})ds^{'}. \end{aligned}$$

D'où (7)

Donc, (4) $\Longleftrightarrow$ (6), et (3.2) $\Longleftrightarrow$ (7). ■

Théorème 3.6. *Soit H un espace de Hilbert, et soit C un convexe fermé de H. Soit, Pour presque tout $t\in]0,T[$ une application $J(t)$ de C vérifiant (1) et (2) Soient $\lambda>0, f,\tilde{f}\in L^1([0,T];H)$, soient u et $\tilde{u}$ des solutions respectives des équations,*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t)+\frac{1}{\lambda}\big(u(t)-J(t)u(t)\big) &= f(t) \quad p.p.sur t\in]0,T[. \\ \frac{du}{dt}(t)+\frac{1}{\lambda}\big(\tilde{u}(t)-J(t)\tilde{u}(t)\big) &= \tilde{f}(t) \quad p.p.sur t\in]0,T[. \end{aligned}$$

Alors,

$$(8)\ \| u(t)-\tilde{u}(t)\|\leq e^{\frac{(L-1)t}{\lambda}}\| u(0)-\tilde{u}(0)\|+\int_0^t e^{\frac{(L-1)(t-s)}{\lambda}}\| f(s)-\tilde{f}(s)\| ds.$$

Démonstration.

Posons pour presque tout $t\in]0,T[$, un application $\tilde{J}:]0,T[\longrightarrow H$, défini par,

$$\tilde{J}(t)x=J(t)x+\lambda f(t),$$

et montrons que$\tilde{J}$ vérifie (1) et (2),

$$\begin{aligned} \|\tilde{J}(t)x-\tilde{J}(t)y\| &= \|J(t)x+\lambda f(t)-J(t)y-\lambda f(t)\| \\ &= \|J(t)x-J(t)y\| \end{aligned}$$

D'après (1)

$$\|\tilde{J}(t)x-\tilde{J}(t)y\|\leq L\|x-y\|.$$

Puisque $t\longmapsto J(t)x$ est intégrable, et f $\in L^1$ donc $t\longmapsto\tilde{J}(t)x$ est intégrable, doù $\tilde{J}$ vérifie (1) et (2), donc par le corollaire (3.5) on obtient,

$$u(t) = e^{\frac{-t}{\lambda}}u(0) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda}}[J(s)u(s) + \lambda f(s)]ds.$$

$$\tilde{u}(t) = e^{\frac{-t}{\lambda}}\tilde{u}(0) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda}}[J(s)\tilde{u}(s) + \lambda\tilde{f}(s)]ds.$$

Par soustraction, il vient pour tout $t \in]0, T[$,

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| = e^{\frac{-t}{\lambda}}\|u(0) - \tilde{u}(0)\| + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda}}\|J(s)u(s) - J(s)\tilde{u}(s)\| + \lambda\|f(s) - \tilde{f}(s)\|ds$$

et par (1),
$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq e^{\frac{-t}{\lambda}}\|u(0) - \tilde{u}(0)\| + \frac{L}{\lambda}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda}}\|u(s) - \tilde{u}(s)\|ds + \int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda}}\|f(s) - \tilde{f}(s)\|ds.$
Posons,$\phi(t) = e^{\frac{t}{\lambda}}\|u(t) - \tilde{u}(t)\|$, on obtient,

$$\phi(t) \leq \phi(0) + \frac{L}{\lambda}\int_0^t \phi(s)ds + \int_0^t e^{\frac{s}{\lambda}}\|f(s) - \tilde{f}(s)\|ds.$$

Soit $B : [0, T] \longrightarrow H$ une application définie par,

$$B(t) = \phi(0) + \frac{L}{\lambda}\int_0^t \phi(s)ds + \int_0^t e^{\frac{s}{\lambda}}\|f(s) - \tilde{f}(s)\|ds$$

donc,

$$\phi(t) \leq B(t),$$

alors,

$$\begin{aligned} B'(t) &= \frac{L}{\lambda}\phi(t) + e^{\frac{t}{\lambda}}\|f(t) - \tilde{f}(t)\| \\ &\leq \frac{L}{\lambda}B(t) + e^{\frac{t}{\lambda}}\|f(t) - \tilde{f}(t)\| \end{aligned} \tag{3.3}$$

Et puisque,

$$\begin{aligned} (e^{-\frac{L}{\lambda}t}B(t))' &= \frac{-L}{\lambda}e^{-\frac{L}{\lambda}t}B(t) + e^{-\frac{L}{\lambda}t}B'(t) \\ &= e^{-\frac{L}{\lambda}t}\big(\frac{-L}{\lambda}B(t) + B'(t)\big) \end{aligned}$$

Par (3.3) on obtient,

$$\leq e^{-\frac{L}{\lambda}t}e^{\frac{t}{\lambda}}\|f(t)-\tilde{f}(t)\|$$

$$e^{-\frac{L}{\lambda}t}B(t)-B(0)\leq\int\limits_0^t e^{-\frac{L}{\lambda}s}e^{\frac{s}{\lambda}}\|f(s)-\tilde{f}(s)\|ds$$

$$B(t)\leq e^{\frac{L}{\lambda}t}\big(\phi(0)+\int\limits_0^t e^{-\frac{L}{\lambda}s}e^{\frac{s}{\lambda}}\|f(s)-\tilde{f}(s)\|ds\big)$$

et on a, $\phi(t)\leq B(t)$, d'oủ

$$e^{-\frac{t}{\lambda}}\|u(t)-\tilde{u}(t)\|\leq e^{\frac{L}{\lambda}t}\big[\|u(0)-\tilde{u}(0)\|+\int\limits_0^t e^{\frac{(1-L)s}{\lambda}}\|f(s)-\tilde{f}(s)\|ds\big]$$

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\|\leq e^{\frac{(L-1)t}{\lambda)}}\|u(0)-\tilde{u}(0)\|+\int\limits_0^t e^{\frac{(L-1)t}{\lambda}}e^{\frac{(1-L)s}{\lambda}}\|f(s)-\tilde{f}(s)\|ds.$$

et l'estimation (8) en résulte. ■

Théorème 3.7. *Soient H espace de Hilbert, C un convexe fermé de X,*
Soit J une application de C dans H vérifiant,

$$\|Jx-Jy\|\ \leq\ L\ \|\ x-y\ \|,\forall x,y\in C.$$

Soit $\lambda>0$, et soit f une fonction absolument continue de $[0,T]$ dans H dérivable p.p.
Soit $u(t)$ une solution (de classe C^1) de l'équation,

$$\frac{du}{dt}(t)+\frac{1}{\lambda}(u(t)-Ju(t))=f(t)$$

Alors, pour tout $t\in[0,T]$ on a,

$$\text{(9)}\qquad \|\ \frac{du}{dt}(t)\ \|\leq e^{\frac{(L-1)t}{\lambda}}\ \|\ \frac{du}{dt}(0)\ \|+\int\limits_0^t e^{\frac{(L-1)(t-s)}{\lambda}}\ \|\ \frac{df}{dt}(s)\ \|\ ds$$

$$=e^{\frac{(L-1)t}{\lambda}}\ \|\ f(0)-\frac{1}{\lambda}(u(0)-Ju(0)\ \|+\int\limits_0^t e^{\frac{(L-1)(t-s)}{\lambda}}\ \|\ \frac{df}{dt}(s)\ \|\ ds.$$

En particulier,

► *si $f\equiv 0$ et si $L=1$, la fonction, $t\longmapsto\|\ \frac{du}{dt}(t)\ \|$ est décroissante.*

► *lorsque $L<1$, la fonction $t\longmapsto\|\ \frac{du}{dt}(t)\ \|$ décroît exponentiellement vers 0, et $u(t)$ tend vers le point fixe de J quand $t\longrightarrow+\infty$.*

Théorème 3.8. *(théorème d'existence de Cauchy).*
Soient H une espace de Hilbert réel et $f : [0,T] \times H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre continue et Lipschitzienne, on se fixe $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'équation différentielle suivante,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une solution unique $y : [0,T] \longrightarrow H$ de classe C^1.

Lemme 3.9. *Soit A un opérateur monotone alors,*

1. $A_\lambda v = A(J_\lambda v), \quad \forall v \in H, \forall \lambda > 0.$
2. $A_\lambda v = J_\lambda A v, \quad \forall v \in D(A), \forall \lambda > 0.$
3. $|A_\lambda v| \leq |Av|, \quad \forall v \in D(A), \forall \lambda > 0.$
4. $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} J_\lambda v = v, \quad \forall v \in H$
5. $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} A_\lambda v = Av, \quad \forall v \in D(A).$
6. $\langle A_\lambda v, v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in H, \forall \lambda > 0.$
7. $|A_\lambda v| \leq \dfrac{1}{\lambda}|v|, \quad \forall v \in H, \forall \lambda > 0.$

3.2 L'étude de l'existence et l'unicité de solutions

Nous consacrons cette section à l'étude de l'existence et l'unicité de solution du problème,

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\frac{du}{dt} \in Au(t) \quad p.p.t \in [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \in D(A) \end{cases}$$

Il existe plusieurs auteurs qui ont démontre l'existence de solutions de ce problème.
Dans ce mémoire, on s'intéresse à la démonstration pris de [1],[6].
Nous somme maintenant en mesure de donner notre principal théorème d'existence.

Théorème 3.10. *Soit H un espace de Hilbert, A un opérateur multivoque maximal monotone de H dans H. Alors,*
Pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction u de $[0, +\infty[$ dans H unique telle que,

- $u(t) \in D(A), \forall t > 0.$
- *u est lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.*
- $\dfrac{du}{dt} \in L^\infty(]0, +\infty[; H)$ *et* $\|\dfrac{du}{dt}(t)\|_{L^\infty} \leq \|A^\circ u_\circ\|.$

De plus, u vérifie les propriétés suivantes,

1) *u admet en tout $t \in [0,+\infty[$ un dérivée à droite et,*

$$\frac{du^+}{dt}(t) + A^\circ u(t) = 0, \forall t \in [0,+\infty[$$

2) *La fonction $t \longrightarrow A^\circ u(t)$ est continue à droite et la fonction $t \longrightarrow |A^\circ u(t)|$ est décroissante.*

3) *Si u et ũ désignent deux solutions de $(\mathcal{P})$ on a alors,*

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \|u_0 - \tilde{u}_0\|, \forall t \in [0,+\infty[.$$

Démonstration.

L'unicité :

Soient u et $\tilde{u}$ deux solutions de $(\mathcal{P})$ tel que, $u(0) = u_0, \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0$

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in Au(t) \quad p.p. \quad t \in [0,\infty[. \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{d\tilde{u}}{dt}(t) \in A\tilde{u}(t) \quad p.p. \quad t \in [0,\infty[. \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

il résulte de la monotonie de A que, pour p.p. $t \in [0,\infty[$

$$\langle Au(t) - A\tilde{u}(t), u(t) - \tilde{u}(t)\rangle \geq 0.$$

Alors,

$$\langle -\frac{du}{dt}(t) + \frac{d\tilde{u}}{dt}(t), u(t) - \tilde{u}(t)\rangle \geq 0.$$

Donc,

$$-\langle \frac{du}{dt}(t) - \frac{d\tilde{u}}{dt}(t), u(t) - \tilde{u}(t)\rangle \geq 0.$$

De plus, on a

$$\frac{d}{dt}\|u(t) - \tilde{u}(t)\|^2 = 2\frac{d}{dt}\langle u(t) - \tilde{u}(t), u(t) - \tilde{u}(t)\rangle.$$

Alors,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)-\tilde{u}(t)\|^2 \leq 0, \quad p.p.sur[0,\infty[$$

Par intégration de 0 à t, pour tout $t \in [0,\infty[$, on obtient,

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\|^2 - \|u(0)-\tilde{u}(0)\|^2 = \int_0^t \frac{d}{ds}\|u(s)-\tilde{u}(s)\|^2 ds \leq 0.$$

Par conséquent,

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\|^2 \leq \|u(0)-\tilde{u}(0)\|^2.$$

Donc,

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\| \leq \|u(0)-\tilde{u}(0)\|. \tag{3.5}$$

En particulier, pour $u(0)=\tilde{u}(0)=u_0$ on trouve,

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\| \leq 0, \forall t \in [0,\infty[$$

Alors,

$$u(t)=\tilde{u}(t), \forall t \in [0,\infty[.$$

D'ou l'unicité de la solution. Alors le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution unique. ■

L'existence :

Pour démontrer l'existence nous utiliserons la technique de régularisation de yosida.
La démonstration est basée sur la définition de solution approximatives comme solutions aux équations différentielles ordinaire lorsque A est remplacé par l'approximation de Yosida de A,

$$-\frac{du_\lambda}{dt}(t) = A_\lambda u_\lambda(t) \quad \forall t \in [0,+\infty[.$$

On vérifie que la suite des solutions $(u_\lambda(.))_\lambda$ est une suite de cauchy, et que sa limite u(.) est en fait une solution à l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$

Étape 1

On a $\|\frac{du}{dt}\|$ est décroissante.
En effet,
Soit u un solution défini dans (3.4). Soit h>0, considérons l'application,
$v : [0,+\infty[\longrightarrow H$ définie par $v(t)=u(t+h)$.

Alors,

$$\frac{dv}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t+h) \in -Au(t+h) = -Av(t) \; et \; v(0) = u(0+h) = u(h).$$

D'après (3.5), on obtient,

$$\|v(t) - u(t)\| \leq \|v(0) - u(0)\|.$$

c'est à dire,

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq \|u(h) - u(0)\|$$

en divisant par h,

$$\|\frac{u(t+h) - u(t)}{h}\| \leq \frac{\|u(t) - u(0)\|}{h}$$

et quand $h \longrightarrow 0$ on obtient,

$$\|\frac{du}{dt}(t)\| \leq \|\frac{dv}{dt}(0)\|, \forall t \in [0, +\infty[\tag{3.6}$$

On considère l'équation approché,

$$(\mathcal{P}_\lambda) \begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0, \quad \forall t \in [0, \infty[\\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

A_λ est l'approximation de Yosida de A. Puisque A_λ est univoque et lipschitzienne d'après la proposition 3.3.(2). Alors, par le théorème (3.8), $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution u_λ de classe C^1 unique.

On a par la proposition (3.3)A_λ est monotone, donc on remplace u par u_λ dans (3.6) on obtient,

$$\|A_\lambda u_\lambda\,(t)\,\| = \|(\frac{du_\lambda}{dt})\,(t)\,\| \leqslant \|(\frac{du_\lambda}{dt})\,(0)\,\| = \|A_\lambda u_\lambda\,(0)\,\| = \|A_\lambda u_\circ\|,$$

et d'après la proposition 3.2.(iii) on obtient,

$$\|A_\lambda u_\circ\| \leq \|A^\circ u_\circ\|,$$

Donc,

$$\|A_\lambda u_\lambda\,(t)\,\| \leq \|A^\circ u_0\|. \tag{3.7}$$

Étape 2

Nous allons Montrons que les solutions $(u_\lambda)_\lambda$ de $(\mathcal{P}_\lambda)$ converge vers une solution de $(\mathcal{P})$ Montrons que la suite $(u_\lambda)_\lambda$ converge uniformément vers u sur [0,T], quand $\lambda \longrightarrow 0$.

En effet,

H est tant un espace de Hilbert, montrons $(u_\lambda)_\lambda$ est une suite de Cauchy dans C([0,T] ;H). Soit t $\in [0,T]$, on a pour $\lambda, \mu > 0$,

$$\left(\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda u_\lambda(t)\right) - \left(\frac{du_\mu}{dt}(t) + A_\mu u_\mu(t)\right) = 0$$

donc,

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) - \frac{du_\mu}{dt}(t) + A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t) = 0.$$

D'ou, en prenant le produit scalaire de l'expression ci-dessus avec $(u_\lambda - u_\mu)$ on obtient

$$\langle\frac{du_\lambda}{dt}(t) - \frac{du_\mu}{dt}(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle + \langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle = 0$$

Et on a,

$$\begin{aligned}\langle u_\lambda(t) - u_\mu(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t) - \frac{du_\mu}{dt}(t)\rangle &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle u_\lambda(t) - u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2\end{aligned}$$

On obtient,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 + \langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle = 0. \tag{3.8}$$

Or,

$$\langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle$$

$$= \langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), (u_\lambda(t) - J_\lambda u_\lambda(t)) + (J_\lambda u_\lambda(t) - J_\mu u_\mu(t)) + (J_\mu u_\mu(t) - u_\mu(t))\rangle$$

$$= \langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), \lambda A_\lambda u_\lambda(t) - \mu A_\mu u_\mu(t)\rangle + \langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), J_\lambda u_\lambda(t) - J_\mu u_\mu(t)\rangle$$

Car on a, $\forall v \in D(A), v(t) - J_\lambda v(t) = \lambda A_\lambda v(t)$.

Et par le lemme 3.9.(2)

$$\forall \lambda > 0, A_\lambda v(t) = A(J_\lambda v(t)), \forall v \in H$$

Donc,

$\langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle =$

$\langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), \lambda A_\lambda u_\lambda(t) - \mu A_\mu u_\mu(t)\rangle + \langle A(J_\lambda u_\lambda(t)) - A(J_\mu u_\mu(t)), J_\lambda u_\lambda(t) - J_\mu u_\mu(t)\rangle$

Comme A est monotone,

$$\langle A(J_\lambda u_\lambda(t)) - A(J_\mu u_\mu(t)), J_\lambda u_\lambda(t) - J_\mu u_\mu(t)\rangle \geq 0$$

donc,

$\langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \geq \langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), \lambda A_\lambda u_\lambda(t) - \mu A_\mu u_\mu(t)\rangle$

On a,$\forall\lambda,\mu \geq 0$ $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq -\langle A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), \lambda A_\lambda u_\lambda(t) - \mu A_\mu u_\mu(t)\rangle$

$$\leq -\lambda\|A_\lambda u_\lambda(t)\|^2 - \mu\|A_\mu u_\mu(t)\|^2 + \lambda\|A_\lambda u_\lambda(t)\|\|A_\mu u_\mu(t)\| + \mu\|A_\lambda u_\lambda(t)\|\|A_\mu u_\mu(t)\|$$

$$\leq -\lambda\|A_\lambda u_\lambda(t)\|^2 - \mu\|A_\mu u_\mu(t)\|^2 + \lambda(\|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \frac{1}{4}\|A_\mu u_\mu(t)\|^2) + \mu(\|A_\mu u_\mu\|^2 + \frac{1}{4}\|A_\lambda u_\lambda(t)\|^2)$$

$$\leq \frac{1}{4}(\lambda\|A_\mu u_\mu\|^2 + \mu\|A_\lambda u_\lambda\|^2)$$

et par (3.7) on obtient,

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\|A^\circ u_\circ\|^2$$

par l'intégration par rapport à t on obtient,

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\|A^\circ u_0\|^2 \int_0^t 1ds$$

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\|A^\circ u_\circ\|^2 t$$

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\lambda+\mu)t}\|A^\circ u_\circ\|.$$

Quant $\lambda,\mu \longrightarrow 0$ on obtient, $\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \longrightarrow 0$.

Par conséquence, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $(u_\lambda(t))_\lambda$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T];H)$, et puisque $C([0,T];H)$ est un espace complet alors $(u_\lambda(t))_\lambda$ converge. Notons u(t) sa limite. On a,

$$\forall\lambda > 0, \forall\mu > 0 \quad \forall t \in [0,+\infty[, \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\lambda+\mu)t}\|A^\circ u_\circ\|.$$

Soit $\lambda > 0$ fixé et soit $t \in [0,T[$.

$$\forall\mu > 0, \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda t}\|A^\circ u_\circ\|.$$

Par passage a la limite sur $\mu(\mu \longrightarrow 0), \forall\lambda > 0, \quad \forall t \in [0,T[$

$$\|u_\lambda(t) - u(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda t}\|A^\circ u_\circ\|.$$

On en déduit la convergence uniforme de $(u_\lambda)_\lambda$ vers u sur $[0,T]$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, posons $\eta > 0$ tel que, $\quad 2\sqrt{\eta T}|A^\circ u_\circ| \leq \varepsilon$, alors,

$$\forall|\lambda| \leq \mu, \forall t \in [0,T]; \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda T}\|A^\circ u_\circ\| \leq \varepsilon. \tag{3.9}$$

et $(u_\lambda)_\lambda$ converge uniformément vers u sur chaque intervalle borné $[0,T]$. La limite uniforme d'une suite d'application continues était une application continue alors u$\in C([0,+\infty[;H)$.

Étape3

Si $u_0 \in D(A)$, et $Au_0 \in D(A)$, $\dfrac{du_\lambda}{dt}$ converge uniformément quand λ tend vers 0 sur chaque intervalle borné $[0, T]$.

En effet

Soit $t \in [0, T]$, soit $v_\lambda(t) = \dfrac{du_\lambda}{dt}(t)$.

On a,

$$\frac{dv_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda v_\lambda(t) = 0$$

d'après l'étape (2),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|^2 \leq -\langle A_\lambda v_\lambda(t) - A_\mu v_\mu(t), \lambda A_\lambda v_\lambda(t) - \mu A_\mu v_\mu(t)\rangle.$$

Par l'inégalité de cauchy schwartz, et l'inégalité triangulaire,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|^2 \leq (\|A_\lambda v_\lambda\| + \|A_\mu v_\mu\|)(\lambda\|A_\lambda v_\lambda\|t + \mu\|A_\mu v_\mu\|).$$

Or d'après (3.7),

$$\|A_\lambda v_\lambda(t)\| \leq \|A^\circ u_0\|$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|^2 &\leq 2\|A^\circ u_0\|(\lambda + \mu)\|A^\circ u_0\| \\ &\leq 2(\lambda + \mu)\|A^\circ u_0\|^2.\end{aligned}$$

Soit $\lambda > 0$ fixé et soit $t \in [0, T]$,$\forall \mu \geq 0$, $\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\| \leq 2\sqrt{\lambda + \mu}\|A^\circ u_0\|$

Par passage à la limite sur $\mu(\mu \to 0)$,

$$\forall \lambda > 0, \forall t \in [0, T] : \|v_\lambda(t) - v(t)\| \leq 2\sqrt{\lambda + \mu}\|A^\circ u_0\|$$

Ceci implique de la même manière qu'a l'étape 2 que $(v_\lambda)_\lambda$ converge uniformément quand λ tend vers 0 sur chaque intervalle borné.

c'est à dire $(\dfrac{du_\lambda}{dt})_\lambda$ converge uniformément quand $\lambda \to 0$ sur chaque intervalle borné.

Étape4

Si $u_0 \in D(A)$ et $Au_0 \in D(A)$.

Si (u_λ) converge uniformément vers u et $(\dfrac{du_\lambda}{dt})$ converge uniformément vers v, alors u est différentiable, et $v = \dfrac{du}{dt}$, et la fonction u ainsi définie satisfait à l'équation

$\dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0$ sur $[0, +\infty[$.

En effet,
On a $(\frac{du_\lambda}{dt}(.))$ converge uniformément dans chaque intervalle borné dans $L^\infty([0,+\infty[;H)$,
par extraction d'une sous suite, on obtient que, $(\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(.))$ converge faiblement vers v et on a d' après l'étape (2) et (3),

$$\lim_{\lambda\longrightarrow 0} u_\lambda = u \quad et \quad \lim_{\lambda\longrightarrow 0}\frac{du_\lambda}{dt} = v,$$

Comme $u_\lambda \in C^1([0,+\infty[;H)$ on a,

$$\forall t>0, \quad u_\lambda(t) = \int_0^t \frac{du_\lambda}{dt}(s)ds + u_\lambda(0) \underset{\lambda\longrightarrow 0}{\longrightarrow} u(t) = \int_0^t v(s)ds + u(0)$$

Donc,
u est différentiable sur $[0,+\infty[$ et $\frac{du}{dt} = v$.
Compte-tenu de (3.7) on a aussi,

$$\forall\, t\geq 0 \quad \forall\lambda>0, \|\frac{du}{dt}(t)\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|A^\circ u_0\|.$$

Donc pour tout $T>0, (\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(.))$ converge faiblement vers $(\frac{du}{dt}(.))$ dans $L^2([0,T];H)$. et $(u_{\lambda_n}(.))$ converge fortement vers u(.) dans $L^2([0,T];H)$
et,

$$-\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) \in Au_\lambda(t), \forall t\in[0,T]$$

C'est à dire $-\frac{du_{\lambda_n}}{dt} \in \mathcal{A}u_\lambda$ telle que $\mathcal{A}$ est le prolongement de A à $L^2([0,T];H)$, et comme $\mathcal{A}$ est maximal monotone par le lemme (2.22) et le graphe de $\mathcal{A}$ est séquentiellement fortement faiblement fermé dans $\big(L^2([0,T];H)\times L^2([0,T];H)\big)$ on, obtient,
$-\frac{du}{dt} \in \mathcal{A}u$ c'est à dire $-\frac{du}{dt}(t) \in Au(t); p.p.t \in [0,+\infty[$.

Étape5

On doit démontrer que $t\mapsto \|A^\circ u(t)\|$ est décroissante.
Soit $t\in[0,+\infty]$ on a, $\|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|A^\circ u_0\| \quad de$ (3.7), donc il existe une sous suite $(A_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t))$ converge faiblement dans H vers v(t).
utilisant le fait que $A_{\lambda_n} v = AJ_{\lambda_n} v$ pour tout $v\in H$ on obtient,

$$A_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t) \in A(J_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t)),$$

Or $J_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t) \longrightarrow u(t)$ quand λ tend vers 0.

En effet,

d'après le lemme (3.9), $\forall v \in H, \quad \underset{\lambda \longrightarrow 0}{lim} J_\lambda v = v.$

D'ou, $\forall \lambda > 0, \forall t \geq 0,$

$$\begin{aligned}
\|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)\| &\leq \|J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)\| + \|J_\lambda u(t) - u(t)\| \\
&\leq \|J_\lambda\| \|u_\lambda(t) - u(t)\| + \|J_\lambda u(t) - u(t)\| \\
&\leq \|u_\lambda(t) - u(t)\| + \|J_\lambda u(t) - u(t)\| \quad (car \|J_\lambda\| \leq 1),
\end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la limite quand $\lambda \longrightarrow 0$ on obtient,

$\forall t \geq 0, \|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)\| \leq \|u_\lambda(t) - u(t)\| + \|J_\lambda u(t) - u(t)\| \longrightarrow 0.$

En utilisant la proposition (2.21) on obtient,

$$v(t) \in Au(t), \ \forall t \in [0, +\infty[$$

(En particulier $u(t) \in D(A), \forall t \in [0, +\infty[$). Soit $t > t_0$. On a,

$$\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|A^\circ(u(t_0))\|$$

Donc,

$$\|v(t)\| \leq \liminf_{\lambda \to 0} \|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\| \leq \|A^\circ(u(t_0))\|$$

D'autre part,

$$\|A^\circ(u(t))\| \leq \|v\|$$

Donc,

$$\|A^\circ(u(t))\| \leq \|A^\circ(u(t_0))\| \tag{3.10}$$

D'où $t \mapsto \|A^\circ(u(t))\|$ est décroissante.

Il reste à démontrer la continuité à droite de la fonction $t \mapsto A^\circ u(t)$.

Soit $t_n > t_0$, on a $u(t_n) \underset{t_n \to t_0}{\to} u(t_0)$ et par (3.10),

$$\|A^\circ(u(t_n))\| \leq \|A^\circ(u(t_0))\|$$

donc, on peut extraire une sous suite de $A^\circ(u(t_n))$ qu'on note aussi $(A^\circ(u(t_n)))$ converge faiblement vers $y \in H$, donc $y \in Au(t_0)$.

De plus,

$$\|y\| \leq \liminf_{t_n \overset{>}{\to} t_0} \|A^\circ(u(t_n))\| \leq (A^\circ(u(t_0))$$

Donc $y = A^\circ(u(t_0))$ c'est à dire $A^\circ(u(t_0))$ est la limite faible de $A^\circ(u(t_n))$

et $\|A^\circ(u(t_0))\| = \lim_{n \to +\infty} A^\circ(u(t_n))$ ce qui donne la convergence est forte. Donc la continuité à droite de $A^\circ u(t)$.

Soit,

$$E = \left\{ t \in]0, +\infty[; u \; est \; dérivable \; en \; t \; et \; \frac{du}{dt}(t) \in Au(t) \right\}.$$

On sait que le complémentaire de E est négligeable, soit $t_0 \in E$, on a par (3.7) pour h>0,

$$\begin{aligned} \|u(t_0 + h) - u(t_0)\| &\leq \int_{t_0}^{t_0+h} \|\frac{du}{dt}\|(s)ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+h} \|A^\circ(u(t_0))\|ds \\ &= h\|A^\circ(u(t_0))\|. \end{aligned}$$

Donc, $\|\frac{du}{dt}(t_0)\| \leq \|A^\circ(u(t_0))\|$, et par suite $-\frac{du}{dt}(t_0) = A^\circ u(t_0)$ car $-\frac{du}{dt}(t_0) \in Au(t_0)$. Intégrant cette égalité on obtient,

$$\frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h} = -\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} A^\circ u(s)ds.$$

Puisque $A^\circ u(0)$ est continue à droite, on conclut que $\frac{du}{dt}(t_0) = -A^\circ u(t_0)$.

3.3 L'étude de l'existence de solutions avec une perturbation univoque dépendant du temps

On donne maintenant un théorème d'existence et d'unicité pour le problème perturbé par la fonction $f \in L^1([0, +\infty[; H)$.

Théorème 3.11. *Soit H un espace de Hilbert, A un opérateur multivoque maximal monotone de H, $f : [0, +\infty[\mapsto H$ une application tel que $f \in L^1([0, +\infty[; H)$.*
Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ le problème d'évolution,

$$(\mathcal{P}_f) = \begin{cases} -\frac{du}{dt}(t) \in Au(t) + f(t) \quad p.p.t \in [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution unique.

Démonstration.

Posons,

$$v(t) = u(t) - \int_0^t f(s)ds,$$

donc,

$$u(t) = v(t) + \int_0^t f(s)ds \quad et \quad v(0) = u(0) = u_0$$

$$v^{'}(t) = u^{'}(t) - f(t) \in -A(u(t)) = -A(v(t) + \int_0^t f(s)ds)$$

Alors le problème $(\mathcal{P}_f)$ est équivalent au problème suivant,

$$\begin{cases} -\dfrac{dv}{dt}(t) \in A(v(t) + \int_0^t f(s)ds) \quad p.p.t \in [0, +\infty[\\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

On note par $\tilde{A}$ l'opérateur défini par,

$$u(t) \mapsto \tilde{A}(u(t)) = A(u(t) + \int_0^t f(s)ds), \forall u(t) \in H, \forall t \in [0, +\infty[$$

ce qui donne que le problème est équivalent au problème,

$$\begin{cases} -\dfrac{dv}{dt}(t) \in \tilde{A}v(t) \quad p.p.t \in [0, +\infty[\\ v(0) = u_0 \end{cases}$$

Donc, il suffit de prouver que le nouveau opérateur, $\tilde{A}$ satisfait les conditions du théorème (3.10), c'est à dire que $\tilde{A}$ est maximal monotone.

On a d'après la proposition(2.20), $\tilde{A}$ est maximal monotone si $\tilde{A}$ est monotone et $R(I + \tilde{A}) = H$

En effet,

Soient v_1, v_2 deux éléments de H tels que, pour $u_1, u_2 \in D(\tilde{A})$

$$v_1(t) \in \tilde{A}u_1(t) = A(u_1(t) + \int_0^t f(s)ds),$$

$$v_2(t) \in \tilde{A}u_2(t) = A(u_2(t) + \int_0^t f(s)ds),$$

$\langle v_1(t) - v_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle = \langle v_1 - v_2, (u_1(t) + \int_0^t f(s)ds) - (u_2(t) + \int_0^t f(s)ds)\rangle \geq 0$ car A est monotone.

De plus, $R(\tilde{A}) = R(A)$, et A est maximal monotone donc, R(I+A)=H,

Alors R(I+ $\tilde{A}$)=H, donc $\tilde{A}$ est aussi maximal monotone.

Alors d'après le théorème (3.10) le problème $(\mathcal{P}_f)$ admet une solution unique. $\blacksquare$

Conclusion

Notre but dans ce mémoire, était d'étudier les opérateurs monotones, en particulier le concept le plus important dans cette théorie, les opérateurs maximaux monotones. Ici nous avons fait un essai pour décrire plus de résultats importants ainsi que les relations qui les lient dans un espace de Hilbert.

Nous avons présenté un résultat d'existence et d'unicité pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernées par un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert qui représentent une application de ces derniers.

Bibliographie

[1] **J.P.Aubin.A.Cellina**, *Differential inclusion*, Set-valued Maps and Viability theory, Springer-Verlag. Berlin Heildelberg New york tokyo (1984)

[2] **J.P.Aubin.H.Frankowska**, *Set-valued Analysis*, Bogazici university Library, Boston. Basel.Berlin (1990).

[3] **V. Barbu**, *Nonlinear semigroups and differntial equations in Banach spaces*, Editura Academei Republicii Socialiste Române, Bucuresti Calea Victorei 125, (1976).

[4] **H.H.Bauschke, Patrick L.Combette auth**, *Convexe Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer-Science+Business Media, LLC(2011)

[5] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle théorie et application*, Masson, (1993).

[6] **H. Brézis**, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contraction dans un espace de Hilbert*, North-Holland publishing company Amesterdam London, (1973).

[7] **R. S. Burachik, A. N. Iusem**,*Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators*, Springer, (2008).

[8] **R. T. Rockafellar**, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math., 33 , 209-216.(1970).

[9] **R. T. Rockafellar**, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Am. Math. Soc., 149 , 75-88.(1970).

[10] **Roger Godement**, *Analyse Mathematique* ,IV (2003)

[11] **S. Simons**, *Minimax and Monotonicity*, Springer, Verlag Berlin Heildelberg (1998).

[12] **Jan Van Tiel**, *convex analysis an introductory text*, Winey, (1984).