REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Seddik Ben Yahia-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

N° d'ordre :

N° de série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MASTER

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Option : Analyse et Applications

Thème

Problèmes non-linéaires pour des équations et des inclusions différentielles du second ordre

Présenté par : **Kicha Abir**

Soutenu le 17/ 06 / 2017

Devant le Jury :

Président :	T. Zerzaihi	Prof.	Univ. Jijel
Encadreur :	A. Makhlouf	MCB.	Univ. Jijel
Examinateurs :	D. Azzam-Laouir	Prof.	Univ. Jijel
	N. Fetouci	MCB.	Univ. Jijel

Promotion **2016-2017**

Remerciements

C'est un grand plaisir pour moi de remercier tous les personnes qui m'ont aider à la réalisation de ce travail.

Je remercie vivement mon encadreur Madame **Makhlouf Amira**, *Maître de Conférence à l'université de Jijel, d'avoir voulu proposer le sujet et assurer la direction de ce mémoire. Ses conseils multiformes et la richesse de ses connaissances m'ont permis de mener à bien ce travail. Cette direction s'est caractérisée par une grande patience, une disponibilité permanente, des conseils abondants, un support et un suivi continus dans le but de mettre ce projet sous sa forme finale.*

Je remercie Madame **D. Azzam-Laouir**, *Professeur à l'université de Jijel et Madame* **N. Fetouci**, *Maître de Conférence à l'université de Jijel, pour avoir accepté d'être membres du jury. J'aimerais aussi remercier Monsieur* **T. Zerzaihi**, *Professeur à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur par la présidence du jury.*

Je tiens à remercier Monsieur **B. Bensouilah**, *le chef de département de mathématique, et tous les enseignants pour ses intérêts constants dans ses empressements à fournir les conditions pour la collecte des meilleurs résultats.*

Je remercie mes collègues, en particulier **Karima, Meryeme, Amina** *et* **Amel** *tout d'abord pour avoir été des amies chères ainsi que pour leur précieux soutien scientifique.*

Un grand merci à ma famille pour m'avoir aidé de loin et particulièrement **ma mère** *qui m'a toujours encouragé et se tient à mes côtés.*

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale **5**

1 Notations et préliminaires **8**

1.1 Notations générales. 8
1.2 Quelques notions sur la mesurabilité 9
1.3 Quelques résultats d'analyse convexe 11
1.4 Rappel sur les topologies faibles et faible* 12
1.4.1 Topologie faible 12
1.4.2 Topologie faible* 13
1.4.3 Espaces réflexifs 15
1.5 Fonction intégrable au sens de Bochner 16
1.6 Quelques résultats de convergence 17
1.7 Quelques notions sur la continuité 18
1.8 Quelques résultats de compacité 20
1.9 Degré topologique 22
1.10 Multiapplictions 24
1.10.1 Multiapplications et sélections 24
1.10.2 Continuité des multiapplications 25
1.10.3 Mesurabilité des multiapplications 26
1.11 Opérateurs monotones 28
1.12 Dérivée au sens des distributions 29
1.13 Espaces de Sobolev 30

2 Problèmes non-linéaires pour des équations différentielles du second ordre 32

2.1 Valeurs moyennes généralisées 33

2.2 Problèmes non-homogènes avec conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et périodiques 38

2.2.1 Cas Dirichlet 38

2.2.2 Cas Neumann 43

2.2.3 Cas périodique 45

2.3 Formulation points fixes pour les problèmes non-linéaires 50

2.3.1 Cas Dirichlet 51

2.3.2 Cas Neumann 52

2.3.3 Cas périodique 53

2.4 Applications : Résultats d'existence 54

3 Problèmes non-linéaires pour des inclusions différentielles du second ordre 61

3.1 Résultats auxiliaires 61

3.2 Résultats d'existence 82

3.2.1 Cas convexe 82

3.2.2 Cas non convexe 98

Conclusion 103

Introduction

Nous commençons par introduire un aperçus sur les problèmes non-linéaires existant dans la littérature (Voir [12], [26] et [31]).

La modélisation mathématique a apporté d'importantes contributions aux différentes sciences et disciplines. Grâce à elle, un problème en physique, chimie, médecine, économie ou même en sociologie ne peut s'échapper à la formulation mathématique via ce qu'on appelle ***équations différentielles***. Donc, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude aussi bien en mathématiques qu'en d'autres spécialités, d'où l'importance de cette branche.

Donc, résoudre un problème c'est souvent trouvé une équation différentielle qui modélise ce problème. Soit un exemple simple sur cette étude : le principe fondamentale de la mécanique dit que la somme des forces est égale à la masse fois l'accélération, comme l'accélération est la dérivée seconde de la trajectoire, alors pour trouver la trajectoire de ton point matériel, tu dois résoudre une équation différentielle. Mais à travers l'évolution, cette équation ne suffit plus.

Un aspect plus général est apparu, il s'agit ***d'inclusions différentielles***, celles-ci permettant aujourd'hui de modéliser une plus large classe de phénomènes de la vie réelle. Un petit exemple dans le domaine médicale peut expliquer pourquoi. Ces dernières années, les modèles mathématiques ont été grandement utilisés dans les processus de la recherche épidémiologique y compris l'épidémie de VIH/SIDA. Dans la phase initiale des recherches, les chercheurs ont commencé par décrire des modèles en utilisant des équations différentielles ordinaires et là, les paramètres inconnus impliqués sont supposés constants dans le temps, or, d'un point de vue plus réaliste des épidémies, certains de ces paramètres ne sont pas constants et ils dépendent de plusieurs facteurs qui ne sont pas pris en compte en raison de nécessité d'équilibrer la modélisation et la traçabilité numérique, ou par manque de connaissances, une autre approche alors est proposée, celle des inclusions différentielles où la seule hypothèse sur les paramètres incertains, est qu'ils appartiennent à un intervalle fini.

L'objectif entrepris dans ce mémoire est l'étude de l'existence de solutions pour certaines classes d'équations et d'inclusions différentielles du second ordre.

Dans la première partie de cette étude, l'intérêt est porté sur l'existence de solutions pour des problèmes non-linéaires pour des équations différentielles du second ordre.

Durant la dernière décennie, de nombreux auteurs ont étudié quelques types de problèmes avec conditions aux limites impliquant l'opérateur p-Laplacien ou un opérateur plus général qui remplace l'opérateur différentiel $u \mapsto u''$ appelé ***opérateur semblable au p-Laplacien***. Ce cadre est général, unificateur et intègre des systèmes gradients, des variationnelles évolutionnaires et des problèmes aux limites de Dirichlet, Neumann et périodiques.
Nous nous référons à des équations de types

$$(\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t))\,, \tag{0.0.1}$$

qui trouvent beaucoup d'applications dans la théorie des fluides non-Newtoniens, la diffusion des écoulement en milieux poreux, l'élasticité non-linéaire et la théorie des surfaces capillaires. Différentes équations contenants ce genre d'opérateurs ont été largement étudiées afin de prouver l'existence de solutions, nous pouvons citer les travaux de R. Manásevitch et J. Mawhin, [27] et [28], dans lesquels les conditions aux limites sont de divers types.

Dans la deuxième partie et pour les problèmes définis par des multiapplications non-linéaires, on peut citer les travaux de M. Palmucci et F. Papalini [32], et F. Papalini [31], qui sont de la forme

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' \in A(u(t)) + F(t, u(t), u'(t))\,, & \text{p.p sur } [0, T]\,, \\ L(u(0), u(T), u'(0), u'(T)) = 0\,, \end{cases}$$

où $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue, $A : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est un opérateur maximal monotone, $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ une multiapplication à valeurs non vides qui satisfait certaines conditions et $L(u(0), u(T), u'(0), u'(T)) = 0$ sont les conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et mixte.

Ce mémoire se compose de trois chapitres.
Dans le premier chapitre, on présente quelques notions et concepts de base liés à notre étude. Dans le deuxième chapitre, on étudie l'existence de solutions pour des équations différentielles du second ordre de la forme (0.0.1), où $f : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory et $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue appelée ***opérateur semblable au p-Laplacien***.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'existence de solutions pour les inclusions différentielles du second ordre de la forme

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' \in F(t, u(t), u'(t)) \,, \quad \text{p.p sur } [0, T] \,, \\ L(u(0), u(T), u'(0), u'(T)) = 0 \,, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

dans le cas où F est à valeurs convexes, et dans le cas où elle est à valeurs non convexes. A la fin de ce chapitre, on donne un résultat d'existence du problème (0.0.2) étudié dans [9], en remplaçant la multiapplication F par une application univoque non-linéaire $f : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ associée avec les mêmes conditions aux limites et vérifiant les mêmes hypothèses que de F.

CHAPITRE 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, nous fixons nos notations et nous rappelons brièvement certains définitions et résultats de base que nous avons utilisés tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales.

On note

- (X, θ) un espace topologique.
- (X, d) un espace métrique.
- (X, Σ) un espace mesurable , i.e. Σ une tribu sur X.
- (X, Σ, μ) un espace mesuré.
- m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$.

Soit $I = [0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit X un espace topologique. On note

- $\mathcal{L}(I)$ la tribu sur I des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.
- $\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X.

Si X est un espace de Banach, alors on note

- X' le dual topologique de X, $\|\cdot\|$ la norme de X et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre X et X'.
- $B_X(x, r)$ la boule ouverte de X de centre x et de rayon r.
- $\overline{B}_X(x, r)$ la boule fermée de X de centre x et de rayon r.
- $S_X(x, r)$ la sphère de X de centre x et de rayon r.
- Id_X l'application identité sur X.
- S^c complémentaire de S.

- ∂S est la frontière de l'ensemble S.
- $|\cdot|$ désigne la norme de $\mathbb{R}^N$.
- $C(I, \mathbb{R}^N)$ est l'espace de Banach de toutes les applications continues définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ muni de la norme : $\|f(\cdot)\|_C = \sup\limits_{t \in I} |f(t)|$.
- $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ est l'espace de Banach des applications continuement différentiables muni de la norme : $\|f(\cdot)\|_{C^1} = \max\{\|f(\cdot)\|_C \, , \, \|f'(\cdot)\|_C\}$.
- $L^p(I, \mathbb{R}^N) = \{f : I \to \mathbb{R}^N \, , \, f \text{ mesurable et } \int_I |f(t)|^p dt < \infty\}$, muni de la norme
$$\|f(\cdot)\|_p = \Big(\int_I |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$
- $L^\infty(I, \mathbb{R}^N) = \{f : I \to \mathbb{R}^N \, , \, f \text{ mesurable et, } \exists\, c > 0 \text{ tel que } |f(t)| \leq c, \text{ p.p sur } I\}$, muni de la norme
$$\|f(\cdot)\|_\infty = \inf\{c > 0, \; |f(t)| \leq c, \text{ p.p sur } I\}\,.$$
- $\sigma(X, X')$ est la topologie faible sur X.
- $\sigma(X', X)$ est la topologie faible* sur X'.
- $\to$ signifie la convergence forte dans X.
- $\rightharpoonup$ signifie la convergence faible dans X.
- $co(A)$ l'enveloppe convexe de $A \subset X$.
- $1\!\!\mathrm{I}_A$ la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par
$$1\!\!\mathrm{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \ x \in A; \\ 0 & si \ x \notin A. \end{cases}$$
- $Sgn\ a$ désigne le signe de $a \in \mathbb{R}$.

1.2 Quelques notions sur la mesurabilité

Les résultats suivants sont pris des références [3] et [5].

Définition 1.2.1. *Soient (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2, on dit que f est (Σ_1, Σ_2)-**mesurable** si pour tout $A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
*Si X_1 est un espace topologique, une fonction $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_1))$-mesurable est dite **fonction Borélienne** ou Σ_1-**mesurable**.*

Proposition 1.2.2. *Soient (X_1, θ_1), (X_2, θ_2) deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$. Si f est continue alors $f : (X_1, \mathcal{B}(\theta_1)) \to (X_2, \mathcal{B}(\theta_2))$ est mesurable.*

Définition 1.2.3. *Soit (X, Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une **mesure** si*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(\underset{n}{\cup} A_n) = \sum\limits_n \mu(A_n)$, *pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

•*Le triple (X, Σ, μ) est appelé **espace mesuré**.*
•*Si $\mu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une **mesure positive** et on note $\mu \geq 0$, ou que l'espace (X, Σ, μ) est positif.*
•*Si $\mu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une **mesure finie** ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.*
•*Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée **mesure Borélienne**.*

Définition 1.2.4. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré et A un sous ensemble de X tel que $A \in \Sigma$. On dit que A est **μ-négligeable** ou **négligeable** (s'il n'y a pas de confusion), si $\mu(A) = 0$.*

- On dit qu'une propriété sur X est vraie **μ-presque partout** (μ.p.p.), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.
- La tribu μ-complète de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, c'est à dire
$$\Sigma_\mu = \{A \cup Z /\ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu - \text{négligeable}\}.$$
- La tribu Σ est dite **complète** si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est à dire, si tout ensemble μ-négligeable appartient à Σ.

Définition 1.2.5 (Fonction simple).
*Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace de Banach et $f : X \to Y$. On dit que f est une **fonction simple** si elle est de la forme*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{E_i}(x) y_i,$$

où les $E_i = f^{-1}(y_i)$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, sont des éléments deux à deux disjoints de Σ et les y_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$, sont des éléments distincts de Y.
*Cette formule est appelée **la représentation canonique** de f.*

Proposition 1.2.6. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge simplement vers f alors f est mesurable.*

Théorème 1.2.7. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et Y un espace de Banach séparable. Si $f : X \to Y$ est mesurable, alors il existe une suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de fonctions simples telles que $f_n \to f$ μ-p.p, et pour μ-presque partout sur X , $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

1.3 Quelques résultats d'analyse convexe

Les résultats suivants sont pris de la référence [3].

Définition 1.3.1. *On dit qu'une application $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$*

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y),$$

*et on dit qu'elle est **strictement convexe** si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$*

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y).$$

Définition 1.3.2 (Ensembles convexes).
*Soit X un espace vectoriel, et soit $A \subset X$. On dit que A est **un ensemble convexe** si et seulement si*

$$\forall u,\ v \in A,\ \forall\lambda \in [0, 1] :\ \lambda u + (1 - \lambda)v \in A.$$

Autrement dit, pour tout $u, v \in A$, le segment de droite

$$[u, v] = \{\lambda u + (1 - \lambda)v :\ \lambda \in [0, 1]\} \subset A.$$

Définition 1.3.3 (Le simplexe de $\mathbb{R}^N$).
*On appelle **Simplexe de** $\mathbb{R}^N$ l'ensemble Δ_N défini par*

$$\Delta_N = \left\{ (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_N) \in \mathbb{R}^N :\ \lambda_i \geq 0 \ et\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.3.4. *Soit X un espace vectoriel et soient $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_N \in X$. On appelle **combinaison convexe** des éléments $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_N$ tout élément x qui s'écrit comme suit*

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \quad tels\ que \quad (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_N) \in \Delta_N .$$

Proposition 1.3.5. *Soit X un espace vectoriel, et soit $A \subset X$. On dit que A est convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons convexes de ces éléments.*

Définition 1.3.6 (Enveloppe convexe).
Soient X un espace vectoriel et $A \subset X$. On appelle ***enveloppe convexe de*** *A qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de X contenant A, c'est en fait le plus petit convexe qui contient A.*

Théorème 1.3.7. *Soit X un espace vectoriel et $A \subset X$. Alors*

$$co(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j \,:\, k \in \{0, 1, \ldots\},\ (\lambda_1,\, \lambda_2, \ldots,\, \lambda_{k+1}) \in \Delta_k,\, x_1, \ldots,\, x_{k+1} \in A \right\}.$$

1.4 Rappel sur les topologies faibles et faible*

Les résultats suivants sont pris des références [3], [6], [14] et [30].
Soient X un ensemble, T un ensemble quelconque et soit $(Y_i)_{i \in T}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in T$ on se donne une application $\varphi_i : X \to Y_i$.
Le problème posé est de munir X par une topologie τ la moins fine (avec le minimum d'ouverts) qui rend continues toutes les applications $(\varphi_i)_{i \in T}$.

Proposition 1.4.1. *Soit τ l'ensemble des parties de X de la forme*

$$\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in F_j} \varphi_i^{-1}(U_i)\,,$$

où U_i est un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous ensemble fini d'indices quelconque de T et J est un ensemble quelconque. Alors, τ définit une topologie sur X. De plus, τ est la topologie la moins fine qui rend continues toutes les applications φ_i $(i \in T)$.

1.4.1 Topologie faible

Soient X un espace de Banach et X' son dual topologique, c'est à dire

$$X' = \{f : X \to \mathbb{R},\ f \text{ linéaire continue}\} = \mathscr{L}(X, \mathbb{R})\,,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in \overline{B}_X(0,1)} |\langle f, x \rangle|\,.$$

Définition 1.4.2. *Soit $f \in X'$ et soit*

$$\begin{aligned} \varphi_f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi_f(x) = f(x) := \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

Lorsque f d'écrit X', nous obtenons une famille d'applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$ définie sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$.
*On appelle **la topologie faible** sur X, la topologie la moins fine sur X rendant les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$ continues et on la note $\sigma(X, X')$.*

Proposition 1.4.3. *Soit X un espace vectoriel normé. La topologie faible $\sigma(X, X')$ est séparée.*

Remarque 1.4.1.

1. *X étant un espace de Banach, donc X est muni d'une norme (c'est à dire d'une distance) et donc on définit la topologie associée à cette norme, cette topologie sera dite **topologie forte**.*
2. *Les ouverts (resp. fermés) faibles (pour $\sigma(X, X')$) sont aussi des ouverts (resp. fermés) pour la topologie forte.*

Théorème 1.4.4. *Soit $A \subset X$ un sous ensemble convexe, alors A est faiblement fermé (fermé pour $\sigma(X, X')$) si et seulement si il est fortement fermé.*

Proposition 1.4.5. *Soit $\{x_n\}_{n \geq 1}$ une suite de X.*

1. *La suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge vers x pour $\sigma(X, X')$ (ou faiblement) si et seulement si $\{\langle f, x_n \rangle\}_{n \geq 1}$ converge vers $\langle f, x \rangle$ pour tout $f \in X'$.*
2. *Si $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge fortement vers x, alors $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge faiblement vers x.*
3. *Si $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge faiblement vers x alors $\|x_n\|$ est bornée et nous avons*
$$\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|.$$
4. *Si $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge faiblement vers x et $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge fortement vers f dans X', alors $\{\langle f_n, x_n \rangle\}_{n \geq 1}$ converge vers $\langle f, x \rangle$.*

Proposition 1.4.6. *Lorsque X est de dimension finie, la topologie forte de X et la topologie faible $\sigma(X, X')$ coïncident. En particulier, une suite $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

1.4.2 Topologie faible*

Soit X un espace vectoriel normé, X' son dual et X'' son bidual (c'est à dire le dual de X' muni de la norme $\|\xi\|_{X''} = \sup_{f \in \overline{B}_{X'}(0,1)} | \langle \xi, f \rangle |$). Alors on a une injection canonique

$\Phi : X \to X''$ définie de la façon suivante :

pour tout $x \in X$ fixé, l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : X' & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \varphi(f) = \langle \varphi, f \rangle = \langle f, x \rangle . \end{array}$$

est linéaire continue sur X', c'est à dire, φ est un élément de X'', et

$$\begin{array}{rcl} \Phi : X & \to & X'' \\ x & \mapsto & \Phi(x) = \varphi , \end{array}$$

est linéaire continue, de plus, elle est une isométrie, et on a

$$\langle \varphi, f \rangle_{X'',X'} = \langle f, x \rangle_{X',X} \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, f \in X' .$$

Sur l'espace X' sont définies déjà deux topologies :

- La topologie forte associée à la norme de X' $\big(\|f\|_{X'} = \sup\limits_{f \in \overline{B}_{X'}(0,1)} |\langle f, x \rangle|\big)$.
- La topologie faible $\sigma(X', X'')$.

On définit une troisième topologie sur X' qu'est ***la topologie faible****, définie comme suit.

Définition 1.4.7. *La topologie faible* * *sur* X' *est la topologie la moins fine sur* X' *qui rend continues toutes les applications* φ. *On la note* $\sigma(X', X)$.

Proposition 1.4.8. *Soit* X *un espace vectoriel normé. La topologie faible* * $\sigma(X', X)$ *est séparée.*

Proposition 1.4.9. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de* X'. *Alors*

1. *la suite* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *converge vers* f *pour* $\sigma(X', X)$ *(ou faiblement* **) si et seulement si* $\{\langle f_n, x \rangle\}_{n\geq 1}$ *converge vers* $\langle f, x \rangle$ *pour tout* $x \in X$ *;*
2. *si* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *converge fortement vers* f, *alors* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *converge faiblement* * *vers* f *;*
3. *si* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *converge vers* f *pour* $\sigma(X', X)$, *alors* $\|f_n\|_{X'}$ *est bornée et nous avons*
$$\|f\|_{X'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|;$$
4. *si* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *converge vers* f *pour* $\sigma(X', X)$ *et* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *converge fortement vers* x *dans* E *alors* $\{\langle f_n, x_n \rangle\}_{n\geq 1}$ *converge vers* $\langle f, x \rangle$.

Théorème 1.4.10 (Théorème d'Alaoglu).
Soit X *un espace vectoriel normé. Alors, la boule unité fermée de* X' *(pour la norme de la topologie forte) est faiblement* * *compacte.*

Proposition 1.4.11. *Si* X *est de dimension finie, les topologies forte, faible* $\sigma(X', X'')$ *et faible* * $\sigma(X', X)$ *coïncident sur* X'.

1.4.3 Espaces réflexifs

Définition 1.4.12. *On dit que X est **réflexif** si $\Phi(X) = X''$, c'est à dire, si Φ est bijective (on identifie alors X à X'' à l'aide de l'isomorphisme Φ).*

Théorème 1.4.13. *Soit X un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *X est réflexif.*
2. *$\overline{B}_X(0,1) = \{x \in X \ : \ \|x\| \leq 1\}$ est $\sigma(X,X')$-compact.*
3. *Pour tout suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ bornée dans X il existe une sous suite $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ qui converge pour $\sigma(X,X')$.*

Proposition 1.4.14.
- *Tout espace de Hilbert est réflexif .*
- *Tout espace de dimension finie est réflexif .*

Corollaire 1.4.15. *Soit X un espace réflexif et soit $C \subset X$ un convexe fermé borné. Alors C est compact pour la topologie $\sigma(X,X')$.*

Proposition 1.4.16. *Si X est réflexif, alors les topologies faible et faible* sur X' coïncident.*

Dans la suite, on donne comme cas particulier les espaces $L^p(I,\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Proposition 1.4.17. *Soit $p \in]1,+\infty]$ et soit q son conjugué. Alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : L^p(I,\mathbb{R}^N) & \to & (L^q(I,\mathbb{R}^N))' \\ f & \mapsto & \Phi(f) = \varphi_f \,, \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \varphi_f : L^q(I,\mathbb{R}^N) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \varphi_f(g) = \displaystyle\int_I \langle f(t), g(t)\rangle \, dt \,, \end{array}$$

est une bijection. On identifie alors f avec $\Phi(f) \in (L^q(I,\mathbb{R}^N))'$.
On a alors une notion de convergence faible dans $L^p(I,\mathbb{R}^N)$. Si $1 < p < +\infty$ (on a alors aussi $1 < q < +\infty$), les notions de convergence faible et faible* dans $L^p(I,\mathbb{R}^N)$ coïcident. Dans le cas de $L^\infty(I,\mathbb{R}^N)$, que l'on identifie fréquemment avec le dual topologique de $L^1(I,\mathbb{R}^N)$, les notions de convergence faible et faible* sont différentes.*

Proposition 1.4.18 (Convergence faible dans $L^p(I,\mathbb{R}^N)$).
Soient $p \in [1,+\infty[$ et q le conjugué de p, $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(I,\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^p(I,\mathbb{R}^N)$. Alors, la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge faiblement vers f si et seulement si on a, pour tout $g \in L^q(I,\mathbb{R}^N)$

$$\langle f_n, g\rangle = \int_I \langle f_n(t), g(t)\rangle\, dt \longrightarrow \int_I \langle f(t), g(t)\rangle\, dt \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty\,.$$

Définition 1.4.19 (Convergence faible* dans $L^\infty(I,\mathbb{R}^N)$).
Soient $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^\infty(I,\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^\infty(I,\mathbb{R}^N)$. On dit que la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge vers f dans $L^\infty(I,\mathbb{R}^N)$ pour la topologie faible si pour tout élément $g \in L^1(I,\mathbb{R}^N)$, on a*

$$\int_I \langle f_n(t), g(t)\rangle\, dt \longrightarrow \int_I \langle f(t), g(t)\rangle\, dt \quad \text{quand} n \longrightarrow +\infty\,.$$

Proposition 1.4.20. *Soit $p \in]1,+\infty[$. Alors $L^p(I,\mathbb{R}^N)$ est un espace réflexif.*

1.5 Fonction intégrable au sens de Bochner

Les résultats suivants sont pris des références [21] et [29].
Soient (X,Σ,μ) un espace mesuré fini et $(Y,\|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Définition 1.5.1. *Une fonction μ-mesurable $f : X \to Y$ est dite **intégrable au sens de Bochner**, s'il existe une suite de fonctions simples $\{f_n\}_{n\geq 1}$ telle que $f_n \to f$ μ p.p, $\|f_n - f\|$ est intégrable au sens de Lebesgue et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \|f_n - f\|\, d\mu \;=\; 0\,.$$

On pose alors

$$\int_X f\, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu\,.$$

Dans ce cas $\int_A f\, d\mu$ est définie pour tout $A \in \Sigma$ par $\int_A f\, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu$.

Théorème 1.5.2. *Une fonction μ-mesurable $f : X \to Y$ est dite intégrable au sens de Bochner si et seulement si $\int_X \|f\|\, d\mu < \infty$.*

Corollaire 1.5.3. *Si $f : X \to Y$ est une fonction intégrable au sens de Bochner et $A \in \Sigma$, alors*

$$\Big\| \int_A f(x)\, d\mu \Big\| \;\leq\; \int_A \|f(x)\|\, d\mu\,.$$

Corollaire 1.5.4. *Si f, $g : X \to Y$ sont deux fonctions intégrables au sens de Bochner et pour tout $A \in \Sigma$, $\int\limits_A f\,d\mu = \int\limits_A g\,d\mu$, alors*

$$f(x) = g(x) \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in X\,.$$

Théorème 1.5.5. *Si $f_n : X \to Y$, $n \geq 1$ est une suite de fonctions intégrables au sens de Bochner, $\left(\int_X \|f_n\| d\mu\right)_{n\geq 1}$ est bornée et*

$$f_n(x) \rightharpoonup f(x) \quad \mu\text{-p.p sur } X,$$

alors f est intégrable au sens de Bochner et on a

$$\int\limits_X \|f(x)\|\,d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int\limits_X \|f_n(x)\|\,d\mu\,.$$

Théorème 1.5.6. *Soit $f : X \to Y$ une fonction intégrable au sens de Bochner et soit G une fonction linéaire continue de Y à valeurs dans E, où E est un espace de Banach. Alors Gf est une fonction intégrable au sens de Bochner à valeurs dans E, et on a*

$$G\Big(\int_X f(x)d\mu\Big) = \int_X Gf(x)d\mu\,.$$

En particulier, si $x' \in Y'$ et $f : X \to Y$ une fonction intégrable au sens de Bochner, alors $x \mapsto \langle f(x), x'\rangle$ est intégrable et

$$\Big\langle \int_X f(x)d\mu, x'\Big\rangle = \int_X \langle f(x), x'\rangle d\mu\,.$$

Proposition 1.5.7. *Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de $L^p(I, \mathbb{R}^N)$, alors il existe une sous suite $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ qui converge μ-presque partout vers une fonction $f \in L^p(I, \mathbb{R}^N)$.*

Définition 1.5.8. *Soit A un sous ensemble de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$. A est dit* ***équi-intégrable*** *s'il existe $h \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $f \in A$*

$$|f(t)| \leq h(t), \quad p.p \text{ sur } I.$$

1.6 Quelques résultats de convergence

Les résultats suivants sont pris de la référence [3].

Définition 1.6.1. *Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $\{f_n\}_{n\geq 1}$* ***converge uniformément*** *vers f sur I si*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \;:\; \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Proposition 1.6.2.

(i) Toute suite bornée dans un espace de dimension finie admet une sous suite convergente.

(ii) Toute suite convergente est une suite bornée.

Théorème 1.6.3 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue).
Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $L^1(I,\mathbb{R}^N)$ telle que

1. *il existe une fonction réelle positive g intégrable satisfaisant*

$$|f_n(t)| \leq g(t), \text{ p.p sur } I\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*\ ;$$

2. *il existe une fonction f telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$ p.p.*

Alors $f \in L^1(I,\mathbb{R}^N)$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\,dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_I f(t)\,dt\,.$$

Lemme 1.6.4 (Lemme de Fatou).
Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ intégrable au sens de Lebesgue et minorée (resp. majorée) par une fonction intégrable. Alors la limite inférieure (resp. supérieure) de la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est intégrable et on a

$$\int_I \liminf_{n\to+\infty} f_n(t)dt \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt\,,$$

(resp.

$$\int_I \limsup_{n\to+\infty} f_n(t)dt \geq \limsup_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt)\ .$$

1.7 Quelques notions sur la continuité

Les résultats suivants ont été pris des références [3], [4], [33], [27], [22] et [16].

Définition 1.7.1. *Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est dite* ***semi-continue inférieurement*** *(s.c.i) au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\, h \in \mathbb{R},\, h < f(x_0),\, \exists V \in V(x_0)\ /\ h < f(x), \forall\, x \in V\,.$$

•*On dit que f est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point de X.*

Définition 1.7.2. *Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est dite* ***semi-continue supérieurement*** *(s.c.s) au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\, h \in \mathbb{R},\, h > f(x_0),\, \exists V \in V(x_0) \;/\; h > f(x), \forall\, x \in V\,.$$

•*On dit que f est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point de X.*

Définition 1.7.3. *Soient X un espace topologique, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in X$, alors*

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} f(x) &= \sup_{V\in V(x_0)} \inf_{x\in V} f(x)\,.\\ \limsup_{n\to+\infty} f(x) &= \inf_{V\in V(x_0)} \sup_{x\in V} f(x)\,.\end{aligned}$$

Proposition 1.7.4. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est s.c.s sur X ;*
2. *les ensembles $\{x \in X \,:\, f(x) \geq \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont fermés.*

Théorème 1.7.5 (Heine).
Soient $(X, d), (Y, d')$ deux espaces métriques et f une application définie sur X à valeurs dans Y. Si X est compact et f est continue alors f est uniformément continue.

Définition 1.7.6. *Soient X, Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite* ***homéomorphisme*** *si f est bijective (injective et surjective) et que les applications f et f^{-1} sont continues, c'est à dire f est bicontinue.*

Définition 1.7.7. *Une application f définie sur I à valeur dans un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ est dite* ***absolument continue*** *si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\zeta > 0$ tel que pour tout famille finie d'intervalle ouverts disjoints deux à deux de I ; $(]a_i, b_i[)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$, nous avons*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \zeta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon\,.$$

Proposition 1.7.8. *Soient X un espace réflexif et $f \in L^1(I, X)$. Alors f est absolument continue si et seulement si il existe une fonction $g \in L^1(I, X)$ telle que*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds\,, \quad \forall\, t \in I\,.$$

Dans ce cas, $f'(t) = g(t)$ p.p sur I.

Proposition 1.7.9. *Si X est réflexif et f est absolument continue, alors f est dérivable pour presque tout $t \in I$, et on a*

$$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s)ds\,, \quad \forall\, t \in I\,.$$

Définition 1.7.10. *Soient (X, d) espace métrique compact, (Y, d') un espace métrique complet et F un sous ensemble borné de $C(X, Y)$ (l'espace des applications continues définies sur X à valeur dans Y muni de la topologie de la convergence uniforme). On dit que F est* ***équicontinue*** *si*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta_\varepsilon > 0,\, \forall\, x_1, x_2 \in X,\, d(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon\,, \quad \text{pour tout } f \in F\,.$$

Définition 1.7.11. *Soient X, Y deux espaces métriques et $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'applications définies sur X à valeurs dans Y. On dit que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est* ***uniformément bornée*** *si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq M$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.7.12. *Soient X, Y deux espaces de Banach et A un sous ensemble fermé de X. Une application $f : A \to Y$ est dite* ***de rang fini*** *si elle est continue et $f(A)$ est inclus dans un sous espace vectoriel de Y de dimension finie.*

Définition 1.7.13. *Soient X, Y deux espaces de Banach, D un sous ensemble fermé borné de X et soit un opérateur $\varphi : D \subset X \to Y$.*

(a) On dit que φ est ***borné*** *si l'image de tout ensemble borné de D par φ est un ensemble borné de Y.*

(b) On dit que φ est ***compact*** *s'il est continu et l'image des sous ensembles bornés de D par φ sont des ensembles relativement compact de Y.*

(c) On dit que φ est ***complètement continu*** *si pour toute suite $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ qui converge faiblement vers x, alors $\{\varphi(x_n)\}_{n\geq 1}$ converge fortement vers $\varphi(x)$.*

Proposition 1.7.14. *Si X est réflexif, alors φ est complètement continu implique que φ est compact.*

Corollaire 1.7.15. *Soient X un espace réflexif, Y un espace de Banach et $\varphi : X \to Y$ un opérateur linéaire. Alors, φ est complètement continu si et seulement si φ est compact.*

1.8 Quelques résultats de compacité

Les résultats suivants ont été pris des références [3], [4], [17] et [16].

Définition 1.8.1. *Soit (X,d) un espace métrique, et soit A un sous ensemble de X. On dit que A est **relativement compact** si $\overline{A}$ est compact.*

Proposition 1.8.2 (Principe d'angle aigu).

Si H est un espace de Hilbert, $S \subset H$ est un sous ensemble borné ouvert de H avec $0 \notin \partial S$, $\varphi : \bar{S} \to H$ est une application compacte et $\langle \varphi(x), x\rangle \leq \|x\|^2$ pour tout $x \in \partial S$, alors il existe $x \in \bar{S}$ tel que $\varphi(x) = x$.

Théorème 1.8.3 (Théorème d'Ascoli-Arzelà).

Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet et K un sous ensemble de $C(X,Y)$. Alors K est relativement compact dans $C(X,Y)$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites.

1. *K est équicontinue ;*
2. *$K(x) := \{f(x) \ : \ f \in K\}$ est relativement compact dans Y.*

Voilà une conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà.

Théorème 1.8.4. *Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'applications absolument continues définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ satisfaisant les conditions suivantes*

1. *pour tout $t \in I$, $\{f_n(t)\}_{n\geq 1}$ est un sous ensemble relativement compact dans $\mathbb{R}^N$;*
2. *il existe une fonction à valeurs réelles positives $\eta \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$|f_n(t)| \leq \eta(t), \quad p.p \ sur \ I\ .$$

Alors, il existe une sous suite de $\{f_n\}_{n\geq 1}$ (qu'on note aussi $\{f_n\}_{n\geq 1}$) qui converge vers une application absolument continue $f : I \to \mathbb{R}^N$ au sens suivant

(a) *$\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f ;*

(b) *$\{f'_n\}_{n\geq 1}$ converge faiblement vers f' dans $L^1(I,\mathbb{R})$, c'est à dire, $\{f'_n\}_{n\geq 1}$ converge vers f' $\sigma(L^1(I,\mathbb{R}^N), L^\infty(I,\mathbb{R}^N))$.*

Corollaire 1.8.5. *Toute suite de $C(I,\mathbb{R}^N)$ uniformément bornée et équicontinue admet une sous suite convergente dans $C(I,\mathbb{R}^N)$.*

Théorème 1.8.6 (Théorème de Banach-Mazur).

Soit X un espace de Banach, et soit $\{x_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de X qui converge faiblement vers x. Alors il existe une suite $\{z_n\}_{n\geq 1}$ dans X telle que chaque z_n est une combinaison convexe des éléments de la suite $\{x_k\}_{k\geq n}$ et $\{z_n\}_{n\geq 1}$ converge fortement vers x.

Définition 1.8.7 (Injection compact).

Soient $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés telle que $X \subset Y$. On dit que l'injection de X dans Y est compact si la boule unité de X est relativement compact dans Y.

1.9 Degré topologique

Les résultats suivants sont pris des références [2], [17] et [20] .
En 1912, Brouwer a introduit un degré topologique noté par *deg* dans les espaces de Banach de dimension finie, en particulier dans l'espace $\mathbb{R}^N$, et en 1943, Leray et Schauder ont généralisé le degré de Brouwer dans les espaces de Banach de dimension infinie, et il était noté par d_{LS}. Il s'avère que le degré de Leray-Schauder est un outil très puissant pour prouver divers résultats d'existence pour les équations différentielles non-linéaires.

Cette section est consacrée aux définitions et propriétés des degrés topologiques de Brouwer et Leray-Schauder, ainsi qu'à un théorème très important qu'est le théorème de Borsuk-Ulam.

On commence par donner une construction du degré de Brouwer comme suit :

Définition 1.9.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Si $b \notin f(\partial\Omega)$ et $J_f(b) \neq 0$, alors*

$$deg(f, \Omega, b) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} Sgn\, J_f(x)\,,$$

avec $deg(f, \Omega, b) = 0$ si $f^{-1}(b) = \emptyset$, où

- *pour tout $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $J_f(x) := \ det(f'(x))$ est le déterminant Jacobien de f en x ;*
- *pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $Sgn(a) = 1$ si $a > 0$, $Sgn(a) = -1$ si $a < 0$.*

*deg est appelé : **le degré de Brouwer**.*

Définition 1.9.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Si $b \notin f(\partial\Omega)$, alors on peut définir*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(f, \Omega, b') \ ,$$

où b' est une valeur régulière de f telle que $|b' - b| < d(b, f(\partial\Omega))$.

Définition 1.9.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Si $b \notin f(\partial\Omega)$, alors on peut définir*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(g, \Omega, b) \ ,$$

où $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ telle que $\|g - f\|_C < d(b, f(\partial\Omega))$.

Théorème 1.9.4. *Pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et pour tout $b \in \mathbb{R}^N$, il existe une application unique*

$$deg(\cdot, \Omega, b) \ : \{f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)\,, b \notin f(\partial\Omega)\} \mapsto \mathbb{Z}\,,$$

qui satisfait les propriétés suivantes.

1. *(<u>Normalisation</u>) : si* $b \in \Omega$ *alors* $deg(Id, \Omega, b) = 1$.
2. *(<u>Additivité</u>) : si* $b \in \mathbb{R}^N$ *et* Ω_1, Ω_2 *sont deux ouverts de* $\mathbb{R}^N$ *tels que* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *et si* $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, *alors* $deg(f, \Omega, b) = deg(f, \Omega_1, b) + deg(f, \Omega_2, b)$.
3. *(<u>Continuité</u>) :* $deg(., \Omega, b)$ *est continue.*
4. *(<u>Invariance par translation</u>) :* $deg(f, \Omega, b) = deg(f - b, \Omega, 0)$.

Définition 1.9.5 (Degré de Brouwer dans un espace vectoriel de dimension finie). *Soit* $(X, \|\cdot\|_X)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie* N, *et* $\mathcal{A}_X$ *l'ensemble des triplets* (f, Ω, y) *tel que* Ω *un ouvert borné de* X, $y \in X$ *et* $f : \overline{\Omega} \to X$ *une fonction continue et vérifie* $y \notin f(\partial\Omega)$.
Comme X *est de dimension* N, *il existe un isomorphisme* $\varphi : \mathbb{R}^N \to X$, *alors on définit le degré de Brouwer dans* X *par*

$$deg_X(f, \Omega, y) = deg(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)) \ .$$

Le théorème suivant énonce l'existence du degré de Leray-Schauder au même temps que ses propriétés principales tout à fait similaires à celles du degré de Brouwer.

Théorème 1.9.6. *Soit* X *un espace de Banach sur le corps* $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}_c$ *l'ensemble des triplets* $(Id - f, \Omega, y)$ *où* Ω *est un ouvert borné de* X, $y \in X$ *et* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *est compact telle que* $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$. *Il existe une application* $d_{LS} : \mathcal{A}_c \to \mathbb{Z}$ *telle que*

(i) *(<u>Normalisation</u>) : si* $y \in \Omega$ *alors* $d_{LS}(Id, \Omega, y) = 1$. *De plus, si* $y = 0$ *alors* $d_{LS}(Id, \Omega, 0) = 1 \Leftrightarrow 0 \in \Omega$.

(ii) *(<u>Solvabilité</u>) :* $d_{LS}(Id - f, \Omega, 0) \neq 0 \Rightarrow f(x) = x$ *admet une solution dans* Ω.

(iii) *(<u>Additivité</u>) : si* Ω *est un ouvert borné de* X, $y \in X$, $f : \overline{\Omega} \to X$ *est compact et* Ω_1, Ω_2 *sont deux ouverts disjoints inclus dans* Ω *tels que* $y \notin (Id - f)(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, *alors* $d_{LS}(Id - f, \Omega, y) = d_{LS}(Id - f, \Omega_1, y) + d_{LS}(Id - f, \Omega_2, y)$.

(iv) *(<u>Invariance par homotopie</u>) : si* $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ *est compact,* $y : [0,1] \to X$ *est continue et pour tout* $\lambda \in [0,1]$, $y(\lambda) \notin (Id - h(\cdot, \lambda))(\partial\Omega)$ *alors* $d_{LS}(Id - h(\cdot, \lambda), \Omega, y(\lambda))$ *est indépendant de* $\lambda \in [0,1]$.

d_{LS} *est appelé :* ***le degré topologique de Leray-Schauder***.

Théorème 1.9.7. *Le degré de Leray-Schauder sur* $\mathcal{A}_c$ *est définit par*

$$d_{LS}(Id - f, \Omega, y) = deg_Y(Id - g_{|\overline{\Omega \cap Y}}, \Omega \cap X, y) \ ,$$

où $g : \overline{\Omega} \to X$ *est n'importe quelle application de rang finie telle que* $\sup\limits_{\omega\in\overline{\Omega}} \|g(\omega) - f(\omega)\|_X < r$, *avec* $r = d(y, (Id - f)(\partial\Omega))$ *et* Y *est un sous espace de* X *de dimension finie qui contient* y *et l'image de* g.

Théorème 1.9.8 (Théorème de point fixe de Leray-Schauder).
Soit X *un espace de Banach. Soient* $\psi : X \to X$ *une fonction compact et continue et*

$$S = \{x \in X : \ \ x = \lambda\psi(x), \ \lambda \in]0.1[\}.$$

Alors, soit S *est non borné, ou bien* ψ *admet un point fixe.*

Dans notre travail, on a besoin de la généralisation multivoque suivante du théorème de Leray-Schauder (voir [8]).

Théorème 1.9.9. *Soient* X, Y *deux espaces de Banach,* $C \subset X$ *et* $D \subset Y$ *deux ensembles convexes tels que* $0 \in C$, *Soit* $W : C \rightrightarrows D$ *une multiapplication à valeurs convexes faiblement compactes, et s.c.s de* C *muni de le topologie forte dans* D *muni de la topologie faible. Soit* $\psi : D \to C$ *une application complètement continue. Si* $\Psi = \psi \circ W : C \rightrightarrows C$ *est compacte, alors soit*

(i) l'ensemble $S = \{x \in C \ : \ x \in \lambda\Psi(x) \, , \ \lambda \in]1, 0[\}$ *est non borné, soit*

(ii) Ψ *admet un point fixe, i.e. il existe* $x \in C$, *tel que* $x \in \Psi(x)$.

Théorème 1.9.10 (Théorème de Borsuk-Ulam).
Soient X *un espace de Banach et* Ω *un ouvert borné de* X, *symétrique par rapport à l'origine et* $0 \in \Omega$. *Soient* f *une application compacte de* $\overline{\Omega}$ *à valeurs dans* X *et* $\varphi = Id - f$. *Si* f *est impair sur* $\partial\Omega$ *et* $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$, *alors* $d_{LS}(\varphi, \Omega, 0)$ *est impair, i.e.,* $d_{LS}(\varphi, \Omega, 0) \equiv 1\,[2]$.

1.10 Multiapplictions

Nous donnons dans cette section quelques définitions et résultats concernant les multiapplicatins. Ces résultats ont été pris des références [3], [31], [24] et [25].

1.10.1 Multiapplications et sélections

Définition 1.10.1. *Soient* X, Y *deux ensembles non vides. On appelle* ***multiapplication*** *(ou* ***fonction multivoque****)* F *définie sur* X *à valeurs dans* Y *toute application qui à chaque élément* $x \in X$ *associe un sous ensemble* $F(x)$ *de* Y, *et on note* $F : X \rightrightarrows Y$ *ou* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *où* $\mathcal{P}(Y)$ *est l'ensemble des parties de* Y.

- *On appelle* **domaine** *(effectif) de la multiapplication F qu'on note $dom(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$D(F) := Dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\} .$$

- *On appelle* **graphe** *de F, qu'on note $Gr(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\} .$$

- *On appelle* **image** *de F, qu'on note $Im(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y \ : \ \exists\, x \in X \ , \ y \in F(x)\} .$$

- *Si $A \subset X$, on appelle* **image** *de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de Y défini par $F(A) = \bigcup\limits_{x \in A} F(x)$, et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y \ : \ \exists\, x \in A, y \in F(x)\} .$$

Considérons la multiapplication inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par

$$x \in F^{-1}(y) \ \Leftrightarrow \ y \in F(x) .$$

- *Pour tout $V \subset Y$, on appelle* **image réciproque large** *de F, le sous ensemble défini par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X \ : \ F(x) \cap V \neq \emptyset\} .$$

- *Pour tout $V \subset Y$, on appelle* **image réciproque étroite** *de F, le sous ensemble défini par*

$$F_{+}^{-1}(V) = \{x \in X \ : \ F(t) \subseteq V\} .$$

Définition 1.10.2. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication. On appelle* ***sélection*** de *F toute application $f : dom(F) \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x) \, , \, \forall\, x \in Dom(F) .$$

1.10.2 Continuité des multiapplications

Définition 1.10.3. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication.*

1. *On dit que F est* ***semicontinue supérieurement*** *(s.c.s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de X contenant $F(x_0)$ c'est à dire $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(\Omega) \subset U$ c'est à dire $\exists\, \Omega \in V(x_0)$; $F(z) \subset U$, $\ \forall\, z \in \Omega$. Autrement dit $F_{+}^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.*

- *F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x_0 \in X$.*

2. *On dit que F est **semicontinue inférieurement** (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de X vérifiant $F(x_0) \cap U \neq 0$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(z) \cap U \neq 0$, $\forall\, z \in \Omega$. Autrement dit $F^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.*

- *F est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point $x_0 \in X$.*

3. *On dit que F est **continue** au point x_0 si elle est s.c.s et s.c.i au point x_0.*

Proposition 1.10.4. *Soient X, Y deux espaces topologiques, considérons la multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$, alors*

(i) F est s.c.s si et seulement si $F^{-1}(U)$ est fermé de X pour tout U fermé de Y.

(ii) F est s.c.i si et seulement si $F^{-1}(U)$ est ouvert de X pour tout U ouvert de Y.

Proposition 1.10.5. *(Voir[19]) Soient X, Y deux espaces de Banach et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication à valeurs non vides. Alors F est s.c.i si et seulement si $d(\cdot, F)$ est s.c.s.*

Définition 1.10.6. *(Voir [19]) Soient X, Y deux espaces de Banach. Alors la multiapplication $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est dite ε-**s.c.s** si pour tout $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tel que*

$$F(x) \subset F(x_0) + B(0, \varepsilon), \qquad \textit{pour tout}\, x \in B(x_0, \delta)\,.$$

Proposition 1.10.7. *(Voir [19]) Soient X, Y deux espaces de Banach et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication à valeurs non vides.*
Si F est s.c.s alors F est ε-s.c.s. L'inverse est vrai si F est à valeurs compactes (c'est à dire si elle est s.c.s et l'image des sous ensembles bornés de X par F sont relativement compacts dans Y).

1.10.3 Mesurabilité des multiapplications

Nous allons donner maintenant des résultats fondamentaux de la théorie des multiapplications mesurables.

Définition 1.10.8. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$. On dit que F est Σ-**mesurable** ou bien **simplement mesurable** si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X \,:\, F(x) \cap V \neq \emptyset\,\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.10.9. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *F et Σ-mesurable ;*

(ii) *Pour chaque $y \in Y$, la fonction*

$$\begin{aligned} h_y : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(y, F(x)) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable.

Définition 1.10.10. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X et Y deux espaces métriques. Soit f une application telle que $f : T \times X \to Y$. On dit que f est **de Carathéodory** si*

1. *pour tout $t \in T$, la fonction $f(t, \cdot)$ est continue ;*
2. *pour tout $x \in X$, la fonction $f(\cdot, x)$ est mesurable sur T.*

Proposition 1.10.11. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et Y un espace métrique. Soit $f : T \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors f est $\big(\Sigma \otimes \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)\big)$-mesurable.*

Proposition 1.10.12. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication à valeurs fermées. Donc si F est Σ-mesurable alors $Gr(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$.*

Théorème 1.10.13. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré avec $\sigma-$fini et Y un espace métrique séparable. On suppose que la tribu Σ est μ-complète. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication à valeurs fermées. Alors F est Σ-mesurable si et seulement si $Gr(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$.*

Théorème 1.10.14 (Théorème de sélections mesurables).
Soit (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication à valeurs non vides fermées. Donc si F est mesurable alors elle admet au moins une sélection mesurable.

Théorème 1.10.15. *(Voir [23]) Soient X un espace métrique séparable, $F : I \rightrightarrows X$ une multiapplication mesurable à valeurs non vides fermées et $\phi : I \times X \to \mathbb{R}$ une fonction $(\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$-mesurable vérifiant*

i) *$\phi(t, \cdot)$ est s.c.s pour tout $t \in I$;*

ii) il existe $f_0 \in S_F^p = \{f \in L^p(I,\mathbb{R}^N),\ f(t) \in F(t),\ p.p \text{ sur } I\}$*, pour* $p \in [1,+\infty]$*, telle que*

$$\int_0^T \phi(t, f_0(t))dt < +\infty\,.$$

Alors

$$\inf_{f\in S_F} \int_0^T \phi(t, f(t))dt = \int_0^T \inf_{x\in F(t)} \phi(t,x)dt\,.$$

Définition 1.10.16. *(Voir [29]) Soit* X *un espace de Banach. Un ensemble* $K \subseteq L^p(I,X)$ *(*$p \in [1,+\infty[$*) est dit* ***décomposable*** *si, pour tout triplets* $(A, f_1, f_2) \in \mathcal{L}(I) \times K \times K$*, on a*

$$1\!\mathrm{I}_A f_1 + 1\!\mathrm{I}_{A^c} f_2 = 1\!\mathrm{I}_A f_1 + (1 - 1\!\mathrm{I}_A) f_2 \in K\,.$$

Théorème 1.10.17. *(Voir [29]) Soient* X *un espace de Banach et* $F : I \rightrightarrows X$ *une multiapplication mesurable à valeurs non vides fermées. Alors* S_F^p *(avec* $p \in [1,+\infty[$*) est décomposable.*

Théorème 1.10.18. *(Voir [24]) Soit* X *est un espace métrique séparable,* Y *est un espace de Banach et* $N : X \rightrightarrows L^p(I,Y)$ *(*$p \in [1,+\infty[$*) une multiapplication s.c.i à valeurs non vides fermées et décomposables. Alors* N *admet une sélection continue.*

1.11 Opérateurs monotones

Les résultats suivants sont pris des références [14], [28], [24] et [10].
Soit X un espace de Banach, X' son dual topologique. Soit $A : X \to X'$ un opérateur univoque. Alors le **domaine** de A est donné par

$$D(A) = \{x \in X\ :\ A(x) \text{ existe}\},$$

l'image de A par

$$Im(A) = \{y \in X'\,,\ \exists\, x \in D(A)\,, y = A(x)\}\,,$$

et **son graphe** par

$$Gr(A) = \{(x,y) \in X \times X',\ y = A(x)\}\,.$$

Définition 1.11.1. *Un opérateur* $A : D(A) \subseteq X \to X'$ *est dit* ***monotone*** *si pour tout* $x_1,\ x_2 \in D(A)$

$$\langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2\rangle \geq 0\,,$$

et il est ***strictement monotone*** *si pour tout* $x_1,\ x_2 \in D(A)$

$$\langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2\rangle > 0\,.$$

Remarque 1.11.1. *Si* $\langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2\rangle = 0$ *implique* $x_1 = x_2$*, alors on dit que* A *est strictement monotone.*

Théorème 1.11.2. *Soit* $(H, \|\cdot\|)$ *un espace de Hilbert,* $A : H \to H$ *un opérateur monotone continu tel que* $\|A(x)\| \longrightarrow +\infty$ *quand* $\|x\| \longrightarrow +\infty$*. Alors* A *est surjectif.*
Si de plus, A *est strictement monotone alors* A *est un homéomorphisme.*

Proposition 1.11.3. *Soit* $A : H \to H$ *un homéomorphisme qui vérifie les conditions du Théorème 1.11.2, alors l'opérateur inverse* A^{-1} *est aussi strictement monotone et* $\|A^{-1}(y)\| \longrightarrow +\infty$ *quand* $\|y\| \longrightarrow +\infty$*.*

Définition 1.11.4. *Un opérateur* $A : X \to X'$ *est dit* ***cœrcif*** *si, soit* $D(A)$ *est borné ou bien* $D(A)$ *n'est pas borné et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\langle y_n, x_n\rangle}{\|x_n\|} = +\infty \quad \text{pour tout} \quad (x_n, y_n) \in Gr(A) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty\,.$$

Définition 1.11.5. *Un opérateur monotone* A *est dit* ***maximal monotone*** *si* A *ne peut pas être proprement égale à un autres opérateurs monotones.*

En explicitant cette définition, nous aurons la proposition suivante.

Proposition 1.11.6. *Un opérateur monotone* $A : X \to X'$ *est dit maximal monotone si et seulement si pour tout* $(x, y) \in X \times X'$ *tel que*

$$\langle y - v, x - u\rangle \geq 0\,, \quad \text{pour tout}\,(u, v) \in Gr(A)\,,$$

on a $y = A(x)$*.*

Théorème 1.11.7. *Soit* X *un espace de Banach réflexif et soit* $A : X \to X'$ *un opérateur monotone, continu et* $D(A) = X$*, alors* A *est maximal monotone.*

Théorème 1.11.8. *Si* $A, B : X \to X'$ *sont des opérateurs maximaux monotones et* $int(D(A)) \cap D(B) \neq \emptyset$*, alors* $A + B$ *est un opérateur maximal monotone.*

Corollaire 1.11.9. *Soient* X *un espace réflexif,* $A : X \to X'$ *un opérateur maximal monotone et cœrcif, alors* $Im(A) = X'$*, c'est à dire* A *est surjectif.*

1.12 Dérivée au sens des distributions

Les résultats suivants sont pris des références [11] et [22].

Définition 1.12.1. *L'ensemble de toutes les fonctions dérivables définies de I dans $\mathbb{R}^N$ et à support compact dans $]0, T[$ (c'est à dire le complémentaire du plus grand ouvert où la fonction est nulle) est noté par $C_0^1(I)$, qu'est un espace vectoriel et tout élément de cet espace s'appelle* ***fonction-test****.*

Définition 1.12.2. *Soient X un espace de Banach, $f, g \in L^1(I, X)$. On dit que g est la* ***dérivée de f au sens des distributions*** *(ou* ***la dérivée faible****), si*

$$\int_0^T f(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T g(t)\,\varphi(t)\,dt\,, \quad \forall\,\varphi \in C_0^1(I)\,.$$

On note la dérivée de f par f' ou Df.

Corollaire 1.12.3. *L'espace $C_0^1(I)$ est dense dans $L^p(I, \mathbb{R}^N)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

1.13 Espaces de Sobolev

Les résultats suivants sont pris des références [1], [6] et [22].
En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles. Ils doivent leur nom au mathématicien Russe Sergueï Lvovitch Sobolev.

Définition 1.13.1. *Soit $p \in [1, +\infty[$. On définit l'espace de* ***Sobolev*** *$W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ par*

$$W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(I, \mathbb{R}^N),\ u' \in L^p(I, \mathbb{R}^N)\}\,,$$

où u' est la dérivée de u au sens des distributions.
On munit l'espace vectoriel $W^{1.p}$ par la norme suivante

$$\|u\|_{W^{1.p}} = \|u\|_p + \|u'\|_p\,.$$

Proposition 1.13.2. *L'espace $(W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{W^{1.p}})$ est un espace de Banach et réflexif pour $1 < p < +\infty$, de plus il est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Définition 1.13.3 (L'espace $W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$).

- *Étant donné $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$* ***la fermeture*** *de l'espace $C_0^1(I)$ dans $W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$.*
- *L'espace $W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$, muni de la norme induite par $W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$, est un espace de Banach.*

- *L'espace* $W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$ *est un espace séparable, il est de plus réflexif pour* $1 < p < +\infty$.

Le résultat suivant fournit une caractérisation essentielle des fonctions de $W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$.

Corollaire 1.13.4. *L'espace* $(W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{W^{1.p}})$ *est un sous espace vectoriel fermé de* $W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$.

Proposition 1.13.5 (Inégalité de Poincaré).
Il existe une constante $c > 0$ *telle que*

$$\|u\|_{W^{1.p}} \leq c\,\|u'\|_p\,, \qquad \forall u \in W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$ *la quantité* $\|u'\|_p$ *est une norme équivalente à la norme de* $W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$.

CHAPITRE 2

Problèmes non-linéaires pour des équations différentielles du second ordre

Le but de ce chapitre est d'obtenir des opérateurs non-linéaires dans des espaces de fonctions appropriés dont les points fixes coïncident avec les solutions des problèmes non-linéaires de la forme :

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)) \ , \quad \text{p.p sur } I, \\ L(u(0), u(T), u'(0), u'(T)) = 0 \ , \end{cases} \tag{2.0.1}$$

où $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue, strictement monotone et cœrcive et $f : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory qui vérifié la condition suivante : pour tout $\rho > 0$, il existe une application $\alpha_\rho \in L^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ avec $|x| \leq \rho, \ |y| \leq \rho$ on a

$$|f(t, x, y)| \leq \alpha_\rho(t). \tag{2.0.2}$$

Les conditions aux limites exprimées par $L(u(0), u(T), u'(0), u'(T)) = 0$ peuvent être une des cas suivants : $u(0) = u(T) = 0$ (problème de Drichlet), $u'(0) = u'(T) = 0$ (problème de Neumann) ou $u(0) = u(T)$ et $u'(0) = u'(T)$ (problème périodique). Alors pour nous la fonction $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ est défini par l'une des lois suivantes

$$L(x, y, z, w) = x^2 + y^2 \ , \ L(x, y, z, w) = z^2 + w^2 \ , \ L(x, y, z, w) = (x - y)^2 + (z - w)^2 \ .$$

On note par $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ la solution de (2.0.1) avec $\phi(u')$ est absolument continue qui vérifiée les conditions de (2.0.1) p.p sur I.

Ce chapitre est organisé comme suit ; dans la section 1 nous introduisons des conditions sur la fonction ϕ, et nous considérons et montrons un exemple important sur cette fonction

qui vérifie ces conditions, puis, nous donnons une notion d'une fonction associée à ϕ qui sera utile et qui permettra de résoudre le problème (2.0.1).
Dans la section 2, nous allons donner les résultats d'existences de solutions des problèmes non-homogènes de type semblable au p-Laplacien pour les équations différentielles du second ordre associées aux différentes conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et périodique.
Dans la section 3, nous réduisons les problèmes (2.0.1) à des problèmes de point fixe dans des sous espaces $C^1(I, \mathbb{R}^N)$, et finalement dans la section 4, en combinant la théorie du degré de Leray-Schauder et les résultats de la section 3, nous donnons quelques théorèmes d'existence pour le problème (2.0.1).

On va noter par

$$\begin{cases} C_0^1 = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^N) \mid u(0) = 0 \ , \ u(T) = 0\}, \\ C_N^1 = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^N) \mid u'(0) = 0 \ , \ u'(T) = 0\}, \\ C_T^1 = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^N) \mid u(0) = u(T) \ , \ u'(0) = u'(T)\}. \end{cases}$$

2.1 Valeurs moyennes généralisées

Considérons la fonction continue $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ qui vérifie les conditions suivantes

(H_1) (la monotonie stricte) : pour tout $x_1, \ x_2 \in \mathbb{R}^N$ telle que $x_1 \neq x_2$,
$\langle \phi(x_1) - \phi(x_2), x_1 - x_2 \rangle > 0$;

(H_2) (la cœrcivité) : il existe une fonction $\alpha : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $\alpha(s) \longrightarrow +\infty$ quand $s \longrightarrow +\infty$ et $\langle \phi(x), x \rangle \geq \alpha(|x|)|x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Donnons un simple exemple pour un opérateur ϕ qui vérifie les conditions (H_1) et (H_2).

Exemple 2.1.1. *(L'opérateur p-Laplacien). Pour $p \geq 2$, soit $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ donné par*

$$\begin{cases} J(x) = |x|^{p-2}x \ \textit{ pour } x \neq 0, \\ J(0) = 0. \end{cases}$$

Alors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ tels que $x \neq y$, on a

$$\begin{aligned} \langle J(x) - J(y), x - y \rangle &= \langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \\ &= \langle |x|^{p-2}x + |x|^{p-2}y - |x|^{p-2}y - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \\ &= |x|^{p-2}\langle x - y, x - y \rangle + (|x|^{p-2} - |y|^{p-2})\langle y, x - y \rangle \\ &= |x|^{p-2}|x - y|^2 + (|x|^{p-2} - |y|^{p-2})\langle y, x - y \rangle \\ &= |x|^{p-2}|x - y|^2 + (|x|^{p-2} - |y|^{p-2})(\langle y, x \rangle - |y|^2) \ , \end{aligned}$$

mais

$$\langle y, x\rangle = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2).$$

En effet,

$$\begin{aligned} |x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2 &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle \\ &= 2\langle y, x\rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle J(x) - J(y), x-y\rangle &= |x|^{p-2}|x-y|^2 + (|x|^{p-2} - |y|^{p-2})\Big[\frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2) - |y|^2\Big] \\ &= |x|^{p-2}|x-y|^2 + \frac{1}{2}(|x|^{p-2} - |y|^{p-2})(|x|^2 - |x-y|^2) - |y|^2) \\ &= \frac{1}{2}(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x-y|^2 + \frac{1}{2}(|x|^{p-2} - |y|^{p-2})(|x|^2 - |y|^2) \\ &\geq \frac{1}{2}(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x-y|^2 > 0\ . \end{aligned}$$

D'où $\langle J(x) - J(y), x-y\rangle > 0$.
D'autre part

$$\begin{aligned} \langle J(x), x\rangle &= \langle |x|^{p-2}x, x\rangle \\ &= |x|^{p-2}\langle x, x\rangle \\ &= |x|^{p-2}|x|^2 \\ &= |x|^p \\ &= |x|^{p-1}|x|\ . \end{aligned}$$

Pour $\alpha(|x|) = |x|^{p-1}$, (H_2) *est vérifiée.*

Proposition 2.1.1. *Pour tout* $l \in C(I, \mathbb{R}^N)$, *on définit l'opérateur* $G_l : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *par*

$$G_l(a) = \frac{1}{T}\int_0^T \phi^{-1}(a + l(t))\, dt,$$

alors

1. *pour* $l \in C(I, \mathbb{R}^N)$ *fixé, l'équation*
$$G_l(a) = 0 \tag{2.1.1}$$
admet une solution unique qu'on note par $Q_\phi(l)$ *;*

2. La fonction $Q_\phi : C(I,\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ est continue et envoie les ensembles bornés de $C(I,\mathbb{R}^N)$ en ensembles bornés dans $\mathbb{R}^N$.

Démonstration

1. On commence par montrer que si (2.1.1) admet une solution, elle est unique.

   Comme ϕ vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2), alors par la Proposition 1.11.3 et le Théorème 1.11.2, ϕ^{-1} est strictement monotone, donc pour $a_1 \neq a_2$

$$\langle G_l(a_1) - G_l(a_2), a_1 - a_2\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \langle \phi^{-1}(a_1 + l(t)) - \phi^{-1}(a_2 + l(t)), a_1 - a_2\rangle dt > 0,$$

   donc G_l est strictement monotone, c'est à dire que si l'équation (2.1.1) admet deux solutions a_1 et a_2 alors $G_l(a_1) = G_l(a_2) = 0$, cela implique que

$$\langle G_l(a_1) - G_l(a_2), a_1 - a_2\rangle = 0,$$

   et par la stricte monotonie de G_l, on obtient que $a_1 = a_2$; c'est à dire la solution si elle existe, elle est unique.

   Pour montrer l'existence de cette solution, on va commencer par montrer que $\langle G_l(a), a\rangle > 0$, pour $|a|$ est suffisamment grand.

   On a G_l est continue (puisque ϕ^{-1} est continue) et

$$\begin{aligned}
\langle G_l(a), a\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \langle \phi^{-1}(a + l(t)), a\rangle dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \Big(\langle \phi^{-1}(a + l(t)), a + l(t)\rangle - \langle \phi^{-1}(a + l(t)), l(t)\rangle\Big) dt \\
&\geq \frac{1}{T}\int_0^T \langle \phi^{-1}(a + l(t)), a + l(t)\rangle dt - \frac{\|l\|_C}{T}\int_0^T \left|\phi^{-1}(a + l(t))\right| dt,
\end{aligned}$$

   la dernière inégalité est obtenue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

   D'après l'hypothèse (H_2) et pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\langle y, \phi^{-1}(y)\rangle \geq \alpha\left(\left|\phi^{-1}(y)\right|\right)\left|\phi^{-1}(y)\right|, \tag{2.1.2}$$

   donc, pour tout $t \in I$

$$\langle a + l(t), \phi^{-1}(a + l(t))\rangle \geq \alpha(|\phi^{-1}(a + l(t))|)\,|\phi^{-1}(a + l(t))|\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\langle G_l(a), a\rangle &\geq \frac{1}{T}\int_0^T \alpha\left(\left|\phi^{-1}(a+l(t))\right|\right)\left|\phi^{-1}(a+l(t))\right| dt - \frac{\|l\|_C}{T}\int_0^T \left|\phi^{-1}(a+l(t))\right| dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\alpha\left(\left|\phi^{-1}(a+l(t))\right|\right) - \|l\|_C\right]\left|\phi^{-1}(a+l(t))\right| dt. \qquad (2.1.3)\end{aligned}$$

Alors, $|a| \longrightarrow +\infty$ implique $|\phi^{-1}(a+l(t))| \longrightarrow +\infty$ uniformément pour $t \in I$, donc d'après l'inégalité (2.1.3), il existe un nombre positif r assez grand tel que $\langle G_l(a), a\rangle > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ avec $|a| = r$. Comme G_l est continu sur un espace de dimension finie $\mathbb{R}^N$, alors l'image des ensembles bornés par G_l sont des ensembles bornés, donc elles sont relativement compact, par suite G_l est compact, cela implique que $a - G_l$ est compact pour tout $a \in \mathbb{R}^N$.

Soit $S = B_{\mathbb{R}^N}(0, r)$, S est donc ouvert et borné, de plus, $0 \notin \partial S$.

Posons, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(a) = a - G_l(a)$ donc $G_l(a) = a - \varphi(a)$. D'où

$$\begin{aligned}\langle G_l(a), a\rangle \geq 0 &\iff \|a\|^2 - \langle G_l(a), a\rangle \leq \|a\|^2 \\ &\iff \langle a, a\rangle - \langle G_l(a), a\rangle \leq \|a\|^2 \\ &\iff \langle a - G_l(a), a\rangle \leq \|a\|^2 \\ &\iff \langle \varphi(a), a\rangle \leq \|a\|^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le Théorème 1.8.2 (Principe d'angle aigu), il existe $a \in \bar{S}$ tel que $\varphi(a) = a$ c'est à dire $G_l(a) = 0$ admet une solution pour tout $l \in C(I, \mathbb{R}^N)$.

2. Considérons l'opérateur $Q_\phi : C(I, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ avec, pour tout $l \in C(I, \mathbb{R}^N)$, $Q_\phi(l)$ est la solution unique de (2.1.1), c'est à dire

$$\int_0^T \phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t))dt = 0\,. \qquad (2.1.4)$$

Soit Λ un sous ensemble borné de $C(I, \mathbb{R}^N)$ et soit $l \in \Lambda$. Alors en multipliant (2.1.4) par $Q_\phi(l)$, on obtient

$$\int_0^T \langle \phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t)), Q_\phi(l)\rangle dt = 0,$$

par conséquent

$$\int_0^T \langle \phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t)), Q_\phi(l) + l(t)\rangle dt = \int_0^T \langle \phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t)), l(t)\rangle dt. \qquad (2.1.5)$$

Supposons que l'ensemble $\{Q_\phi(l),\ l \in \Lambda\}$ n'est pas borné dans $\mathbb{R}^N$, alors pour tout $A > 0$, il existe $l \in \Lambda$ avec $|Q_\phi(l)|$ est suffisamment grand tels que

$$A \leq \alpha\left(\left|\phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t))\right|\right) \text{ uniformément pour tout } t \in I. \tag{2.1.6}$$

D'après (2.1.2), (2.1.5) et (2.1.6) on a

$$\begin{aligned} A\int_0^T \left|\phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t)\right| dt &\leq \int_0^T \alpha\left(\left|\phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t)\right|\right)\left|\phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t)\right| dt \\ &\leq \int_0^T \langle\phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t)), Q_\phi(l) + l(t)\rangle dt \\ &= \int_0^T \langle\phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t)), l(t)\rangle dt \\ &\leq \|l\|_C \int_0^T \left|\phi^{-1}(Q_\phi(l) + l(t))\right| dt\ , \end{aligned}$$

qui implique $A \leq \|l\|_C$, contradiction avec $l \in \Lambda$, donc l'ensemble $\{Q_\phi(l),\ l \in \Lambda\}$ est borné dans $\mathbb{R}^N$, c'est à dire Q_ϕ envoie les ensembles bornés de $C(I, \mathbb{R}^N)$ en ensemble bornés dans $\mathbb{R}^N$.

3. Pour montrer la continuité de Q_ϕ, soit $\{l_n\}_{n\geq 1}$ une suite convergente dans $C(I, \mathbb{R}^N)$ vers $l \in C(I, \mathbb{R}^N)$. Puisque $\{Q_\phi(l_n)\}_{n\geq 1}$ est une suite bornée dans $\mathbb{R}^N$, alors elle contient une sous suite convergente, notée aussi $\{Q_\phi(l_n)\}_{n\geq 1}$ vers $\tilde{a} \in \mathbb{R}^N$, donc quand $n \longrightarrow +\infty$ dans $\int_0^T \phi^{-1}(Q_\phi(l_n) + l_n(t))dt = 0$ on obtient, par la continuité de ϕ^{-1} et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, que $\int_0^T \phi^{-1}(\tilde{a} + l(t))dt = 0$, par suite $Q_\phi(l) = \tilde{a}$ qui montre la continuité de Q_ϕ.

■

Proposition 2.1.2. *Si l'opérateur ϕ est impair alors la solution Q_ϕ définie dans la Proposition 2.1.1 est aussi impaire.*

Démonstration

Si ϕ est impair, alors ϕ^{-1} est aussi impair, donc on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \phi^{-1}(Q_\phi(-l)-l(t))dt = 0 \iff & -\int_0^T \phi^{-1}(-Q_\phi(-l)+l(t))dt = 0 \\ \iff & \int_0^T \phi^{-1}(-Q_\phi(-l)+l(t))dt = 0\,. \qquad (2.1.7)\end{aligned}$$

Comme la solution de l'équation (2.1.1) est unique, alors d'après (2.1.7) on obtient que $Q_\phi(-l) = -Q_\phi(l)$, d'où Q_ϕ est impaire. ∎

Remarque 2.1.1. *Si $\phi = Id$, alors l'équation* (2.1.1) *devient*

$$\frac{1}{T}\int_0^T (a + l(t))\,dt = 0\,,$$

et donc la solution unique est

$$a = -\frac{1}{T}\int_0^T l(t) := Q(l)\,.$$

Q est appelé l'opérateur de la valeur moyenne. Donc, $Q_{Id} = Q$ et Q_ϕ peuvent être considérés comme valeurs moyennes généralisées associés à la fonction ϕ.

2.2 Problèmes non-homogènes avec conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et périodiques

2.2.1 Cas Dirichlet

Considérons le problème non-homogène avec les conditions aux limites de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = h(t)\ , & \text{p.p sur } I, \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

où $h \in L^1(I, \mathbb{R}^N)$. On définit $H : L^1(I, \mathbb{R}^N) \to C(I, \mathbb{R}^N)$ par $H(h)(t) = \int_0^t h(s)ds$, pour tout $t \in I$, qu'est une fonction continue et bornée de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$ dans $C(I, \mathbb{R}^N)$. En effet, H est bien défini car elle est définie par l'intégrale d'une fonction dans $L^1(I, \mathbb{R}^N)$. Soit

$\{h_n\}_{n\geq 1} \subset L^1(I, \mathbb{R}^N)$ une suite qui converge vers $h \in L^1(I, \mathbb{R}^N)$ alors on a

$$\begin{aligned}
\|H(h_n) - H(h)\|_C &= \sup_{t\in I} |H(h_n)(t) - H(h)(t)| \\
&\leq \sup_{t\in I} \int_0^t |h_n(s) - h(s)| ds \\
&\leq \|h_n - h\|_1;
\end{aligned}$$

de plus on a

$$\begin{aligned}
\|H(h)\|_C &= \sup_{1\leq t\leq T} \Big| \int_0^t h(s)ds \Big| \\
&\leq \sup_{1\leq t\leq T} \int_0^t |\, h(s)|\, ds \\
&= \int_0^T |\, h(s)|\, ds = \|h\|_1 \ ,
\end{aligned}$$

comme $h \in L^1(I, \mathbb{R}^N)$, alors $H(h)$ est borné dans $C(I, \mathbb{R}^N)$.
On définit $\Phi^{-1} : C(I, \mathbb{R}^N) \to C(I, \mathbb{R}^N)$ par $\Phi^{-1}(v)(t) = \phi^{-1}(v(t)),\ t \in I$. Alors Φ^{-1} est continue et envoie les ensembles bornés de $C(I, \mathbb{R}^N)$ en ensembles bornés dans $C(I, \mathbb{R}^N)$.
En effet, soit $\{v_n\}_{n\geq 1}$ une suite qui converge vers $v \in C(I, \mathbb{R}^N)$, alors

$$\begin{aligned}
v_n \to v &\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0, \|\ v_n - v\ \|_C < \varepsilon \\
&\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0, |v_n(t) - v(t)| < \varepsilon, \forall\, t \in I
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

donc $v_n(t) \to v(t)$ pour tout $t \in I$, et comme ϕ^{-1} est continue, alors $\{\phi^{-1}(v_n(t))\}_{n\geq 1}$ converge vers $\phi^{-1}(v(t))$ pour tout $t \in I$. Il reste à montrer que cette convergence est uniforme.
Comme $v_n \to v$ dans $C(I, \mathbb{R}^N)$, alors $\{v_n\}_{n\geq 1}$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $\|v_n\|_C \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $M > 0$ tel que $|v_n(t)| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in I$. D'où l'ensemble $B = \{v_n(t),\ v(t),\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } t \in I\}$ est borné dans $\mathbb{R}^N$, donc relativement compact. Puisque ϕ^{-1} est continue, par le théorème de Heine, ϕ^{-1} est uniformément continue sur $\overline{B}$. Donc

$$\forall\, \varepsilon' > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, t \in I, \Big(|v_n(t) - v(t)| < \delta \Rightarrow |\phi^{-1}(v_n(t)) - \phi^{-1}(v(t))| < \frac{\varepsilon'}{2}\Big).$$

Pour $\varepsilon = \delta$ dans (2.2.2), on obtient

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0, \big(|v_n(t) - v(t)| < \delta,\ \forall\, t \in I\big) \Rightarrow \Big(|\phi^{-1}(v_n(t)) - \phi^{-1}(v(t))| < \frac{\varepsilon'}{2}\ ,\ \forall\, t \in I\Big).$$

Donc $\|\Phi^{-1}(v_n) - \Phi^{-1}(v)\|_C < \varepsilon'$. D'où $\Phi^{-1}(v_n) \to \Phi^{-1}(v)$ dans $C(I, \mathbb{R}^N)$. C'est à dire Φ^{-1} est continue.

D'autre part, soit $A \subset C(I, \mathbb{R}^N)$ un ensemble borné, donc

$$\exists\, M > 0, \forall\, v \in A,\ \|v\|_C \le M\,. \tag{2.2.3}$$

Montrons que $\Phi^{-1}(A)$ est borné, c'est à dire

$$\exists\ M' > 0, \forall\, v \in A,\ \|\Phi^{-1}(v)\|_C \le M'\,.$$

Par (H_2), on a

$$\langle \phi^{-1}(x), x\rangle \ge \alpha(|\phi^{-1}(x)|)\, |\phi^{-1}(x)|\,,$$

par l'inégalité de Cauchy Schwartz, on aura

$$\alpha(|\phi^{-1}(x)|)\, |\phi^{-1}(x)| \le |\phi^{-1}(x)|\, |x| \quad \text{donc} \quad \alpha(|\phi^{-1}(x)|) \le |x|\,.$$

D'après (2.2.3)

$$\begin{aligned} \forall\, v \in A,\ \|v\|_C \le M \quad &\Rightarrow \quad |v(t)| \le M,\ \forall\, t \in I \\ &\Rightarrow \quad \alpha(|\phi^{-1}(v(t))| \le M,\ \forall\, t \in I\,. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

On a

$$\begin{aligned} \big(s \to +\infty \Rightarrow \alpha(s) \to +\infty\big) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, m > 0, \exists\, M' > 0, \forall\, s \in \mathbb{R}_+, s > M' \Rightarrow \alpha(s) > m \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, m > 0, \exists\, M' > 0, \forall\, s \in \mathbb{R}_+, \alpha(s) \le m \Rightarrow s \le M'\,, \end{aligned}$$

et donc, de (2.2.4), il existe $M' > 0$ tel que pour tout $v \in A$ et tout $t \in I$ on a $|\phi^{-1}(v(t))| \le M'$; d'où $\|\Phi^{-1}(v)\|_C \le M'$. Donc $\Phi^{-1}(A)$ est bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$.

Lemme 2.2.1. *Pour tout $h \in L^1(I, \mathbb{R}^N)$, (2.2.1) admet une solution unique donnée par, pour tout $t \in I$*

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(h)) + H(h)(s)\Big) ds := K_D(h)(t).$$

Démonstration

En intégrant (2.2.1) de 0 à t, on obtient

$$\int_0^t (\phi(u'(s)))' ds = \int_0^t h(s) ds,$$

cela implique

$$\phi(u'(t)) = \phi(u'(0)) + \int_0^t h(s)ds = a + H(h)(t),$$

où $a = \phi(u'(0))$. Donc

$$\phi(u'(s)) = a + H(h)(t), \tag{2.2.5}$$

et puisque ϕ est un homéomorphisme, alors (2.2.5) est équivalente à

$$u'(t) = \phi^{-1}(a + H(h)(t)).$$

Par conséquent

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}(a + H(h)(s))ds + u(0),$$

on a $u(0) = 0$, donc

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}(a + H(h)(s))ds. \tag{2.2.6}$$

D'après la condition $u(T) = 0$, l'équation (2.2.6) devient

$$\int_0^T \phi^{-1}(a + H(h)(s))ds = 0 \iff \frac{1}{T}\int_0^T \phi^{-1}(a + H(h)(s))ds = 0, \tag{2.2.7}$$

de la Proposition 2.1.1, l'équation (2.2.7) admet une solution unique $Q_\phi(H(h))$, avec $Q_\phi \circ H : L^1(I, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ est continue (car Q_ϕ et H sont continus) et envoie les ensembles bornés de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$ en ensembles bornés de $\mathbb{R}^N$. En effet, Q_ϕ envoie les ensembles bornés de $C(I, \mathbb{R}^N)$ en ensembles bornés de $\mathbb{R}^N$ et H est continu et borné de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$ dans $C(I, \mathbb{R}^N)$, alors l'image des ensembles bornés de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$ par $Q_\phi \circ H$ sont des ensembles bornés de $\mathbb{R}^N$.
Donc, l'équation (2.2.1) admet une solution unique

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(h)) + H(h)(s)\Big)ds\,.$$

■

Lemme 2.2.2. *L'opérateur K_D est continu et envoie les ensembles equi-intégrables de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$ en ensembles relativement compacts de C_0^1.*

Démonstration
On a, pour tout $t \in I$, $K_D(h)(t) = \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(h)) + H(h)(s)\Big)ds.$
Soit $\hat{a} : L^1(I, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ une application définie par $\hat{a}(h) = Q_\phi(H(h))$, $\hat{a}$ est continue et

envoie les ensembles bornés de $L^1(I,\mathbb{R}^N)$ en ensembles bornés de $\mathbb{R}^N$ (Voir Lemme 2.2.1), c'est à dire, ces ensembles sont relativement compacts, donc $\hat{a}$ est compacte. Alors K_D est continu puisque il est une composition d'opérateurs continus.
De plus, $\big(K_D(h)\big)'(t)=\phi^{-1}(\hat{a}(h)+H(h)(t))$ est aussi une composition d'opérateurs continus, donc il est continu.
Soit E un ensemble équi-intégrable dans $L^1(I,\mathbb{R}^N)$, alors il existe $\gamma\in L^1(I,\mathbb{R}_+)$ telle que, pour tout $h\in E$

$$|h(t)|\le\gamma(t)\quad \text{p.p sur } I. \tag{2.2.8}$$

On va montrer que $K_D(E)\subset C_0^1$ est un ensemble relativement compact, pour cela, il suffit de montrer que si $\{v_n\}_{n\ge1}$ est une suite de $K_D(E)$, alors elle admet une sous suite convergente dans C_0^1. Soit $\{h_n\}_{n\ge1}$ une suite dans E telle que $v_n=K_D(h_n)$. Pour $t\in I$, on a

$$\begin{aligned}\big|H(h_n)(t)\big| &= \Big|\int_0^t h_n(s)ds\Big|\\ &\le \int_0^t \big|h_n(s)\big|ds\\ &\le \int_0^t \gamma(s)ds. \end{aligned}\tag{2.2.9}$$

En posant $\eta(t)=\int_0^t\gamma(s)ds$, on aura $\eta\in L^1(I,\mathbb{R}_+)$ et $\big|H(h_n)(t)\big|\le\eta(t)$, pour tout $t\in I$. De plus, de (2.2.9)

$$\big|H(h_n)(t)\big|\le\int_0^t\gamma(s)ds\le\|\gamma\|_1\,,$$

donc, pour tout $t\in I$, $\{H(h_n)(t)\}_{n\ge1}$ est bornée dans $\mathbb{R}^N$, alors relativement compacte.
Donc, par le Théorème 1.8.4, il existe une sous suite de $\{H(h_n)\}_{n\ge1}$, qu'on lui garde la même notation, qui converge uniformément vers une application absolument continue $\zeta: I\to\mathbb{R}^N$.
Mais $\hat{a}$ est compacte, donc $\{\hat{a}(h_n)\}_{n\ge1}$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^N$, par extraction d'une sous suite, $\{\hat{a}(h_n)\}_{n\ge1}$ est convergente dans $\mathbb{R}^N$.
En utilisant la continuité de $\Phi^{-1}: C(I,\mathbb{R}^N)\to C(I,\mathbb{R}^N)$, il suite de la définition de $(K_D(h_n))'$ que la suite $\{(K_D(h_n))'\}_{n\ge1}$ est convergente dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, donc elle est bornée dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, par conséquent, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $\{K_D(h_n)\}_{n\ge1}$ est convergente dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, alors la suite $\{v_n\}_{n\ge1}$ admet une sous suite convergente dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, donc $K_D(E)$ est relativement compact dans $C^1(I,\mathbb{R}^N)$, et comme K_D est la solution de (2.2.1), alors $K_D(E)$ est relativement compact dans C_0^1.

En effet, on a que $\{(K_D(h_n))\}_{n\geq 1}$ converge uniformément vers ζ, donc elle converge simplement, alors

$$\zeta(0) = \lim_{n\to+\infty} K_D(h_n)(0) = 0 \quad \text{et} \quad \zeta(T) = \lim_{n\to+\infty} K_D(h_n)(T) = 0\,.$$

■

2.2.2 Cas Neumann

Considérons le problème non-homogène avec les conditions aux limites de Neumann suivant :

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = h(t), \quad \text{p.p sur } I, \\ u'(0) = u'(T) = 0, \end{cases} \tag{2.2.10}$$

où $h \in L^1(I, \mathbb{R}^N)$. On définit la projection $P : C(I, \mathbb{R}^N) \to C(I, \mathbb{R}^N)$ par $Pu(t) = u(0)$, pour tout $t \in I$, (l'application constante), et la condition nécessaire pour trouver la solution de (2.2.10) est

$$\int_0^T h(s)ds = 0\,, \tag{2.2.11}$$

obtenue par l'intégration de (2.2.10) sur I en utilisant les conditions aux limites. En effet, on a

$$(\phi(u'(t)))' = h(t) \Longleftrightarrow \int_0^T h(s)ds = \int_0^T (\phi(u'(s)))'ds = \phi(u'(s))\Big]_0^T = \phi(0) - \phi(0) = 0,$$

car $u'(0) = u'(T) = 0$.

Lemme 2.2.3. *Pour tout $h \in L^1(I, \mathbb{R}^N)$ vérifiant* (2.2.11)*, la solution de* (2.2.10) *est donnée par, pour tout $t \in I$*

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \phi^{-1}(\phi(0) + H(h)(s))ds := Pu(t) + K_N(h)(t).$$

Démonstration

En intégrant (2.2.10) sur $[0, t]$, $(t \in I)$ on obtient

$$\phi(u'(t)) - \phi(u'(0)) = \int_0^t h(s)ds\,,$$

et comme $u'(0) = 0$, on trouve $\phi(u'(t)) = \phi(0) + H(h)(t)$, par conséquent

$$u'(t) = \phi^{-1}(\phi(0) + H(h)(t)),$$

en suite, en intégrant sur $[0,t]$ on aura

$$\begin{aligned} u(t) &= u(0) + \int_0^t \phi^{-1}(\phi(0) + H(h)(s))ds \\ &= Pu(t) + \int_0^t \phi^{-1}(\phi(0) + H(h)(s))ds\,. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.1. *Si on suppose que $\phi(0) = 0$, alors la solution de* (2.2.10) *devient*

$$u = Pu + H \circ \Phi^{-1} \circ H(h).$$

Lemme 2.2.4. *L'opérateur K_N est continu et envoie les ensembles équi-intégrables de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$ en ensembles relativement compacts de C^1_N.*

Démonstration

On a, pour tout $t \in I$

$$K_N(h)(t) = \int_0^t \phi^{-1}(\phi(0) + H(h)(s))ds.$$

Alors, la continuité de K_N découle de la continuité des opérateurs H et ϕ^{-1}. De plus, $(K_N(h))'(t) = \phi^{-1}(\phi(0) + H(h)(t))$ est aussi une composition d'opérateurs continus, donc il est continu.

Soit E un ensemble équi-intégrable de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$, alors (2.2.8) est vérifiée. Montrons que $K_N(E) \subset C^1_N$ est un ensemble relativement compact, pour cela, il suffit de montrer que si $\{v_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de $K_N(E)$, alors elle admet une sous suite convergente dans C^1_N. Soit $\{h_n\}_{n\geq 1}$ une suite dans E telle que $v_n = K_N(h_n)$. Pour $t, t' \in I$ $(t' < t)$, on a

$$\begin{aligned} \big|H(h_n)(t) - H(h_n)(t')\big| &= \Big|\int_0^t h_n(s)ds - \int_0^{t'} h_n(s)ds\Big| \\ &= \Big|\int_{t'}^t h_n(s)ds\Big| \\ &\leq \int_{t'}^t |h_n(s)|ds \leq \int_{t'}^t \gamma(s)ds;\ \forall n \geq 1\,. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in I$, on a

$$\big|H(h_n)(t)\big| \leq \int_0^t |\,h_n(s)|ds \leq \int_0^t \gamma(s)ds \leq \|\gamma\|_1\,.$$

Par conséquent, la suite $\{H(h_n)\}_{n\geq 1}$ est uniformément bornée et équicontinue. D'après le Corollaire 1.8.5, il existe une sous suite de $\{H(h_n)\}_{n\geq 1}$, qu'on lui garde la même notation, qui converge dans $C(I,\mathbb{R}^N)$.

En utilisant la continuité de $\phi^{-1}:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$, il suite de la définition de $(K_N(h_n))'$ que la suite $\{(K_N(h_n))'\}_{n\geq 1}$ est convergente dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, donc elle est bornée dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, par conséquent, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $\{K_N(h_n)\}_{n\geq 1}$ est convergente dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, alors la suite $\{v_n\}_{n\geq 1}$ admet une sous suite convergente dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, donc $K_N(E)$ est relativement compact dans $C^1(I,\mathbb{R}^N)$, et comme $K_N=u-Pu$ est la solution de (2.2.10), alors $K_N(E)$ est relativement compact dans C^1_N.

En effet, on a $\{(K_N(h_n))'\}_{n\geq 1}$ est convergente dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, soit ζ sa limite, donc

$$\zeta(0)=\lim_{n\to+\infty}(K_N(h_n))'(0)=0 \quad \text{et} \quad \zeta(T)=\lim_{n\to+\infty}(K_N(h_n))'(T)=0\,.$$

■

2.2.3 Cas périodique

Considérons le problème non-homogène avec les conditions aux limites périodique suivant :

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))'=h(t), & \text{p.p sur } I,\\ u(0)=u(T), \quad u'(0)=u'(T), \end{cases} \tag{2.2.12}$$

où $h\in L^1(I,\mathbb{R}^N)$ vérifie la même condition nécessaire que dans le cas de Neumann, c'est à dire

$$\int_0^T h(s)ds=0\ , \tag{2.2.13}$$

qu'est aussi obtenue par l'intégration de (2.2.12) sur I en utilisant les conditions aux limites. En effet, on a

$$(\phi(u'(t)))'=h(t)\Leftrightarrow\int_0^T h(s)ds=\int_0^T(\phi(u'(s)))'ds=\phi(u'(s))\Big]_0^T=\phi(u'(T)))-\phi(u'(0))=0,$$

car $u'(0)=u'(T)$.

Lemme 2.2.5. *Pour tout $h\in L^1(I,\mathbb{R}^N)$, la solution de (2.2.12) est donnée par, pour tout $t\in I$*

$$u(t)=u(0)+\int_0^t\phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(h))+H(h)(s)\Big)ds:=Pu(t)+K_P(h)(t).$$

Démonstration

On intègre (2.2.12) de 0 à $t \in I$, on obtient

$$\phi(u'(t)) = \phi(u'(0)) + H(h)(t).$$

En posant $a = \phi(u'(0))$, on trouve $u'(t) = \phi^{-1}(a + H(h)(t))$. En intégrant sur I, on aura

$$
\begin{aligned}
\int_0^T u'(t)dt = \int_0^T \phi^{-1}(a + H(h)(t))dt \iff u(T) - u(0) &= \int_0^T \phi^{-1}(a + H(h)(t))dt \\
\iff \int_0^T \phi^{-1}(a + H(h)(t))dt &= 0 \qquad (\text{car } u(T) = u(0)) \\
\iff \frac{1}{T}\int_0^T \phi^{-1}(a + H(h)(t))dt &= 0. \qquad (2.2.14)
\end{aligned}
$$

D'après la Proposition 2.1.1, l'équation (2.2.14) admet une solution unique $\hat{a}(h) = Q_\phi(H(h))$, alors

$$
u'(t) = \phi^{-1}(Q_\phi(H(h)) + H(h)(t)) \Longrightarrow u(t) = \int_0^t \phi^{-1}(Q_\phi(H(h)) + H(h)(s))ds,
$$

donc la solution de (2.2.12) est

$$
\begin{aligned}
u(t) &= u(0) + \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(h)) + H(h)(s)\Big)ds \\
&= Pu(t) + \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(h)) + H(h)(s)\Big)ds\,.
\end{aligned}
$$

■

Lemme 2.2.6. *L'opérateur K_P est continu et envoie les ensembles équi-intégrables de $L^1(I,\mathbb{R}^N)$ en ensembles relativement compacts de C^1_T.*

Démonstration

On a, pour tout $t \in I$,

$$
K_P(h)(t) = \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(h)) + H(h)(s)\Big)ds\,. \qquad (2.2.15)
$$

Soit l'application $F : L^1(I,\mathbb{R}^N) \to L^1(I,\mathbb{R}^N)$ définie par $F(h)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T h(s)ds$, pour tout $t \in I$.

Si $u \in C^1_T$ est une solution de (2.2.12), alors u vérifie l'équation

$$
u(t) = Pu(t) + F(h)(t) + K(h)(t)\,,
$$

avec $K(h)(t) = \int\limits_0^t \Big(\phi^{-1}[\hat{a}((Id-F)h) + H((Id-F)h)(s)]\Big)ds$. En effet, d'après (2.2.13), si u est une solution de (2.2.12) alors $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int\limits_0^T h(s)ds = 0$, donc

$$\begin{aligned}
Pu(t)+F(h)(t)+K(h)(t) &= Pu(t)+F(h)(t)+\int\limits_0^t \Big(\phi^{-1}[\hat{a}((Id-F)h)+H((Id-F)h)(s)]\Big)ds \\
&= Pu(t)+\int\limits_0^t \phi^{-1}\big(\hat{a}(h)+H(h)(s)\big)ds \\
&= Pu(t)+\int\limits_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(h))+H(h)(s)\Big)ds = u(t)\,.
\end{aligned}$$

Montrons que K est continu et envoie les ensembles équi-intégrables de $L^1(I,\mathbb{R}^N)$ en ensembles relativement compacts de C_T^1.
La continuité de K découle de la continuité des opérateurs $H, \phi^{-1}, F(h)$ et $\hat{a}$. De plus, on a $(K(h))'(t) = \phi^{-1}\Big(\hat{a}((Id-F)h)+H((Id-F)h)(t)\Big)$ est aussi une composition d'opérateurs continus, donc il est continu.
Soit E un ensemble équi-intégrable de $L^1(I,\mathbb{R}^N)$, alors (2.2.8) est vérifiée. On va montrer que $K(E)\subset C_T^1$ est un ensemble relativement compact, pour cela, il suffit de montrer que si $\{v_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de $K(E)$, alors elle admet une sous suite convergente dans C_T^1. Soit $\{h_n\}_{n\geq 1}$ une suite dans E telle que $v_n = K(h_n)$. Pour $t,t'\in I$ ($t'<t$), on a

$$\begin{aligned}
& \big|H\big((Id-F)(h_n)\big)(t) - H\big((Id-F)(h_n)\big)(t')\big| \\
= \ & \big|H(h_n)(t) - H(F(h_n))(t) - H(h_n)(t') + H(F(h_n))(t')\big| \\
= \ & \Big|\int\limits_0^t h_n(s)\,ds - \int\limits_0^t F(h_n)(s)\,ds - \int\limits_0^{t'} h_n(s)\,ds - \int\limits_0^{t'} F(h_n)(s)ds\Big| \\
= \ & \Big|\int\limits_{t'}^t h_n(s)\,ds + \int\limits_{t'}^t F(h_n)(s)\,ds\Big| \\
\leq \ & \Big|\int\limits_{t'}^t h_n(s)\,ds\Big| + \Big|\int\limits_{t'}^t F(h_n)(s)\,ds\Big| \\
\leq \ & \Big|\int\limits_{t'}^t h_n(s)\,ds\Big| + |F(h_n)(t)|\,|t-t'|\ ,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\big|H\big((Id-F)(h_n)\big)(t)-H\big((Id-F)(h_n)\big)(t')\big| \\
\le\ & \int_{t'}^{t} |\, h_n(s)\,| ds + \frac{1}{T}\int_0^T |h_n(s)| ds\, |t-t'| \\
\le\ & \int_{t'}^{t} \gamma(s) ds + \frac{|t-t'|}{T}\int_0^T \gamma(s) ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $\{H(Id-F)(h_n)\}_{n\geq 1}$ est uniformément bornée et équicontinue. D'après le Corollaire 1.8.5, il existe une sous suite de $\{H(Id-F)(h_n)\}_{n\geq 1}$, qu'on lui garde la même notation, qui converge dans $C(I,\mathbb{R}^N)$. D'autre part, comme $\{h_n\}_{n\geq 1}$ est bornée, on a $\{(Id-F)(h_n)\}_{n\geq 1}$ est bornée, mais $\hat{a}$ est compacte, donc $\{\hat{a}(Id-F)(h_n)\}_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^N$, par extraction d'une sous suite, $\{\hat{a}(Id-F)(h_n)\}_{n\geq 1}$ est convergente dans $\mathbb{R}^N$. D'où, de la continuité de Φ^{-1}, la suite $\{(K(h_n))'\}_{n\geq 1}$ est convergente dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, et comme H est continu, alors $\{K(h_n)\}_{n\geq 1}$ est convergente dans $C(I,\mathbb{R}^N)$. D'où $K(\xi)$ est relativement compact dans $C^1(I,\mathbb{R}^N)$.
On remarque que $K_P(h)(t) = F(h)(t) + K(h)(t)$, alors $K_P(E)$ est relativement compact de $C^1(I,\mathbb{R}^N)$. Comme $K_P(h)(t) = u(t) - Pu(t)$ est la solution de (2.2.12), donc $K_P(E)$ est relativement compact de C^1_T.
En effet, de (2.2.15), on a $(K_P(h))'(0) = \phi^{-1}(Q_\phi(H(h)) + H(h)(0))$, de plus, $H(h)(0) = 0$, alors

$$(K_P(h))'(0) = \phi^{-1}(Q_\phi(H(h))(0)) = u'(0) = u'(T)\,,$$

et $(K_P(h))'(T) = \phi^{-1}(Q_\phi(H(h)) + H(h))(T)$, de plus, $H(h)(T) = 0$, alors

$$(K_P(h))'(T) = \phi^{-1}(Q_\phi(H(h))(T)) = u'(T) = u'(0)\,.$$

D'où

$$(K_P(h))'(0) = (K_P(h))'(T).$$

Or, $K_P(h)(0) = u(0) - u(0) = 0 \quad$ et $\quad K_P(h)(T) = u(T) - u(0) = 0.$
D'où

$$K_P(h)(0) = K_P(h)(T).$$

■

Remarque 2.2.2. *Notons que, puisque* $Q_\phi(0) = \hat{a}(0)$*, nous avons, par la définition de* K *et de l'équation* (2.1.4), $K(0) = 0$.

2.3 Formulation points fixes pour les problèmes non-linéaires

Dans cette section, nous allons montrer que les solutions des problèmes non-linéaires avec les conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et périodiques sont les points fixes d'opérateurs non-linéaires compacts dans les espaces de fonctions appropriés.

Proposition 2.3.1. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application de Carathéodory vérifiant la condition* (2.0.2). *On note par $N_f : C^1(I, \mathbb{R}^N) \to L^1(I, \mathbb{R}^N)$ l'opérateur de* ***Nemytskii*** *associé à f défini par $N_f(u)(t) = f(t, u(t), u'(t))$. Alors N_f est continu et envoie les ensembles bornés de $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ en ensembles équi-intégrables de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$.*

Démenstration

Soit $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset C^1(I, \mathbb{R}^N)$ une suite convergente vers $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$, et montrons que $N_f(u_n) \to N_f(u)$ dans $L^1(I, \mathbb{R}^N)$, c'est à dire $\|N_f(u_n) - N_f(u)\|_1 \to 0$.
Comme $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge vers u dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$, alors elle est bornée, donc

$$\exists\, M > 0,\, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \|u_n\|_{C^1} \leq M \quad \text{ainsi que} \quad \|u\|_{C^1} \leq M\,,$$

et de la condition (2.0.2), il existe $\alpha_M \in L^1(I, \mathbb{R})$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in I$, on a

$$|f(t, u_n(t), u_n'(t))| \leq \alpha_M(t) \quad \text{et} \quad |f(t, u(t), u'(t))| \leq \alpha_M(t)\,,$$

donc, pour tout $t \in I$

$$|N_f(u_n)(t) - N_f(u)(t)| \leq 2\,\alpha_M(t)\,.$$

D'autre part, comme $f(t, \cdot, \cdot)$ est continue pour tout $t \in I$, alors $f(t, u_n(t), u_n'(t)) \to f(t, u(t), u'(t))$.
D'où, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on aura

$$\|N_f(u_n) - N_f(u)\|_1 \to 0.$$

Par suit $N_f(u)$ est continu dans $L^1(I, \mathbb{R}^N)$.
De plus, soit A un ensemble borné de $C^1(I, \mathbb{R}^N)$, alors il existe $M > 0$ telle que, pour tout $u \in A$, $\|u\|_{C^1} \leq M$. Montrons que $N_f(A)$ est équi-intégrable, c'est à dire, qu'il existe $\gamma \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que, pour tout $u \in A$, $|N_f(u)(t)| \leq \gamma(t)$ p.p sur I.
On sait que f est une fonction de Carathéodory et vérifie la condition (2.0.2), c'est à dire, il existe $\gamma = \alpha_M \in L^1(I, \mathbb{R})$, telle que $|f(t, u(t), u'(t))| \leq \gamma(t)$ sur I, donc on peut dire qu'elle vérifie cette condition p.p sur I, i.e.,

$$|N_f(u)(t)| = |f(t, u(t), u'(t))| \leq \gamma(t) \quad \text{p.p sur}\, I.$$

D'où $N_f(A)$ est équi-intégrable. ■

2.3.1 Cas Dirichlet

Considérons le problème de Dirichlet non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)), & \text{p.p sur } I, \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Théorème 2.3.2. *Le problème* (2.3.1) *est équivalent au problème de point fixe*

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(N_f(u))) + H(N_f(u))(s)\Big)ds := G_f^D(u)(t) \ ,$$

pour tout $t \in I$.

Démonstration

D'après le Lemme 2.2.1 on a

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)))) + H(f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)))(s)\Big)ds \,,$$

et comme $N_f(u)(t) = f(t, u(t), u'(t))$, alors

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(N_f(u))) + H(N_f(u))(s)\Big)ds \,.$$

■

Proposition 2.3.3.

1. *G_f^D est un opérateur compact sur C_0^1 dans lui même.*
2. *Si ϕ est impair et $f(t, -u, -v) = -f(t, u, v)$, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et $t \in I$, alors G_f^D est impair.*

Démonstration

1. D'après le Lemme 2.2.1, on remarque que, pour tout $u \in C_0^1$, $G_f^D(u) = K_D(N_f(u))$, c'est à dire, $G_f^D = K_D \circ N_f$. De la Proposition 2.3.1, N_f est un opérateur continu et borné de $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ dans $L^1(I, \mathbb{R}^N)$, et du Lemme 2.2.2, K_D est un opérateur compact de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$ dans C_0^1, donc G_f^D est compact de C_0^1 dans lui même.
2. On a ϕ est impair. De plus H et Q_ϕ sont aussi impairs (de la Proposition 2.1.2), d'autre part

$$N_f(-u)(t) = f(t, -u(t), -u'(t)) = -f(t, u(t), u'(t)) = -N_f(u)(t),$$

alors N_f est impair, par suite

$$\begin{aligned} G_f^D(-u)(t) &= \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(N_f(-u))) + H(N_f(-u)(s))\Big)ds \\ &= \int_0^t \phi^{-1}\Big(-Q_\phi(H(N_f(u))) - H(N_f(u)(s))\Big)ds \\ &= -\int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(N_f(u))) + H(N_f(u)(s))\Big)ds = -G_f^D(u)(t)\,, \end{aligned}$$

d'où, G_f^D est impair.

■

2.3.2 Cas Neumann

Considérons le problème de Neumann non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)), & \text{p.p sur } I, \\ u'(0) = u'(T) = 0. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Théorème 2.3.4. *Le problème* (2.3.2) *est équivalent au problème de point fixe*

$$u(t) = Pu(t) + F(N_f(u))(t) + \int_0^t \phi^{-1}\Big(\phi(0) + H[(Id - F)\circ N_f(u)](s)\Big)ds := G_f^N(u)(t)\ ,$$

pour tout $t \in I$.

Démonstration

Le problème (2.3.2) peut s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = (Id - F)\circ N_f(u)(t), & \text{p.p sur } I, \\ u'(0) = u'(T) = 0, \end{cases} \tag{2.3.3}$$

avec $F(N_f(u))(t) = 0$.

En appliquant le Lemme 2.2.3 sur le problème (2.3.3), on obtient

$$u(t) = Pu(t) + \int_0^t \phi^{-1}\Big(\phi(0) + H[(Id - F)\circ N_f(u)](s)\Big)ds, \quad \text{avec} \quad F(N_f(u))(t) = 0\,,$$

alors

$$u(t) = Pu(t) + F(N_f(u))(t) + \int_0^t \phi^{-1}\Big(\phi(0) + H[(Id - F)\circ N_f(u)](s)\Big)ds\ .$$

■

Si $\phi(0) = 0$, alors G_f^N prend la forme

$$Pu + [F + H \circ \Phi^{-1} \circ H(Id - F)] \circ N_f(u).$$

Proposition 2.3.5.

1. *G_f^N est un opérateur compact sur C_N^1 dans lui même.*
2. *Si ϕ est impair et $f(t, -u, -v) = -f(t, u, v)$, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et $t \in I$, alors G_f^N est impair.*

Démonstration

Similaire à la démonstration de la Proposition 2.3.3. ■

2.3.3 Cas périodique

Considérons le problème périodique non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)), \quad \text{p.p sur } I, \\ u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Théorème 2.3.6. *Le problème* (2.3.4) *est équivalent au problème de point fixe*

$$u(t) = Pu(t) + F(N_f(u))(t) + \int_0^t \phi^{-1}\Big((Id + Q_\phi) \circ H[(Id - F) \circ N_f(u)](s)\Big)ds := G_f^P(u)(t) \ ,$$

pour tout $t \in I$.

Démonstration

On peut réécrire le problème (2.3.4) comme suit

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = (Id - F) \circ N_f(u)(t), \quad \text{p.p sur } I, \\ u(0) = u(T), \ u'(0) = u'(T), \end{cases} \tag{2.3.5}$$

avec $F(N_f(u))(t) = 0$.

En appliquant le Lemme 2.2.5 sur le problème (2.3.5), on obtient

$$u(t) = Pu(t) + \int_0^t \phi^{-1}\Big(Q_\phi(H(Id - F) \circ N_f(u))) + H[(Id - F) \circ N_f(u)](s)\Big)ds, \quad \text{avec} \quad F(N_f(u))(t) = 0\,. \tag{2.3.6}$$

Alors, le problème (2.3.6) est équivalent a

$$u(t) = Pu(t) + F(N_f(u))(t) + \int_0^t \phi^{-1}\Big((Id + Q_\phi) \circ H[(Id - F) \circ N_f(u)](s)\Big)ds\,.$$

■

Proposition 2.3.7.

1. *G_f^P est un opérateur compact sur C_T^1 dans lui même.*
2. *Si ϕ est impair et $f(t,-u,-v) = -f(t,u,v)$, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et $t \in I$, alors G_f^P est impair.*

Démonstration

Similaire à la démonstration de la Proposition 2.3.3. ■

Théorème 2.3.8. *Le problème* (2.3.4) *est équivalent au problème du point fixe*

$$u = Pu + F(N_f(u)) + K(N_f(u)) := R_f^P(u) \ .$$

Démonstration

Conséquence directe de la démonstration du Lemme 2.2.6. ■

Proposition 2.3.9.

1. *R_f^P est un opérateur compact sur C_T^1 dans lui même.*
2. *Si ϕ est impair et $f(t,-u,-v) = -f(t,u,v)$, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et $t \in I$, alors R_f^P est impair.*

2.4 Applications : Résultats d'existence

Comme applications sur les résultats de la Section 2.3, on va donner deux résultats d'existence du solutions ; l'un dans le cas périodique et l'autre dans les trois cas : Dirichlet, Neumann et périodique.

Théorème 2.4.1. *Soit Ω un ouvert borné de C_T^1 telle que les conditions suivantes sont vérifiées.*

1. *$f : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant la condition* (2.0.2).
2. *Pour tout $\lambda \in]0,1[$, le problème*

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = \lambda f(t,u(t),u'(t)), & p.p \ sur \ I, \\ u(0) = u(T), \quad u'(T) = u'(0), \end{cases} \tag{2.4.1}$$

   n'a pas de solutions sur $\partial\Omega$.

3. *L'équation*

$$L(a) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t,a,0) = 0 \, ,$$

n'admet pas de solutions sur $\partial\Omega \cap \mathbb{R}^N$, où

$$\partial\Omega \cap \mathbb{R}^N := \{a \in \mathbb{R}^N,\ u \equiv a \in \partial\Omega\}\ .$$

4. *Le degré de Brouwer*

$$deg(L, \Omega \cap \mathbb{R}^N, 0) \neq 0\,,$$

où $\Omega \cap \mathbb{R}^N := \{a \in \mathbb{R}^N,\ u \equiv a \in \Omega\}$.

Alors, le problème (2.3.4) *admet une solution sur $\overline{\Omega}$.*

Démonstration

Le problème (2.3.4) est intégré dans la famille des problèmes paramétrés par λ suivants

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = \lambda N_f(u)(t) + (1-\lambda)F(N_f(u))(t), & \text{p.p sur } I, \\ u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T), \end{cases} \tag{2.4.2}$$

où $N_f : C_T^1 \to L^1(I, \mathbb{R}^N)$ est l'opérateur de Nemytskii associé à f et $F(N_f(u))(t) = \frac{1}{T}\int_0^T N_f(u)(s)ds$ (F est définie dans la Section 2.2). Alors, pour tout $t \in I$

$$(\phi(u'(t)))' = \lambda f(t, u(t), u'(t)) + (1-\lambda)\Big[\frac{1}{T}\int_0^T f(s, (u(s), u'(s))ds\Big]\,, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T)\,.$$

Pour $\lambda \in]0,1]$, si u est la solution du problème (2.4.1) ou (2.4.2), alors on a nécessairement $\frac{1}{T}\int_0^T f(s, u(s), u'(s))ds = 0$. Il résulte que, pour tout $\lambda \in]0,1]$, les problèmes (2.4.1) et (2.4.2) admettent les mêmes solutions.

Soit l'opérateur $N : C_T^1 \times [0,1] \to L^1(I, \mathbb{R}^N)$ définit par

$$N(u, \lambda)(t) = \lambda N_f(u)(t) + (1-\lambda)F(N_f(u))(t)\,.$$

Comme f vérifie la condition (1), il suite que N est continu et envoie les ensembles borné de C_T^1 en ensembles équi-intégrables de $L^1(I, \mathbb{R}^N)$ (voir la Proposition 2.3.1).

De plus, du Théorème 2.3.8, la solution du problème (2.4.2) peut s'écrit sous la forme

$$u = R_f^P(u, \lambda)\,, \tag{2.4.3}$$

telle que

$$\begin{aligned} R_f^P(u, \lambda) &= Pu + F(N_f(u)) + \Big(K \circ (\lambda N_f + (1-\lambda)F \circ N_f)\Big)(u) \\ &= Pu + F(N_f(u)) + \Big(K \circ (\lambda(Id + F) \circ N_f)\Big)(u)\,. \end{aligned}$$

On suppose que, pour $\lambda = 1$, (2.4.3) n'admet pas de solutions sur $\partial\Omega$, car sinon nous aurons fini la preuve. Maintenant, par l'hypothèse (2), il suite que (2.4.3) n'a pas de solutions pour $(u, \lambda) \in \partial\Omega \times]0, 1]$.
Pour $\lambda = 0$, (2.4.2) est équivalente au problème suivant

$$(\phi(u'(t)))' = \frac{1}{T}\int_0^T f(s, u(s), u'(s))ds\,, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T)\,,$$

et donc, si u est une solution de ce problème, alors on doit avoir

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(s, u(s), u'(s))ds = 0\,, \tag{2.4.4}$$

ce qui implique

$$\phi(u'(t)) = c \quad \text{donc} \quad u'(t) = \phi^{-1}(c)\,, \quad \text{avec } c = cte \in \mathbb{R}^N\,. \tag{2.4.5}$$

En intégrant l'équation (2.4.5) sur I, on obtient

$$u(T) - u(0) = \int_0^T \phi^{-1}(c)dt = T\phi^{-1}(c)\,,$$

alors, $\phi^{-1}(c) = 0$. D'où $u'(t) = 0$, par suite $u(t) = d$ un constante de $\mathbb{R}^N$. Par conséquent, de (2.4.4), $\int_0^T f(s, d, 0)ds = 0$, qui implique, avec l'hypothèse (3), que $u \notin \partial\Omega$.
D'où, le problème (2.4.3) n'a pas de solutions sur $\partial\Omega \times [0, 1]$.
D'autre part, $R_f^p(\cdot, \lambda)$ est compact et $0 \notin (Id - R_f^P(\cdot, \lambda))(\partial\Omega)$, car sinon, il existe $u \in \partial\Omega$ tel que $0 = (Id - R_f^P(\cdot, \lambda))(u)$, donc $0 = u - R_f^P(u, \lambda)$. D'où $u = R_f^P(u, \lambda)$, c'est à dire $R_f^P(\cdot, \lambda)$ admet un point fixe sur $\partial\Omega$, qu'est contradiction avec la supposition. Donc le degré de Leray-Schauder $d_{SL}(Id - R_f^P(\cdot, \lambda), \Omega, 0)$ est bien défini d'après de Théorème 1.9.6, et par (iv) du même théorème, on a

$$d_{SL}(Id - R_f^P(\cdot, 1), \Omega, 0) = d_{SL}(Id - R_f^P(\cdot, 0), \Omega, 0)\,. \tag{2.4.6}$$

Maintenant, il est clair que le problème

$$u = R_f^P(u, 1)\,, \tag{2.4.7}$$

est équivalent au problème (2.3.4). Donc par (2.4.6) et le Théorème 1.9.6 (ii), pour montrer que le problème (2.4.7) admet une solution, il suffit de montrer que

$$d_{LS}(Id - R_f^P(\cdot, 0), \Omega, 0) \neq 0\ .$$

Par la Remarque 2.2.2, on a

$$\begin{aligned} R_f^P(u,0) &= Pu + F(N_f(u)) + K(0) \\ &= Pu + F(N_f(u)) \ . \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in I$, on obtient

$$u(t) - R_f^P(u,0)(t) = u(t) - P(u)(t) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,u(s),u'(s))\,ds\,,$$

alors, par le Théorème 1.9.7 et la Définition 1.9.3, nous avons

$$d_{LS}(Id - R_f^P(\cdot,0),\Omega,0) = (-1)^N deg(L,\Omega\cap\mathbb{R}^N,0) \neq 0\ .$$

où L est définie dans l'hypothèse (3). D'où $G(u,1) = u$ admet une solution dans $\Omega \subset \overline{\Omega}$. ■

Théorème 2.4.2. *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} (J(u'(t)))' = h(u(t),u'(t)) + e(t,u(t),u'(t)), \quad p.p\ sur\ I, \\ L(u(0),u(T),u'(0),u'(T)) = 0, \end{cases} \tag{2.4.8}$$

où $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une application continue, $e : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une application de Carathéodory vérifiant la condition (2.0.2) *et $L(u(0),u(T),u'(0),u'(T)) = 0$ note les conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et périodique sur I.*
Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées

1. *$h(ku,kv) = k^{p-1}h(u,v)$, pour tout $k > 0$ et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.*
2. *$h(-u,-v) = -h(u,v)$, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, c'est à dire h est impair.*
3. *$\lim_{|u|+|v|\to+\infty} \frac{e(t,u,v)}{(|u|+|v|)^{p-1}} = 0$, uniformément sur I.*
4. *Le problème*
$$\begin{cases} (J(y'(t)))' = h(y(t),y'(t)), \quad p.p\ sur\ I, \\ L(y(0),y(T),y'(0),y'(T)) = 0, \end{cases}$$
admet une seule solution trivial qu'est $y = 0$.

Donc le problème (2.4.8) *admet au moins une solution.*

Démonstration

Considérons l'homotopie suivant :

$$\begin{cases} (J(u'(t)))' = h(u(t),u'(t)) + \lambda e(t,u(t),u'(t)), \quad \text{p.p sur } I, \quad \lambda \in [0,1], \\ L(u(0),u(T),u'(0),u'(T)) = 0, \end{cases} \tag{2.4.9}$$

et montrons qu'il existe un $R > 0$ telle que, pour tout $\lambda \in [0,1]$ et pour toute solution possible u de (2.4.9), on a

$$\|u\|_{C^1} < R\,.$$

Dans ce cas, on prend $\Omega = B_{C^1}(0,R)$ la boule ouverte de $C^1(I,\mathbb{R}^N)$ et $G(\cdot,\lambda) : C^1(I,\mathbb{R}^N) \to C^1(I,\mathbb{R}^N)$ est l'opérateur du point fixe associé aux conditions aux limites du problème (2.4.9), qu'on a déjà vue dans la section 2.3. $G(\cdot,\lambda)$ est compact sur $B_{C^1}(0,R)$ et on a $0 \notin (Id - G(\cdot,\lambda))(S_{C^1}(0,R))$, c'est à dire, pour tout $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$ tel que $\|u\|_{C^1} = R$, $u \neq G(u,\lambda)$ car toute solution u vérifie $\|u\|_{C^1} < R$, alors le degré de Leray-Schauder $d_{LS}(Id - G(\cdot,\lambda), B_{C^1}(0,R), 0)$ est bien défini et indépendant de λ d'après le Théorème 1.9.6 (iv) .

Comme $G(\cdot,\lambda)$ est impair, par le théorème de Borsuk-Ulam (Théorème 1.9.10), on a

$$d_{LS}(Id - G(\cdot,0), B_{C^1}(0,R), 0) \equiv 1\,[2] \neq 0,$$

d'autre part, par (iv) du Théorème 1.9.6, on a

$$d_{LS}(Id - G(\cdot,1), B_{C^1}(0,R), 0) = d_{LS}(Id - G(\cdot,0), B_{C^1}(0,R), 0),$$

alors, de (ii) du même théorème, $G(u,1) = u$ admet une solution dans $B_{C^1}(0,R)$.

Si on suppose le contraire, c'est à dire, pour tout $R > 0$, il existe $\lambda \in [0,1]$ et il existe $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$ une solution de (2.4.9) telle que $\|u\|_{C^1} \geq R$. Alors on peut trouver une suite $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ de $[0,1]$ et une suite $\{u_n\}_{n\geq 1}$ de solutions de (2.4.9) avec $\lambda = \lambda_n$ telles que $\|u_n\|_{C^1} \to +\infty$. Si nous mettons

$$y_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{C^1}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

alors, pour tout $n = 1, 2, \cdots$

$$(J(y_n'(t)))' = h(y_n(t), y_n'(t)) + \lambda_n \frac{e(t, \|u_n\|_{C^1} y_n(t), \|u_n\|_{C^1} y_n'(t))}{\|u_n\|_{C^1}^{p-1}}\,, \quad L(y_n(0), y_n(T), y'(0), y'(T)) = 0\,. \tag{2.4.10}$$

En effet, pour tout $n \geq 1$ on a, $u_n = \|u_n\|_{C^1}\, y_n$ et $\lambda = \lambda_n$, donc

$$\big(J(\|u_n\|_{C^1}\, y_n'(t))\big)' = h(\|u_n\|_{C^1}\, y_n(t), \|u_n\|_{C^1}\, y_n'(t)) + \lambda_n e(t, \|u_n\|_{C^1}\, y_n(t), \|u_n\|_{C^1}\, y_n'(t))\,.$$

On a J est l'opérateur p-Laplacien et de la condition (1)

$$\|u_n\|_{C^1}^{p-1} (J(y_n'(t)))' = \|u_n\|_{C^1}^{p-1} h(y_n(t), y_n'(t)) + \lambda_n e(t, \|u_n\|_{C^1}\, y_n(t), \|u_n\|_{C^1}\, y_n'(t)),$$

alors

$$(J(y_n'(t)))' = h(y_n(t), y_n'(t)) + \lambda_n \frac{e(t, \|u_n\|_{C^1} y_n(t), \|u_n\|_{C^1} y_n'(t))}{\|u_n\|_{C^1}^{p-1}}\,.$$

Comme $\|y_n\|_{C^1} = \frac{\|u_n\|_{C^1}}{\|u_n\|_{C^1}} = 1$, pour tout $n \geq 1$, la suite $\{y_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ et par l'injection compact $C^1(I, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow C(I, \mathbb{R}^N)$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ est relativement compact dans $C(I, \mathbb{R}^N)$, d'où on peut lui extraire une sous suite, qu'on lui garde la même notation, qui converge dans $C(I, \mathbb{R}^N)$ vers $y \in C(I, \mathbb{R}^N)$, qui vérifie, respectivement, dans le cas de Dirichlet et périodique, les conditions aux limites

$$y(0) = 0, \quad y(T) = 0\,; \quad y(0) = y(T).$$

Posons $z_n(t) = J(y_n'(t))$, il est claire que $\{z_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$, car on a, pour tout $t \in I$

$$|z_n(t)| = |\,|y_n'(t)|^{p-2} y_n'(t)| = |y_n'(t)|^{p-1}\,, \quad \text{alors} \quad \|z_n\|_C = \|y_n'\|_C^{p-1}\,,$$

et comme $\{y_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$, donc $\{y_n\}_{n\geq 1}$ et $\{y_n'\}_{n\geq 1}$ sont bornées dans $C(I, \mathbb{R}^N)$. D'où $\{z_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$.
Il découle de (2.4.10) et de la condition (3), que $\{z_n'\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$. Donc $\{z_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$, d'où relativement compact dans $C(I, \mathbb{R}^N)$. Alors, par extraction d'une sous suite, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ converge dans $C(I, \mathbb{R}^N)$ vers $z \in C(I, \mathbb{R}^N)$, qui vérifie, dans la cas de Neumann et périodique, les conditions aux limites suivantes

$$z(0) = 0,\ z(T) = 0\,;\ z(0) = z(T).$$

Notons que $\{y_n'\}_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $J_q(z)$, où J_q est l'opérateur q-Laplacien. En effet, on a

$$z_n(t) = |y_n'(t)|^{p-2} y_n'(t)\,. \tag{2.4.11}$$

Alors

$$|z_n(t)| = |y_n'(t)|^{p-1} \quad \text{qui implique} \quad |y_n'(t)| = |z_n(t)|^{\frac{1}{p-1}}\,,$$

donc $|y_n'(t)|^{p-2} = |z_n(t)|^{\frac{p-2}{p-1}}$. En le remplaçant dans (2.4.11), on aura

$$y_n'(t) = |z_n(t)|^{\frac{-(p-2)}{p-1}} z_n(t) = |z_n(t)|^{q-2} z_n(t)\,,$$

car on a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ donc $q = \frac{p}{p-1}$, alors $q - 2 = \frac{p}{p-1} - 2 = \frac{p-2p+2}{p-1} = -\frac{p-2}{p-1}$.
D'où, la convergence uniforme de $\{z_n\}_{n\geq 1}$ implique la convergence uniforme de $\{y_n'\}_{n\geq 1}$. De plus

$$\|y\|_C + \|J_q(z)\|_C = 1\ . \tag{2.4.12}$$

En effet, on a $\|y_n\|_{C^1} = 1$ alors $\|y\|_{C^1} = 1$, donc $\|y\|_C + \|y'\|_C = 1$ d'où $\|y\|_C + \|J_q(z)\|_C = 1$. Maintenant, le problème (2.4.10) est équivalent à

$$\begin{cases} y_n'(t) = J_q(z_n(t))\,, \\ z_n'(t) = h(y_n(t), J_q(z_n(t))) + \lambda_n \dfrac{e(t, \|u_n\|_{C^1} y_n(t), \|u_n\|_{C^1} J_q(z_n(t)))}{\|u_n\|_{C^1}^{p-1}}\,, \\ m(y_n, z_n) = 0, \quad n = 1, 2 \cdots\,, \end{cases} \tag{2.4.13}$$

avec $m(y,z) = (y(0), y(T))$ note les conditions aux limites dans le cas de Dirichlet, $m(y,z) = (z(0), z(T))$ dans le cas de Neumann et $m(y,z) = (y(0) - y(T), y'(0) - y'(T))$ dans le cas périodique.

En utilisant les convergences précédentes sur (2.4.13), on obtient que (y,z) est la solution du problème

$$y'(t) = J_q(z(t)), \quad z'(t) = h(y(t), J_q(z(t))), \quad m(y,z) = 0.$$

En effet, on a

$$y_n' \longrightarrow J_q(z) \text{ uniformément et } J_q(z) \text{ est continue,}$$

et

$$z_n \longrightarrow z \text{ uniformément,}$$

de plus

$$y_n \longrightarrow y \text{ uniformément.}$$

Alors,

$$y'(t) = \lim_{n\to+\infty} y_n'(t) = \lim_{n\to+\infty} J_q(z_n(t)) = J_q(\lim_{n\to+\infty} z_n(t)) = J_q(z(t)),$$

et

$$z'(t) = \lim_{n\to+\infty} z_n'(t) = \lim_{n\to+\infty} h(y_n(t), J_q(z_n(t))) + \lim_{n\to+\infty} \lambda_n \frac{e(t, \|u_n\|_{C^1} y_n(t), \|u_n\|_{C^1} J_q(z_n(t)))}{\|u_n\|_{C^1}^{p-1}}.$$

Donc $z'(t) = h(y(t), J_q(z(t)))$. On obtient

$$\begin{cases} y'(t) = J_q(z(t))\,, \\ z'(t) = h(y(t), J_q(z(t)))\,, \\ m(y,z) = 0\,. \end{cases}$$

Par conséquent, y est la solution du problème

$$(J(y'(t)))' = h(y(t), y'(t)), \quad L(y(0), y(T), y'(0), y'(T)) = 0\,,$$

mais d'après la condition (4), ce problème admet une seule solution $y = 0$, donc $J_q(z) = 0$, cela implique $\|y\|_C + \|J_q(z)\|_C = 0$, contradiction avec (2.4.12). ∎

CHAPITRE 3

Problèmes non-linéaires pour des inclusions différentielles du second ordre

Dans ce chapitre, on va étudier des problèmes non-linéaires pour des inclusions différentielles du second ordre avec les conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et mixtes. Les inclusions différentielles sont définies par un opérateur différentiel non-linéaire, non nécessairement homogène qui satisfait certaines conditions, comme cas particulier, l'opérateur p-Laplacien.

Notre travail est concerne le problème suivant :

$$(\mathcal{P})\begin{cases} (\phi(u'(t)))' \in F(t,u(t),u'(t)) \quad \text{p.p sur } I=[0,T], \\ L(u(0),u(T),u'(0),u'(T))=0, \end{cases}$$

où $L(u(0),u(T),u'(0),u'(T))=0$ exprime les conditions aux limites de Dirichlet : $u(0)=u(T)=0$, de Neumann : $u'(0)=u'(T)=0$, ou de problème mixte : $u(0)=u'(T)=0$, et $F: I\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est une multiapplication, $\phi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ une fonction continue strictement monotone et $u\in C^1(I,\mathbb{R}^N)$ est la solution du problème $(\mathcal{P})$.

Dans cette étude, on va prouver l'existence de solutions dans le cas où F est à valeurs convexes, ainsi que dans le cas où elle est à valeurs non convexes.

3.1 Résultats auxiliaires

Afin de prouver l'existence de solution du problème $(\mathcal{P})$, nous commençons par considérer le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} -(\phi(u'(t)))' + |u(t)|^{p-2}u(t) = g(t) \quad \text{p.p sur } I, \\ L(u(0), u(T), u'(0), u'(T)) = 0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec $p \geq 2$ et $g \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$. Nous donnons quelques hypothèses sur la fonction ϕ.

$H(\phi)$. $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction telle que

(i) ϕ est continue et strictement monotone telle que $\phi(0) = 0$;

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ $\langle \phi(x), x \rangle \geq \beta |x|^p$ pour un certain $\beta > 0$.

$H(\phi)_1$. $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction telle que $H(\phi)$ est vérifiée et

(iii) il existe $c > 0$ tel que $|\phi(x)| \leq c(|x|^{p-1} + 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

$H(\phi)_2$. $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction telle que $H(\phi)$ est vérifiée et

(iv) il existe $\kappa : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\phi(x) = \kappa(x)x$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

$H(\phi)_3$. $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction telle que $H(\phi)_1$ et $H(\phi)_2(iv)$ sont vérifiées.

On donne un exemple d'un opérateur ϕ vérifiant les hypothèses $H(\phi), H(\phi)_1$ et $H(\phi)_2$.

Exemple 3.1.1. *Soit l'opérateur $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ défini par*

$$\phi(x) = \rho(|x|)|x|^{p-2}x, \quad \textit{pour } \ x \in \mathbb{R}^N,$$

avec $\rho : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue et strictement croissante telle que $\beta \leq \rho(r) \leq \beta'$, où β est le nombre donné dans notre hypothèse et β' est un autre nombre strictement positif et $p \geq 2$. Par exemple, si on prend

$$\rho(r) = \beta - \frac{1}{(1+r)^p},$$

alors, ρ est continue et strictement croissante, car

$$\rho'(r) = \frac{p\,(1+r)^{p-1}}{(1+r)^{2p}} = \frac{p}{(1+r)^{p+1}} > 0.$$

1. *On a ϕ est continue car ρ est continue, et elle est strictement monotone. En effet ; pour tous $x, y \in \mathbb{R}^N$ tels que $x \neq y$, on suppose que $|x| \leq |y|$, alors*

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x) - \phi(y), x - y \rangle \\ = & \ \Big\langle \rho(|x|)|x|^{p-2}x - \rho(|y|)|y|^{p-2}y, x - y \Big\rangle \\ = & \ \Big\langle \rho(|x|)|x|^{p-2}x - \rho(|x|)|y|^{p-2}y + \rho(|x|)|y|^{p-2}y - \rho(|y|)|y|^{p-2}y, x - y \Big\rangle \\ = & \ \rho(|x|)\Big\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \Big\rangle + \Big\langle \big(\rho(|x|) - \rho(|y|)\big)|y|^{p-2}y, x - y \Big\rangle, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\langle \phi(x) - \phi(y), x - y\rangle \\
\geq\ & \beta\Big\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y\Big\rangle + \big(\rho(|x|) - \rho(|y|)\big)\langle |y|^{p-2}y, x - y\rangle \\
=\ & \beta\Big\langle |x|^{p-2}x, x - y\Big\rangle - \beta\Big\langle |x|^{p-2}y, x - y\Big\rangle + \beta\Big\langle |x|^{p-2}y, x - y\Big\rangle - \beta\Big\langle |y|^{p-2}y, x - y\Big\rangle \\
+\ & \big(\rho(|x|) - \rho(|y|)\big)\langle |y|^{p-2}y, x - y\rangle \\
=\ & \beta|x|^{p-2}\langle x - y, x - y\rangle + \beta\big(|x|^{p-2} - |y|^{p-2}\big)\langle y, x - y\rangle + \big(\rho(|x|) - \rho(|y|)\big)\langle |y|^{p-2}y, x - y\rangle \\
=\ & \beta|x|^{p-2}|x - y|^2 + \Big[\beta\left(|x|^{p-2} - |y|^{p-2}\right) + \left(\rho(|x|) - \rho(|y|)\right)|y|^{p-2}\Big]\big(\langle y, x\rangle - |y|^2\big).
\end{aligned}$$

On a

$$\langle y, x\rangle = \frac{1}{2}\big(|x|^2 + |y|^2 - |y - x|^2\big),$$

donc

$$\begin{aligned}
&\langle \phi(x) - \phi(y), x - y\rangle \\
\geq\ & \beta|x|^{p-2}|x - y|^2 + \Big[\beta\left(|x|^{p-2} - |y|^{p-2}\right) + \left(\rho(|x|) - \rho(|y|)\right)|y|^{p-2}\Big]\frac{1}{2}\big(|x|^2 - |y|^2 - |x - y|^2\big) \\
=\ & \beta|x|^{p-2}|x - y|^2 + \frac{\beta}{2}\left(|x|^{p-2} - |y|^{p-2}\right)\left(|x|^2 - |y|^2 - |x - y|^2\right) \\
+\ & \frac{1}{2}|y|^{p-2}\left(\rho(|x|) - \rho(|y|)\right)\left(|x|^2 - |y|^2 - |x - y|^2\right) \\
=\ & \frac{\beta}{2}|x|^{p-2}|x - y|^2 + \frac{\beta}{2}\left(|x|^{p-2} - |y|^{p-2}\right)\left(|x|^2 - |y|^2\right) + \frac{\beta}{2}|y|^{p-2}|x - y|^2 \\
+\ & \frac{1}{2}|y|^{p-2}\left(\rho(|x|) - \rho(|y|)\right)\left(|x|^2 - |y|^2 - |x - y|^2\right) \\
=\ & \frac{\beta}{2}(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x - y|^2 + \frac{\beta}{2}\left(|x|^{p-2} - |y|^{p-2}\right)\left(|x|^2 - |y|^2\right) \\
+\ & \frac{1}{2}|y|^{p-2}\left(\rho(|y|) - \rho(|x|)\right)\left(|y|^2 - |x|^2 + |x - y|^2\right) > 0.
\end{aligned}$$

D'où

$$\langle \phi(x) - \phi(y), x - y\rangle > 0\,,$$

c'est à dire ϕ est strictement monotone.

2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$*

$$\langle \phi(x), x\rangle = \rho(|x|)|x|^p \geq \beta|x|^p.$$

3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$*

$$|\phi(x)| = \rho(|x|)|x|^{p-1} \leq \beta'|x|^{p-1} \leq (\beta' + 1)(|x|^{p-1} + 1).$$

C'est à dire, il existe $c = \beta' + 1 > 0$ tel que $|\phi(x)| \leq c(|x|^{p-1} + 1)$.

4. *En posant* $\kappa : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ *définie par*

$$\kappa(x) = \rho(|x|)|x|^{p-2},$$

$\kappa(\cdot)$ *est continue de plus*

$$\phi(x) = \kappa(x)x, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Maintenant, nous allons étudier certains opérateurs non linéaires.

Lemme 3.1.1. *Soit* $\hat{J} : L^p(I, \mathbb{R}^N) \to L^q(I, \mathbb{R}^N)$, *qui est l'opérateur de* ***Nemytskii*** *de* J, *c'est à dire, pour tout* $t \in I$, $\hat{J}(u)(t) = J(u(t)) = |u(t)|^{p-2}\, u(t)$, *pour tout* $u \in L^p(I, \mathbb{R}^N)$. *Alors* $\hat{J}$ *est continu, partout défini, cœrcive, strictement monotone et maximal monotone.*

Démonstration

(i) $\hat{J}$ est continu, comme composition et produit d'opérateurs continus.

(ii) $\hat{J}$ est partout défini.

Pour tout $u \in L^p(I, \mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned} \|\hat{J}(u)\|_q^q &= \int_0^T \left(|u(t)|^{p-1}\right)^q dt \\ &= \int_0^T |u(t)|^p dt < +\infty. \end{aligned}$$

(iii) $\hat{J}$ est cœrcif.

Pour tout $u \in L^p(I, \mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle \hat{J}(u), u \rangle = \int_0^T \langle |u(t)|^{p-2} u(t), u(t) \rangle dt = \int_0^T |u(t)|^p dt = \|u\|_p^p\,.$$

Donc

$$\frac{\langle \hat{J}(u), u \rangle}{\|u\|_p} = \|u\|_p^{p-1} \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|u\|_p \to +\infty.$$

(iv) $\hat{J}$ est strictement monotone.

Soient $u_1, u_2 \in L^p(I, \mathbb{R}^N)$ telle que $u_1 \neq u_2$, alors en utilisant l'Exemple 2.1.1, on aura

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}(u_1) - \hat{J}(u_2), u_1 - u_2 \rangle &= \int_0^T \Big\langle |u_1(t)|^{p-2} u_1(t) - |u_2(t)|^{p-2} u_2(t), u_1(t) - u_2(t) \Big\rangle dt \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^T \Big(|u_1(t)|^{p-2} + |u_2(t)|^{p-2} \Big) |u_1(t) - u_2(t)|^2 dt > 0. \end{aligned}$$

D'où
$$\langle \hat{J}(u_1) - \hat{J}(u_2), u_1 - u_2 \rangle > 0. \tag{3.1.2}$$

(v) $\hat{J}$ est maximal monotone.
On a $\hat{J}$ est continu et strictement monotone, alors du Corollaire 1.11.7, $\hat{J}$ est maximal monotone.

■

Lemme 3.1.2. *Soit* $\widehat{\phi} : D_L \subset L^p(I, \mathbb{R}^N) \to L^q(I, \mathbb{R}^N)$ *un opérateur défini par*
$$\widehat{\phi}(u)(t) = -(\phi(u'(t)))' \ , \quad \textit{pour}\, u \in D_L \quad \textit{et} \quad t \in I \ ,$$
où $D_L = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^N) \ : \ L(u(0), u(T), u'(0), u'(T) = 0\}$. *Alors* $\widehat{\phi}$ *est un opérateur monotone.*

Démonstration
Soient $u_1, u_2 \in D_L$ tel que $u_1 \neq u_2$ on a
$$\begin{aligned}\Big\langle \widehat{\phi}(u_1) - \widehat{\phi}(u_2), u_1 - u_2 \Big\rangle &= \int_0^T \Big\langle \widehat{\phi}(u_1)(t) - \widehat{\phi}(u_2)(t), u_1(t) - u_2(t) \Big\rangle dt \\ &= \int_0^T \Big\langle -(\phi(u_1'(t)))' + (\phi(u'(t)))', u_1(t) - u_2(t) \Big\rangle dt.\end{aligned}$$
En intégrant par parties, on obtient
$$\begin{aligned}\Big\langle \widehat{\phi}(u_1) - \widehat{\phi}(u_2), u_1 - u_2 \Big\rangle &= \langle -\phi(u_1'(t)) + \phi(u'(t)), u_1(t) - u_2(t) \rangle \Big]_0^T \\ &+ \int_0^T \langle \phi(u_1'(t)) - \phi(u'(t)), u_1'(t) - u_2'(t) \rangle dt,\end{aligned}$$
mais $u'(0) = u'(T) = 0$ et de l'hypothèse $H(\phi)(i)$, ϕ est strictement monotone et vérifie $\phi(0) = 0$, alors
$$\Big\langle \widehat{\phi}(u_1) - \widehat{\phi}(u_2), u_1 - u_2 \Big\rangle = \int_0^T \langle \phi(u_1'(t)) + \phi(u_2'(t)), u_1'(t) - u_2'(t) \rangle dt \geq 0.$$
D'où $\widehat{\phi}$ est monotone. ■

Nous avons besoin de montrer que le problème (3.1.1) admet une solution unique dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ pour tout $g \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$. Nous adaptons différentes techniques pour différentes conditions aux limites. Donc, on va prouver trois résultats auxiliaires ; le premier est le problème de Dirichlet, le deuxième est le problème mixte et le troixième est le problème de Neumann.

Proposition 3.1.3. *Si l'hypothèse $H(\phi)$ est vérifiée, alors le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} -(\phi(u'(t)))' + |u(t)|^{p-2}u(t) = g(t), & p.p \text{ sur } I\,, \\ u(0) = u(T) = 0\,, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

admet une solution $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ unique pour tout $g \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$.

Démonstration

Étape 1 : on commence par démontrer que, pour tout $h \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$, le problème

$$\begin{cases} -(\phi(u'(t)))' = h(t), & \text{p.p sur } I\,, \\ u(0) = u(T) = 0\,, \end{cases} \tag{3.1.4}$$

admet une seule solution. On procède de la même manière que dans le Lemme 2.2.1. En intégrant (3.1.4), on obtient

$$-\int_0^t (\phi(u'(s)))' ds = \int_0^t h(s)ds,$$

mais $\int_0^t (\phi(u'(s)))' ds = \phi(u'(t)) - \phi(u'(0))$. En posant $c = \phi(u'(0))$, alors

$$\phi(u'(t)) = c - H(h)(t),$$

avec $H : L^q(I, \mathbb{R}^N) \to C(I, \mathbb{R}^N)$ est définie par $H(h)(t) = \int_0^t h(s)ds$, pour tout $t \in I$. Par les propriétés de ϕ, il est un homéomorphisme, donc

$$u'(t) = \phi^{-1}(c - H(h)(t)).$$

En intégrant sur $[0, t]$, on obtient

$$\int_0^t u'(s)ds = \int_0^t \phi^{-1}(c - H(h)(s))ds.$$

D'où

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}(c - H(h)(s))ds + u(0),$$

et comme $u(0) = 0$, donc

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}(c - H(h)(s))ds, \qquad t \in I.$$

Alors, afin de prouver l'existence de solution du problème (3.1.4), il faut montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $u(T) = \int\limits_0^T \phi^{-1}(c - H(h)(s))ds = 0$.

D'après la Proposition 2.1.1 du Chapitre 2, on a $u(T) = \int\limits_0^T \phi^{-1}(c - H(h)(s))ds = 0$ admet une solution unique $Q_\phi(H(h))$, par conséquent, le problème (3.1.4) admet une seule solution

$$u(t) = \int\limits_0^t \phi^{-1}(Q_\phi(H(h)) - H(h)(s))ds, \qquad t \in I.$$

Posons $K : L^q(I, \mathbb{R}^N) \to W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ la solution unique de (3.1.4) pour tout $h \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$, c'est à dire

$$K(h)(t) := \int\limits_0^t \phi^{-1}(Q_\phi(H(h)) - H(h)(s))ds, \qquad t \in I.$$

<u>Étape 2</u> : l'application $K : L^q(I, \mathbb{R}^N) \to W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ est complètement continue.
En effet, soit $\{h_n\}_{n\geq 1} \subset L^q(I, \mathbb{R}^N)$, telle que $h_n \rightharpoonup h$ dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = K(h_n) \in W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$.
On a

$$-(\phi(u_n'(t)))' = h(t), \qquad t \in I.$$

En multipliant par $u_n(t)$, on obtient

$$-\big\langle(\phi(u_n'(t)))', u_n(t)\big\rangle = \langle h_n(t), u_n(t)\rangle .$$

En intégrant sur $[0, T]$, on trouve

$$-\int\limits_0^T \big\langle(\phi(u_n'(t)))', u_n(t)\big\rangle dt = \int\limits_0^T \langle h_n(t), u_n(t)\rangle dt. \tag{3.1.5}$$

Posons $J = \int\limits_0^T \big\langle(\phi(u_n'(t)))', u_n(t)\big\rangle dt$. En intégrant J par parties, on aura

$$\begin{aligned} J &= \big\langle\phi(u_n'(t)), u_n(t)\big\rangle\Big]_0^T - \int\limits_0^T \big\langle\phi(u_n'(t)), u_n'(t)\big\rangle dt \\ &= \big\langle\phi(u_n'(T)), u_n(T)\big\rangle - \big\langle\phi(u_n'(0)), u_n(0)\big\rangle - \int\limits_0^T \big\langle\phi(u_n'(t)), u_n'(t)\big\rangle dt \\ &= -\int\limits_0^T \big\langle\phi(u_n'(t)), u_n'(t)\big\rangle dt. \end{aligned}$$

En le remplaçant dans (3.1.5), on obtient

$$\int_0^T \langle \phi(u_n'(t)), u_n'(t) \rangle dt = \int_0^T \langle h_n(t), u_n(t) \rangle dt. \tag{3.1.6}$$

D'après l'hypothèse $H(\phi)(ii)$, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\langle \phi(u_n'(t)), u_n'(t) \rangle \geq \beta |u_n'(t)|^p, \tag{3.1.7}$$

d'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$\left|\langle h_n(t), u_n(t) \rangle\right| \leq \left|h_n(t)\right| \left|u_n(t)\right|.$$

D'où, par l'inégalité de Hölder

$$\int_0^T \left|\langle h_n(t), u_n(t) \rangle\right| \leq \int_0^T \left|h_n(t)\right| \left|u_n(t)\right| dt \leq \Big(\int_0^T \left|h_n(t)\right|^q dt \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_0^T \left|u_n(t)\right|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} = \|h_n\|_q \, \|u_n\|_p \, . \tag{3.1.8}$$

Alors, par (3.1.6), (3.1.7) et (3.1.8) on a

$$\int_0^T \beta |u_n'(t)|^p dt \leq \|h_n\|_q \, \|u_n\|_p \Longleftrightarrow \beta \|u_n'\|_p^p \leq \|h_n\|_q \, \|u_n\|_p \, ,$$

mais, par l'inégalité de Poincaré, il existe $c > 0$ tel que $\|u_n\|_{W^{1.p}} \leq c\|u_n'\|_p$, pour tout $n \geq 1$, donc

$$\|u_n\|_{W^{1.p}}^p \leq \frac{c^p}{\beta} \|h_n\|_q \, \|u_n\|_p \quad \text{d'où} \quad \|u_n\|_{W^{1.p}}^{p-1} \leq \frac{c^p}{\beta} \|h_n\|_q \, ,$$

alors $\{u_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$, donc relativement compacte dans $C(I, \mathbb{R}^N)$. D'après le problème (3.1.4) ; $\|(\phi(u_n'(\cdot)))'\|_q = \|h_n\|_q$ et comme $h_n \rightharpoonup h$ dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$, alors $\{h_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$, et donc $\{(\phi(u_n'(\cdot)))'\}_{n\geq 1}$ est aussi bornée dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$. On a

$$\phi(u_n'(t)) = Q_\phi(H(h_n)) - H(h_n)(t), \quad t \in I. \tag{3.1.9}$$

Du chapitre 2, on sait que $Q_\phi : C(I, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ est continue et bornée, de plus, la suite $\{H(h_n)\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$, donc la suite $\{\phi(u_n'(\cdot))\}_{n\geq 1}$ est aussi bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$ (Évidement dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$). D'où $\{\phi(u_n'(\cdot))\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{1.q}(I, \mathbb{R}^N)$ et donc, elle est relativement compacte dans $C(I, \mathbb{R}^N)$.

Puisque ϕ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^N$, nous pouvons vérifier que la suite $\{u_n'\}_{n\geq 1}$ est aussi relativement compacte dans $C(I, \mathbb{R}^N)$.

En effet, puisque $\{\phi(u_n'(\cdot))\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{1.q}(I, \mathbb{R}^N)$, elle est bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$

et équicontinue.

Par $H(\phi)(ii)$, on a $\beta|u_n'(t)|^p \leq \langle\phi(u_n'(t)), u_n'(t)\rangle$, pour tout $t \in I$, d'où par l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$\beta|u_n'(t)|^{p-1} \leq |\phi(u_n'(t))| \,, \quad \forall\, t \in I \,,$$

et comme $\{\phi(u_n'(\cdot))\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$, alors $\{u_n'\}_{n\geq 1}$ l'est aussi. Donc pour tout $t \in I$, la suite $\{u_n'(t)\}_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^N$.

D'autre part, on a $\{\phi(u_n'(\cdot))\}_{n\geq 1}$ est équicontinue, alors

$$\forall\, \varepsilon' > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, t, t' \in I, |t - t'| < \delta \Rightarrow |\phi(u_n'(t)) - \phi(u_n'(t'))| < \varepsilon' \,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \,, \tag{3.1.10}$$

de plus, comme ϕ est un homéomorphisme, il est inversible et son inverse ϕ^{-1} est continu, donc par le théorème de Heine, ϕ^{-1} est uniformément continu sur $B = \{\phi(u_n'(t)), n \in \mathbb{N}^*, t \in I\}$ (car B est relativement compact dans $\mathbb{R}^N$), alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1 > 0, \forall\, t, t' \in I, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, |\phi(u_n'(t)) - \phi(u_n'(t'))| < \delta_1 \Rightarrow |u_n'(t) - u_n'(t')| < \varepsilon \,.$$

D'où, pour $\varepsilon' = \delta_1$ dans (3.1.10), on obtient

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta, \forall\, t, t' \in I, |t - t'| < \delta \Rightarrow |u_n'(t) - u_n'(t')| < \varepsilon \,, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Par suite, $\{u_n'\}_{n\geq 1}$ est équicontinue, et par le théorème d'Ascoli-Arzelà, $\{u_n'\}_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $C(I, \mathbb{R}^N)$.

Donc, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $u_n \to u$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$.

Comme nous le savons, un opérateur linéaire compact défini sur un espace réflexif est complètement continu, alors montrons que H est compact de $L^q(I, \mathbb{R}^N)$ dans $C(I, \mathbb{R}^N)$.

Soit $A \subset L^q(I, \mathbb{R}^N)$ un ensemble borné, alors il existe $k > 0$ tel que pour tout $h \in A$, $\|h\|_q \leq k$, donc

$$|H(h)(t)| = \Big|\int_0^t h(s)ds\Big| \leq \sqrt[p]{T}\ \|h\|_q \leq k\ \sqrt[p]{T} \,,$$

alors, $H(A)(t)$ est borné dans $\mathbb{R}^N$, donc il est relativement compact dans $\mathbb{R}^N$, d'autre part pour tout $h \in A$ et pour tout $t, \tau \in \mathbb{R}$ tel que $t < \tau$

$$
\begin{aligned}
|H(h)(\tau)-H(h)(t)| &= \Big|\int_t^\tau h(s)ds\Big| \\
&\le \int_t^\tau \big|h(s)\big|ds=\int_0^T \mathbb{1}_{[t,\tau]}(s)|h(s)|ds \\
&\le \sqrt[p]{\tau-t}\,\|h\|_q \\
&\le k\,\sqrt[p]{\tau-t}\,,
\end{aligned}
$$

donc, $H(A)$ est équicontinu, et par le théorème d'Ascoli-Arzelà, $H(A)$ est relativement compact dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, d'où H est compact, et comme il est linéaire, alors il est complètement continu.
Ainsi, $H(h_n)\to H(h)$ dans $C(I,\mathbb{R}^N)$ implique $Q_\phi(H(h_n))\to Q_\phi(H(h))$ dans $\mathbb{R}^N$ car Q_ϕ est continue. De (3.1.9), on a $u_n'(t)=\phi^{-1}(Q_\phi(H(h_n))-H(h_n)(t))$, donc par passage à la limite, on obtient

$$u'(t)=\phi^{-1}(Q_\phi(H(h))-H(h)(t)),\qquad \forall t\in I.$$

De plus, il existe $\beta_1>0$ tel que, pour tout $t\in I$ et pour tout $n\ge 1$, $|u_n'(t)|\le\beta_1$, alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$u(t)=\int_0^t \phi^{-1}(Q_\phi(H(h))-H(h)(s))ds.$$

D'où, $K(h_n)\to K(h)$ dans $C^1(I,\mathbb{R}^N)$ (et bien sûr dans $W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$). Par suite K est complètement continue.
Maintenant soit $N_1: W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)\to L^q(I,\mathbb{R}^N)$ une application définie par

$$N_1(u)(t)=-|u(t)|^{p-2}u(t)+g(t),\quad \text{pour}\ \ u\in W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)\ \text{et}\ t\in I.$$

Cette fonction est continue et envoie les ensembles bornés de $W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$ en ensembles bornés de $L^q(I,\mathbb{R}^N)$. En effet, N_1 est continue comme somme de deux fonctions continues. De plus, soit Λ un ensemble borné de $W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$, alors il existe $c>0$ tel que, pour tout $u\in\Lambda$, $\|u\|_p\le c$, donc

$$
\begin{aligned}
\|N_1(u)\|_q &= \|-|u(\cdot)|^{p-2}u+g\|_q \\
&\le \|-|u(\cdot)|^{p-2}u\|_q+\|g\|_q=\Big(\int_0^T(|u(t)|^{p-1})^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}+\|g\|_q\,,
\end{aligned}
$$

on a $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors $p+q=p\,q$ donc $q(p-1)=p$, d'autre part, $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p}$, d'où

$$\begin{aligned}
\|N_1(u)\|_q &\leq \Big(\int_0^T (|u(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_q \\
&\leq \Big(\int_0^T (|u(t)|^p dt\Big)^{\frac{p-1}{p}} + \|g\|_q = \|u\|_p^{p-1} + \|g\|_q \\
&\leq c^{p-1} + \|g\|_q\,,
\end{aligned}$$

donc, N_1 est borné dans $L^q(I,\mathbb{R}^N)$.

Il est claire que la solution du problème (3.1.3) est un point fixe de l'opérateur $K\circ N_1$: $W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)\to W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$ (d'après la Section 2.3 du Chapitre 2), ainsi, on considère le problème de point fixe suivant $u=(K\circ N_1)(u)$, que nous allons résoudre en utilisant le théorème de Leray-Schauder.

Étape 3 : l'ensemble $S=\{u\in W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N):\ u=\lambda K(N_1(u)),\ 0<\lambda<1\}$ est borné.

En effet, soit $u\in S$, alors $u=\lambda K(N_1(u))$, donc $\lambda^{-1}u=K\big(|u(\cdot)|^{p-2}u+g\big)$. Ainsi, de (3.1.3) on a

$$\begin{cases} -\big(\phi(\lambda^{-1}u'(t))\big)' = -|u(t)|^{p-2}u(t)+g(t), & \text{p.p sur } I\,, \\ u(0)=u(T)=0. \end{cases}$$

Donc, en multipliant par $\lambda^{-1}u(t)$, on obtient

$$-\Big\langle(\phi(\lambda^{-1}u'(t)))',\lambda^{-1}u(t)\Big\rangle = \big\langle -|u(t)|^{p-2}u(t)+g(t),\lambda^{-1}u(t)\big\rangle.$$

En intégrant sur $[0,T]$, on aura

$$-\int_0^T \Big\langle(\phi(\lambda^{-1}u'(t)))',\lambda^{-1}u(t)\Big\rangle dt = \int_0^T \big\langle -|u(t)|^{p-2}u(t)+g(t),\lambda^{-1}u(t)\big\rangle dt.$$

Posons $G=\int_0^T \big\langle(\phi(\lambda^{-1}u'(t)))',\lambda^{-1}u(t)\big\rangle dt$. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
G &= \big\langle\phi(\lambda^{-1}u'(t)),\lambda^{-1}u(t)\big\rangle\Big]_0^T - \int_0^T \big\langle\phi(\lambda^{-1}u'(t)),\lambda^{-1}u'(t)\big\rangle \\
&= \big\langle\phi(\lambda^{-1}u'(T)),\lambda^{-1}u(T)\big\rangle - \big\langle\phi(\lambda^{-1}u(0)),\lambda^{-1}u(0)\big\rangle - \int_0^T \big\langle\phi(\lambda^{-1}u'(t)),\lambda^{-1}u'(t)\big\rangle \\
&= -\int_0^T \big\langle\phi(\lambda^{-1}u'(t)),\lambda^{-1}u'(t)\big\rangle \qquad (\text{car,}\quad u(0)=u(T)=0).
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^T \big\langle \phi(\lambda^{-1}u'(t)), \lambda^{-1}u'(t) \big\rangle dt = \int_0^T \big\langle -|u(t)|^{p-2}u(t) + g(t), \lambda^{-1}u(t) \big\rangle dt.$$

De $H(\phi)(ii)$, on a

$$\big\langle \phi(\lambda^{-1}u'(t)), \lambda^{-1}u'(t) \big\rangle \geq \beta |\lambda^{-1}u'(t)|^p = \frac{\beta}{\lambda^p}|u'(t)|^p.$$

D'où

$$\int_0^T \big\langle \phi(\lambda^{-1}u'(t)), \lambda^{-1}u'(t) \big\rangle dt \geq \frac{\beta}{\lambda^p} \int_0^T |u'(t)|^p dt = \frac{\beta}{\lambda^p}\|u'\|_p^p\,.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\big\langle -|u(t)|^{p-2}u(t) + g(t), \lambda^{-1}u(t) \big\rangle &= -\lambda^{-1}|u(t)|^{p-2}\langle u(t), u(t)\rangle + \lambda^{-1}\langle g(t), u(t)\rangle \\
&= \lambda^{-1}\Big(\langle g(t), u(t)\rangle - |u(t)|^p \Big) \\
&\leq \lambda^{-1}\langle g(t), u(t)\rangle \\
&\leq \lambda^{-1}|g(t)|\,|u(t)|,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^T \big\langle -|u(t)|^{p-2}u(t) + g(t), \lambda^{-1}u(t) \big\rangle dt &\leq \lambda^{-1} \int_0^T |g(t)|\,|u(t)| dt \\
&\leq \lambda^{-1}\Big(\int_0^T |g(t)|^q dt \Big)^q \Big(\int_0^T |u(t)|^p dt \Big)^p \\
&= \lambda^{-1}\|g\|_q\,\|u\|_p\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\beta}{\lambda^p}\|u'\|_p^p \leq \lambda^{-1}\|g\|_q\,\|u\|_p \quad \text{donc} \quad \|u'\|_p^p \leq \frac{\lambda^{p-1}}{\beta}\|g\|_q\,\|u\|_p\,.$$

D'après l'inégalité de Poincaré

$$\exists\, c > 0 \quad \text{tel que} \quad \|u\|_{W^{1.p}} \leq c\,\|u'\|_p\,, \quad \forall\, u \in W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)\,.$$

D'où, comme $0 < \lambda < 1$, on aura

$$\|u\|_{W^{1.p}}^p \leq c^p\|u'\|_p^p \leq \frac{c^p\lambda^{p-1}}{\beta}\|g\|_q\,\|u\|_p \quad \text{donc} \quad \|u\|_{W^{1.p}} \leq \sqrt[p-1]{\frac{c^p}{\beta}\|g\|_q}\,.$$

Donc, S est borné dans $W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$.

Par conséquent, d'après le Théorème 1.9.8, l'opérateur $K \circ N_1$ admet un point fixe $u \in W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ qu'est la solution du problème (3.1.3). Clairement $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$.

L'unicité de la solution vient de la stricte monotonie de ϕ. En effet, par la démonstration de la Proposition 2.1.1, l'équation $G_l(a) = 0$ admet une seule solution Q_ϕ, et comme $u(t) = K(h)(t) = \int_0^t \phi^{-1}(Q_\phi(H(h)) - H(h)(s))ds,\ t \in I$, c'est à dire la solution de (3.1.3) est définie par la seule solution Q_ϕ, donc $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ est unique. ■

Pour les mêmes hypothèses sur l'opérateur ϕ, on va démontrer l'existence et l'unicité de solution pour le problème mixte.

Proposition 3.1.4. *Si les hypothèses $H(\phi)$ sont vérifiées, alors le problème*

$$\begin{cases} -(\phi(u'(t)))' + |u(t)|^{p-2}u(t) = g(t) \quad p.p \ sur\, I\,, \\ u(0) = u'(T) = 0, \end{cases} \tag{3.1.11}$$

admet une solution unique $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ pour tout $g \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$.

Démonstration

Soit $X = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^N) :\ u(0) = u'(T) = 0\ \}$ un espace de Banach muni de la norme de $C^1(I, \mathbb{R}^N)$. De plus, soit $\Gamma : X \to X$ une application définie par $\Gamma(y)(t) = \int_0^t \phi^{-1}\Big(\int_0^s f_y(r)dr - K_y\Big)ds$, avec $f_y(r) = |y(r)|^{p-2}y(r) - g(r)$ et $K_y = \int_0^T f_y(r)dr$.

<u>Étape 1</u> : il existe $M > 0$ telle que, pour tout $u \in X$ et pour tout $\lambda \in]0, 1[$ avec $u = \lambda\Gamma(u)$, on a que $\|u\|_{C^1} \leq M$ (i.e., $S = \{u \in X\,,\ u = \lambda\,\Gamma(u)\,,\ \lambda \in]0, 1[\}$ est borné dans X).

En effet, soit $u \in X$ et $\lambda \in]0, 1[$ avec $u = \lambda\Gamma(u)$, alors

$$\lambda^{-1}u(t) = \Gamma(u)(t) \Longrightarrow \lambda^{-1}u'(t) = (\Gamma(u))'(t), \quad \forall\, t \in I\,,$$

de plus, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \Gamma(u)(t) &= \int_0^t \phi^{-1}\Big(\int_0^s f_u(r)dr - K_u\Big)ds \\ &= \int_0^t \phi^{-1}\Big(\int_0^s f_u(r)dr - \int_0^T f_u(r)dr\Big)ds \\ &= \int_0^t \phi^{-1}\Big(\int_T^s f_u(r)dr\Big)ds\,, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (\Gamma(u))'(t) &= \phi^{-1}\Big(\int_T^t f_u(r)dr\Big) \\ &= \phi^{-1}\Big(\int_T^t (|u(r)|^{p-2}u(r) - g(r))dr\Big)\,. \end{aligned}$$

Alors

$$\phi(\lambda^{-1}u'(t)) = \phi((\Gamma(u))'(t)) = \int_T^t |u(r)|^{p-2}u(r)d - \int_T^t g(r)dr\,. \tag{3.1.12}$$

D'où

$$(\phi(\lambda^{-1}u'(t)))' = |u(t)|^{p-2}u(t) - g(t), \qquad \text{p.p sur } I. \tag{3.1.13}$$

En multipliant l'équation (3.1.13) par $\lambda^{-1}u(t)$, on obtient

$$\left\langle (\phi(\lambda^{-1}u'(t)))', \lambda^{-1}u(t) \right\rangle = \langle |u(t)|^{p-2}u(t) - g(t), \lambda^{-1}u(t)\rangle\,,$$

cela implique

$$\int_0^T \left\langle (\phi(\lambda^{-1}u'(t)))', \lambda^{-1}u(t) \right\rangle dt = \int_0^T \langle |u(t)|^{p-2}u(t) - g(t), \lambda^{-1}u(t)\rangle dt\,.$$

En intégrant le terme à gauche par parties, on obtient

$$-\int_0^T \left\langle \phi(\lambda^{-1}u'(t)), \lambda^{-1}u'(t) \right\rangle dt = \int_0^T \langle |u(t)|^{p-2}u(t) - g(t), \lambda^{-1}u(t)\rangle dt\,.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\langle |u(t)|^{p-2}u(t) - g(t), \lambda^{-1}u(t)\rangle &= \lambda^{-1}|u(t)|^{p-2}\langle u(t), u(t)\rangle - \langle g(t), \lambda^{-1}u(t)\rangle \\ &= \lambda^{-1}|u(t)|^{p} - \lambda^{-1}\langle g(t), u(t)\rangle\,,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle |u(t)|^{p-2}u(t) - g(t), \lambda^{-1}u(t)\rangle dt &= \lambda^{-1}\int_0^T |u(t)|^p dt - \lambda^{-1}\int_0^T \langle g(t), u(t)\rangle dt \\ &= \lambda^{-1}\|u\|_p^p - \lambda^{-1}\int_0^T \langle g(t), u(t)\rangle dt\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^T \left\langle \phi(\lambda^{-1}u'(t)), u'(t) \right\rangle dt = -\|u\|_p^p + \int_0^T \langle g(t), u(t)\rangle dt\,. \tag{3.1.14}$$

On a par $H(\phi)(ii)$

$$\left\langle \phi(\lambda^{-1}u'(t)), \lambda^{-1}u'(t) \right\rangle \geq \frac{\beta}{\lambda^p}|u'(t)|^p\,.$$

D'où

$$\int_0^T \left\langle \phi(\lambda^{-1}u'(t)), \lambda^{-1}u'(t) \right\rangle dt \geq \frac{\beta}{\lambda^p}\|u'\|_p^p\,,$$

ceci implique d'après (3.1.14) que

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\lambda^{p-1}}\|u'\|_p^p+\|u\|_p^p &\leq \int\limits_0^T \langle g(t),u(t)\rangle dt\\ &\leq \int\limits_0^T |g(t)|\ |u(t)|dt\\ &\leq \Big(\int\limits_0^T |g(t)|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}\ \Big(|u(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}=\|g\|_q\ \|u\|_p\,.\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\beta}{\lambda^{p-1}}\|u'\|_p^p+\|u\|_p^p\leq \|g\|_q\ \|u\|_p\,, \tag{3.1.15}$$

qui donne $\|u\|_p^p\leq\|g\|_q\ \|u\|_p$, donc

$$\|u\|_p^{p-1}\leq\|g\|_q\Longrightarrow\|u\|_p\leq\sqrt[p-1]{\|g\|_q}\,. \tag{3.1.16}$$

D'autre part, par (3.1.15) et (3.1.16), et comme $0<\lambda<1$, on a

$$\|u'\|_p^p\leq\frac{\lambda^{p-1}}{\beta}\|g\|_q\ \|u\|_p\leq\frac{1}{\beta}\|g\|_q\ \sqrt[p-1]{\|g\|_q}\,.$$

D'où $\|u'\|_p\leq M_1$, où $M_1^p=\frac{1}{\beta}\|g\|_q\ \sqrt[p-1]{\|g\|_q}$, or, pour tout $t\in I$, on a

$$u(t)=u(0)+\int\limits_0^t u'(s)ds=\int\limits_0^t u'(s)ds,\qquad (\text{car } u(0)=0).$$

Donc

$$\begin{aligned}|u(t)| &= \Big|\int\limits_0^t u'(s)ds\Big|\leq\int\limits_0^t |u'(s)|ds\\ &\leq \int\limits_0^T |u'(s)|ds\\ &\leq \sqrt[q]{T}\ \|u'\|_p\leq M_2\,,\qquad \text{où}\quad M_2=\sqrt[q]{T}M_1\,.\end{aligned}$$

Alors, $\|u\|_C=\sup\limits_{t\in I}|u(t)|\leq M_2$.
D'autre part, de (3.1.12) on a

$$\phi(\lambda^{-1}u'(t))=-\int\limits_t^T |u(s)|^{p-2}u(s)ds+\int\limits_t^T g(s)ds\,.$$

En le multipliant par $u'(t)$, et en utilisant $H(\phi)(ii)$, on obtient

$$\frac{\beta}{\lambda^{p-1}}|u'(t)|^p \leq \langle \phi(\lambda^{-1}u'(t)), u'(t)\rangle = \Big\langle -\int_t^T |u(s)|^{p-2}u(s)ds + \int_t^T g(s)ds, u'(t)\Big\rangle\,,$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\lambda^{p-1}}|u'(t)|^p &\leq \Big\langle -\int_t^T |u(s)|^{p-2}u(s)ds + \int_t^T g(s)ds, u'(t)\Big\rangle \\ &\leq \Big| -\int_t^T |u(s)|^{p-2}u(s)ds + \int_t^T g(s)ds\Big|\, |u'(t)| \\ &\leq |u'(t)| \int_t^T |u(s)|^{p-2}|u(s)|ds + |u'(t)| \int_t^T |\,g(s)|ds \\ &= |u'(t)| \int_t^T |u(s)|^{p-1}ds + |u'(t)| \int_t^T |\,g(s)|ds\,,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\beta}{\lambda^{p-1}}|u'(t)|^{p-1} \leq \int_0^T |u(s)|^{p-1}ds + \int_0^T |g(s)|ds\,.$$

D'où

$$\frac{\beta}{\lambda^{p-1}}|u'(t)|^{p-1} \leq T\,\|u\|_C^{p-1} + \|g\|_1 \leq TM_2^{p-1} + \|g\|_1\ .$$

Alors, pour tout $t \in I$ il existe $M_3 > 0$ telle que $|u'(t)| \leq M_3$ et $M_3 = \frac{1}{\beta}(TM_2^{p-1} + \|g\|_1)$, ceci implique que, $\sup\limits_{t\in I}|u'(t)| \leq M_3$, c'est à dire $\|u'\|_C \leq M_3$.
Donc, il existe $M = \max\{M_2, M_3\} > 0$ telle que $\|u\|_{C^1} \leq M$.

Étape 2 : Maintenant, montrons que la fonction Γ est compacte.
Soit A un sous ensemble borné de X, alors il existe $M' > 0$ tel que

$$A \subset U = \{u \in X,\ \|u\|_{C^1} < M'\}.$$

Soit $\overline{U}$ la fermeture de U dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$.
On remarque que, pour tout $y \in \overline{U}$ et pour tout $s \in I$, on a

$$\Big|\int_0^s f_y(r)dr - K_y\Big| \leq 2\Big(M'^{p-1}T + \|g\|_1\Big) := H.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^s f_y(r)dr - K_y\Big| &= \Big|\int_0^s f_y(r)dr - \int_0^T f_y(r)dr\Big| \\
&\leq \Big|\int_0^s f_y(r)dr\Big| + \Big|\int_0^T f_y(r)dr\Big| \\
&\leq 2\Big|\int_0^T f_y(r)dr\Big| \qquad (s \leq T) \\
&= 2\Big|\int_0^T \Big(|y(r)|^{p-2}y(r) - g(r)\Big)dr\Big| \\
&\leq 2\Big(\Big|\int_0^T |y(r)|^{p-2}y(r)\Big|dr + \int_0^T |g(r)|dr\Big) \\
&\leq 2\Big(\int_0^T |y(r)|^{p-1}dr + \|g\|_1\Big) \\
&\leq 2\Big(\|y\|_C^{p-1}\int_0^T dr + \|g\|_1\Big) \\
&\leq 2\Big(M'^{p-1}T + \|g\|_1\Big) \qquad (y \in \overline{U}).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a ϕ est continue et strictement monotone donc d'après le Théorème 1.11.2, ϕ est un homéomorphisme, alors ϕ^{-1} existe et est continue, de plus, $\overline{B}_H = \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, |x| \leq H\}$ est compact dans $\mathbb{R}^N$, alors par le théorème de Heine (Théorème 1.7.5), ϕ^{-1} est uniformément continue sur $\overline{B}_H$. Par suite

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0,\ \forall\, x_1, x_2 \in \overline{B}_H,\ |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\phi^{-1}(x_1) - \phi^{-1}(x_2)| < \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon > 0$, on prend $\tilde{\varepsilon} = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2T}\}$, alors

$$\forall\, \tilde{\varepsilon} > 0,\ \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0,\ \forall\, x_1, x_2 \in \overline{B}_H,\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\phi^{-1}(x_1) - \phi^{-1}(x_2)| < \tilde{\varepsilon}. \tag{3.1.17}$$

Comme J est uniformément continue sur $\overline{B}_{M'} = \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, |x| \leq M'\}$ (par le théorème de Heine), alors

$$\forall\, \varepsilon' > 0,\ \exists\, \delta_{\varepsilon'} > 0,\ \forall\, x_1, x_2 \in \overline{B}_{M'},\ |x_1 - x_2| < \delta_{\varepsilon'} \Rightarrow |\, J(x_1) - J(x_2)| < \varepsilon'.$$

Posons $\varepsilon' = \frac{\delta}{2T}$, on obtient

$$\exists\, \tilde{\delta} > 0, \forall\, x_1, x_2 \in \overline{B}_{M'},\ |x_1 - x_2| < \tilde{\delta} \Rightarrow |\, J(x_1) - J(x_2)| < \frac{\delta}{2T}. \tag{3.1.18}$$

Donc, si $y_1, y_2 \in \overline{U}$ avec $\|y_1 - y_2\|_C < \tilde{\delta}$, et pour tout $s \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^s f_{y_1}(r)dr - K_{y_1} - \int_0^s f_{y_2}(r)dr + K_{y_2}\Big| &= \Big|\int_0^s f_{y_1}(r)dr - \int_0^T f_{y_1}(r)dr - \int_0^s f_{y_2}(r)dr + \int_0^T f_{y_2}(r)dr\Big| \\
&= \Big| - \int_s^T f_{y_1}(r)dr + \int_s^T f_{y_2}(r)dr\Big| \\
&\leq 2\Big|\int_0^T f_{y_1}(r)dr - \int_0^T f_{y_2}(r)dr\Big| \\
&= 2\Big|\int_0^T \Big[|y_1(r)|^{p-2}\, y_1(r) - |y_2(r)|^{p-2}\, y_2(r)\Big] dr\Big| \\
&\leq 2\int_0^T \Big||y_1(r)|^{p-2}\, y_1(r) - |y_2(r)|^{p-2}\, y_2(r)\Big| dr \\
&= 2\int_0^T \Big|J(y_1(r)) - J(y_2(r))\Big| dr,
\end{aligned}$$

alors, par (3.1.18) on aura

$$\Big|\int_0^s f_{y_1}(r)dr - K_{y_1} - \int_0^s f_{y_2}(r)dr + K_{y_2}\Big| \;<\; 2\frac{\delta}{2T}\int_0^T dr = \delta.$$

Donc, pour tout $t \in I$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Big|\Gamma(y_1)(t) - \Gamma(y_2)(t)\Big| &= \Big|\int_0^t \phi^{-1}\Big(\int_0^s f_{y_1}(r)dr - K_{y_1}\Big)dr - \int_0^t \phi^{-1}\Big(\int_0^s f_{y_2}(r)dr - K_{y_2}\Big)dr\Big| \\
&= \Big|\int_0^t \Big[\phi^{-1}\Big(\int_0^s f_{y_1}(r)dr - K_{y_1}\Big) - \phi^{-1}\Big(\int_0^s f_{y_2}(r)dr - K_{y_2}\Big)\Big]dr\Big| \\
&\leq \int_0^T \Big|\phi^{-1}\Big(\int_0^s f_{y_1}(r)dr - K_{y_1}\Big) - \phi^{-1}\Big(\int_0^s f_{y_2}(r)dr - K_{y_2}\Big)\Big|dr,
\end{aligned}$$

et d'après (3.1.17) on aura, pour tout $t \in I$

$$\Big|\Gamma(y_1)(t) - \Gamma(y_2)(t)\Big| < \tilde{\varepsilon}\int_0^T dr = \tilde{\varepsilon}\, T < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'où

$$\|\Gamma(y_1) - \Gamma(y_2)\|_C < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

De plus $\big(\Gamma(y)\big)'(t) = \phi^{-1}\Big(\int\limits_0^s f_y(r)dr - K_y\Big)$ donc, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\Big|\big(\Gamma(y_1)\big)'(t) - \big(\Gamma(y_2)\big)'(t)\Big| &= \Big|\phi^{-1}\Big(\int\limits_0^s f_{y_1}(r)dr - K_{y_1}\Big) - \phi^{-1}\Big(\int\limits_0^s f_{y_2}(r)dr - K_{y_2}\Big)\Big| \\ &< \tilde{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\|(\Gamma(y_1))' - (\Gamma(y_2))'\|_C < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ce qui implique

$$\|\Gamma(y_1) - \Gamma(y_2)\|_{C^1} = \max\{\|\Gamma(y_1) - \Gamma(y_2)\|_C,\ \|\big(\Gamma(y_1)\big)' - \big(\Gamma(y_2)\big)'\|_C\} < \varepsilon\,.$$

Alors, Γ est uniformément continue sur $\overline{U}$ muni de la norme de $C(I,\mathbb{R}^N)$ vers X muni de la norme de $C^1(I,\mathbb{R}^N)$, par suite, du Théorème 1.8.7 (l'injection compacte de $C^1(I,\mathbb{R}^N)$ dans $C(I,\mathbb{R}^N)$), on déduit que $\Gamma(\overline{U})$ est relativement compact dans X, d'où $\Gamma(A)$ est relativement compact dans X. Par conséquent, Γ est compacte.
Comme Γ est compacte et l'ensemble S est borné (d'après l'Etape 1), alors par le Théorème 1.9.8, Γ admet un point fixe $u \in X$, qu'est la solution unique du problème (3.1.11) par la monotonie de $\widehat{\phi}$ et la stricte monotonie de $\hat{J}$. En effet, supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (3.1.11), alors

$$\widehat{\phi}(u_1) + \hat{J}(u_1) = g\,,\text{ et } \widehat{\phi}(u_2) + \hat{J}(u_2) = g,$$

donc

$$\langle\widehat{\phi}(u_1) + \hat{J}(u_1) - \widehat{\phi}(u_2) - \hat{J}(u_2), u_1 - u_2\rangle = 0,$$

et par la monotonie de $\widehat{\phi}$ et $\hat{J}$, on aura

$$0 \le \langle\hat{J}(u_1) - \hat{J}(u_2), u_1 - u_2\rangle = -\langle\widehat{\phi}(u_1) - \widehat{\phi}(u_2), u_1 - u_2\rangle \le 0.$$

D'où

$$\langle\hat{J}(u_1) - \hat{J}(u_2), u_1 - u_2\rangle = 0,$$

donc, par la monotonie stricte de $\hat{J}$, celà implique que, $u_1 = u_2$. ■

Pour le problème de Neumann, on utilise l'hypothèse $H(\phi)_1$ sur la fonction ϕ pour démontrer l'existence et l'unicité du solution.

Proposition 3.1.5. *Si l'hypothèse $H(\phi)_1$ est vérifiée, alors le problème*

$$\begin{cases} -(\phi(u'(t)))' + |u(t)|^{p-2}u(t) = g(t), & p.p \text{ sur } I, \\ u'(0) = u'(T) = 0\,, \end{cases} \tag{3.1.19}$$

admet une solution unique $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$ pour tout $g \in L^q(I,\mathbb{R}^N)$.

Démonstration

Soit $V : W^{1,p}(I,\mathbb{R}^N) \to (W^{1,p}(I,\mathbb{R}^N))'$ un opérateur tel que

$$\langle V(u), y\rangle = \int_0^T \langle \phi(u'(t)), y'(t)\rangle dt + \int_0^T |u(t)|^{p-2}\langle u(t), y(t)\rangle dt, \quad \text{pour tout } u, y \in W^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)\,.$$

V est continu et monotone d'après la continuité et la monotonie de ϕ et J. Alors par le Théorème 1.11.7, V est maximal monotone.

D'autre part, on a par $H(\phi)(ii)$, $\langle \phi(u'(t)), u'(t)\rangle \geq \beta\,|u'(t)|^p$, donc

$$\begin{aligned}
\langle V(u), u\rangle &= \int_0^T \langle \phi(u'(t)), u'(t)\rangle dt + \int_0^T |u(t)|^{p-2}\langle u(t), u(t)\rangle dt \\
&\geq \beta \int_0^T |u'(t)|^p dt + \int_0^T |u(t)|^p dt \\
&= \beta \|u'\|_p^p + \|u\|_p^p \geq \min\{\beta, 1\}\|u\|^p_{W^{1,p}} = \beta'\|u\|^p_{W^{1,p}}\,,
\end{aligned}$$

alors

$$\frac{\langle V(u), u\rangle}{\|u\|_{W^{1,p}}} \geq \beta'\|u\|^{p-1}_{W^{1,p}} \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|u\|_{W^{1,p}} \to +\infty\,,$$

c'est à dire, V est cœrcive. D'où par le Corollaire 1.11.9, on obtient que V est un opérateur surjective, donc pour tout $g \in L^q(I,\mathbb{R}^N)$ fixé, il existe $u \in W^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$ telle que $V(u) = g$. Soient $\psi \in C_0^1(I)$ et $\langle V(u), \psi\rangle = \langle g, \psi\rangle$, donc

$$\int_0^T \langle \phi(u'(t)), \psi'(t)\rangle dt + \int_0^T |u(t)|^{p-2}\langle u(t), \psi(t)\rangle dt = \langle g, \psi\rangle\,,$$

par suite

$$\int_0^T \langle \phi(u'(t)), \psi'(t)\rangle dt + \int_0^T |u(t)|^{p-2}\langle u(t), \psi(t)\rangle dt = \int_0^T \langle g(t), \psi(t)\rangle dt\,,$$

et donc

$$\int_0^T \langle \phi(u'(t)), \psi'(t)\rangle dt = \int_0^T \langle g(t) - |u(t)|^{p-2}\, u(t), \psi(t)\rangle dt\,. \tag{3.1.20}$$

D'une part, $\phi(u') \in L^q(I,\mathbb{R}^N)$, en effet ; l'équation (3.1.20) est équivalente à

$$-\int_0^T \langle (\phi(u'(t)))', \psi(t)\rangle dt = \int_0^T \langle g(t) - |u(t)|^{p-2}\, u(t), \psi(t)\rangle dt\,,$$

d'où

$$\langle (\phi(u'))', \psi\rangle = \langle |u|^{p-2}u - g, \psi\rangle\,,$$

et comme $\psi \in C_0^1(I)$ est arbitraire, on aura $\phi(u') \in L^q(I,\mathbb{R}^N)$ (Corollaire 1.12.3). Donc $\phi(u') \in W^{1.q}(I,\mathbb{R}^N)$. D'autre part

$$-\left(\phi(u'(t))\right)' + |u(t)|^{p-2}u(t) = g(t) \quad \text{p.p sur } I, \tag{3.1.21}$$

comme $u \in W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$, u est aussi dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, de plus $\phi(u') \in W^{1.q}(I,\mathbb{R}^N)$ et ϕ^{-1} est continue, on obtient que $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$. En effet ; $\phi \circ u'$ et ϕ^{-1} sont continues donc $\phi^{-1} \circ \phi \circ u' = u'$ est aussi continue.
Soit $\omega \in W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$, en multipliant (3.1.21) par $\omega(t)$ on aura

$$\langle -(\phi(u'(t)))' + |u(t)|^{p-2}u(t), \omega(t)\rangle = \langle g(t), \omega(t)\rangle.$$

En intégrant sur I, on obtient

$$-\int_0^T \langle (\phi(u'(t)))', \omega(t)\rangle dt + \int_0^T \langle |u(t)|^{p-2}u(t), \omega(t)\rangle dt = \int_0^T \langle g(t), \omega(t)\rangle dt\,.$$

Posons $G = \int_0^T \langle -(\phi(u'(t))'), \omega(t)\rangle dt$. En intégrant G par parties, on aura

$$\begin{aligned} G &= -\langle \phi(u'(t)), \omega(t)\rangle\Big]_0^T + \int_0^T \langle \phi(u'(t)), \omega'(t)\rangle dt \\ &= -\langle \phi(u'(T)), \omega(T)\rangle + \langle \phi(u'(0)), \omega(0)\rangle + \int_0^T \langle \phi(u'(t)), \omega'(t)\rangle dt\,, \end{aligned}$$

alors

$$-\langle \phi(u'(T)), \omega(T)\rangle + \langle \phi(u'(0)), \omega(0)\rangle + \int_0^T \langle \phi(u'(t)), \omega'(t)\rangle dt + \int_0^T \langle |u(t)|^{p-2}u(t), \omega(t)\rangle dt = \langle g, \omega\rangle\,.$$

Par conséquent

$$-\langle \phi(u'(T)), \omega(T)\rangle + \langle \phi(u'(0)), \omega(0)\rangle + \langle V(u), \omega\rangle = \langle g, \omega\rangle\,,$$

et comme $V(u) = g$, alors

$$-\langle \phi(u'(T)), \omega(T)\rangle + \langle \phi(u'(0)), \omega(0)\rangle = 0\,.$$

Donc,

- si $\omega(0) = \omega(T) \neq 0$ alors $\phi(u'(T)) = \phi(u'(0))$,
- si $\omega(0) = -\omega(T) \neq 0$ alors $\phi(u'(T)) = -\phi(u'(0))$.

Donc, si elle doit être $\phi(u'(T)) = \phi(u'(0)) = 0$ ce qui implique que $u'(0) = u'(T) = 0$. D'où u est la solution du problème (3.1.19). L'unicité découle de la monotonie de $\widehat{\phi}$ et la stricte monotonie de $\hat{J}$. ■

Lemme 3.1.6. *L'opérateur $\widehat{\phi} : D_L \subset L^p(I, \mathbb{R}^N) \to L^q(I, \mathbb{R}^N)$ défini dans le Lemme 3.1.2 est maximal monotone.*

Démonstration

Supposons que, pour tout $(u_0, v_0) \in L^p(I, \mathbb{R}^N) \times L^q(I, \mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle \widehat{\phi}(u) - v_0, u - u_0 \rangle \geq 0\,, \quad \forall\, u \in D_L. \tag{3.1.22}$$

De la proposition précédente, $\widehat{\phi} + \hat{J}$ est surjectif, donc pour tout $v_0 \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$, il existe $u_1 \in D_L$ tel que

$$\widehat{\phi}(u_1) + \hat{J}(u_1) = v_0 + \hat{J}(u_0). \tag{3.1.23}$$

Donc, (3.1.22) devient

$$\langle \widehat{\phi}(u) - \widehat{\phi}(u_1) + \hat{J}(u_0) - \hat{J}(u_1), u - u_0 \rangle \geq 0\,, \quad \forall\, u \in D(\widehat{\phi}).$$

En particulier, en choisissant $u = u_1$, on obtient

$$\langle \hat{J}(u_0) - \hat{J}(u_1), u_1 - u_0 \rangle \geq 0\,,$$

et donc, par la stricte monotonie de $\hat{J}$, $u_0 = u_1 \in D_L$, et de l'équation (3.1.22), on obtient $v_0 = \widehat{\phi}(u_1)$. Par conséquent, $\widehat{\phi}$ est maximal monotone. ■

3.2 Résultats d'existence

Maintenant, nous allons étudier l'existence de solution du problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} (\phi(u'(t)))' \in F(t, u(t), u'(t)), & \text{p.p sur } I = [0, T], \\ L(u(0), u(T), u'(0), u'(T)) = 0. \end{cases}$$

3.2.1 Cas convexe

Dans cette section on va présenter la version convexe des résultats d'existence. Dans ce cas considérons les hypothèses suivantes sur la multiapplication F.

$H(F)$ $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ une multiapplication à valeurs non vides compactes et convexes vérifiant

(i) pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, $F(\cdot, x, y)$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable ;

(ii) pour presque tout $t \in I$, $F(t, \cdot, \cdot)$ est à graphe fermé ;

(iii) il existe deux fonctions $\gamma_1, \gamma_2 : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ telles que, pour presque tout $t \in I$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $v \in F(t, x, y)$, on a

$$|v| \leq \gamma_1(t, |x|) + \gamma_2(t, |x|)\, |y|^{p-1},$$

avec $\sup\{\gamma_1(t, r) \;:\; 0 \leq r \leq k\} \leq \xi_{1,k}(t)$, p.p sur I, $\xi_{1,k} \in L^2(I, \mathbb{R}_+)$ et $\sup\{\gamma_2(t, r) \;:\; 0 \leq r \leq k\} \leq \xi_{2,k}(t)$, p.p sur I, $\xi_{2,k} \in L^\infty(I, \mathbb{R}_+)$;

(iv) si $m(t, x, y) = \inf\{\langle v, x\rangle \;:\; v \in F(t, x, y)\}$, alors on a

$$\liminf_{|x| \to +\infty} \left(\inf_{y \in \mathbb{R}^N} \frac{m(t, x, y)}{|x|^p} \right) \geq -\theta_1(t),$$

uniformément pour presque tout $t \in I$, avec $\theta_1 \in L^\infty(I, \mathbb{R}_+)$, $\|\theta_1\|_\infty < \beta\lambda_1$ ($\beta > 0$ est le nombre positive dans l'hypothèse $H(\phi)(ii)$), et λ_1 est donné par

$$\lambda_1 = \min\left\{ \frac{\|x'\|_p^p}{\|x\|_p^p}\ ,\ x \in W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)\ ,\ x \neq 0 \right\}.$$

$H(F)_1$ $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est une multiapplication à valeurs non vides compactes est convexes telle que $H(F)(i) - (iii)$ sont vérifiées et

(v) pour presque tout $t \in I$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $w \in F(t, x, y)$, on a

$$\langle w, x\rangle \geq -\mu\, |x|^p - \gamma\, |x|^r\, |y|^{p-r} - c_1(t)\, |x|^s, \quad (p \geq 2),$$

avec $\gamma, \mu \geq 0$, $1 \leq r, s < p$ et $c_1 \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$;

(vi) il existe $M > 0$ tel que si $|x_0| > M$ et $\langle x_0, y_0\rangle = 0$, on peut trouver $\delta > 0$ et $c_2 > 0$ tel que pour presque tout $t \in I$, on a

$$\inf\left\{\langle w, x\rangle + \beta\, |y|^p \;:\; |x - x_0| + |y - y_0| < \delta,\ w \in F(t, x, y)\right\} \geq c_2\ .$$

Tout d'abord, on va donner une proposition qu'on va utiliser ultérieurement, prise de [25].

Proposition 3.2.1. *Soit $N : W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N) \rightrightarrows L^q(I, \mathbb{R}^N)$ une multiapplication définie par*

$$N(u) = \{v \in L^q(I, \mathbb{R}^N) \;:\; v(t) \in F(t, u(t), u'(t))\ ,\ p.p\ sur\, I\} := S^p_{F(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))}.$$

Si $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est une multiapplication qui vérifie l'hypothèse $H(F)$, alors N est s.c.s de $W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ vers $(L^q(I, \mathbb{R}^N))_w$ (c'est à dire s.c.s de $W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$ muni de la topologie faible) à valeurs non vides, fermées, convexes et bornées.

Démonstration

Soit $u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$. Montrons que $N(u)$ est convexe et fermé dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$.

Soient $f_1, f_2 \in N(u)$ et $\lambda \in [0,1]$ et soit $t \in I$. Alors, pour presque tout $t \in I$, $f_1(t), f_2(t) \in F(t, u(t), u'(t))$ qu'est convexe, d'où

$$\lambda f_1(t) + (1-\lambda) f_2(t) \in F(t, u(t), u'(t))\,,$$

ce qui implique la convexité de $N(u)$.

D'autre part, soit $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset N(u)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$. Alors par la Proposition 1.5.7, il existe un sous ensemble $I_0 \subset I$ tel que $m(I_0) = 0$ et pour tout $t \in I \backslash I_0$, on a

$$f_n(t) \to f(t) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N\,,$$

et puisque $\{f_n(t)\}_{n\geq 1} \subset F(t, u(t), u'(t))$ presque partout, et $F(t, u(t), u'(t))$ est fermée, on aura

$$f(t) \in F(t, u(t), u'(t)) \quad \text{p.p sur } I\,.$$

D'où, $f \in N(u)$ ce qui montre la fermeture de $N(u)$.

Pour vérifier que $N(u) \neq \emptyset, \forall\, u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$. Soit $u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ et on sélectionne (voir le Théorème 1.2.7) deux suites de fonctions simples $\{r_n\}_{n\geq 1}$ et $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset L^q(I, \mathbb{R}^N)$ telles que

$$|r_n(t)| \leq |u(t)| \quad \text{et} \quad |s_n(t)| \leq |u'(t)| \quad \text{p.p sur } I\,, \tag{3.2.1}$$

et vérifiant $r_n(t) \to u(t)$, $s_n(t) \to u'(t)$, p.p sur I quand $n \to +\infty$.

Soit $K_n(t) = F(t, r_n(t), s_n(t))$, par $H(F)(i)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, K_n est une multiapplication mesurable à valeurs fermées, donc par le Théorème 1.10.14, K_n admet une sélection mesurable $v_n : I \to \mathbb{R}^N$ telle que $v_n(t) \in F(t, r_n(t), s_n(t))$, pour tout $t \in I$.

De $H(F)(iii)$ et (3.2.1), on a

$$\begin{array}{rcll} |v_n(t)| & \leq & \xi_{1,M'}(t) + \xi_{2,M'}(t)|s_n(t)|^{p-1} & \quad \text{avec } \|u\|_C = M'\,, \\ & \leq & \xi_{1,M'}(t) + \xi_{2,M'}(t)|u'(t)|^{p-1} & \quad \text{p.p sur } I\,. \end{array}$$

Alors, $\{v_n\}_{n\geq 1}$ est une suite bornée dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$, et donc, on peut lui extraire une sous suite faiblement convergente.

Sans perdre de généralités, supposons que $v_n \rightharpoonup v$ dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$. Par le théorème de Banach Mazur (Théorème 1.8.6), il existe une autre suite $\{w_n\}_{n\geq 1}$ fortement convergente vers v dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$, où $w_n \in co\{v_i \,:\, i \geq n\}$, pour tout $n \geq 1$. Soit

$$E_1 = \{t \in I \,:\, r_n(t) \to u(t)\,,\ s_n(t) \to u'(t)\,,\ \text{et } w_n(t) \to v(t)\}\,,$$

alors, E_1 est un ensemble mesurable de I et $I \setminus E_1$ est négligeable.
Pour chaque $\varepsilon > 0$ et $t \in E_1$, comme $F(t, \cdot, \cdot)$ est s.c.s, alors par la Proposition 1.10.7, $F(t, \cdot, \cdot)$ est ε-s.c.s, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(t, x, y) \subset F(t, u(t), u'(t)) + B(0, \varepsilon), \quad \text{pour tout}\, x, y \in B((u(t), u'(t)), \delta).$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, on obtient

$$F(t, r_n(t), s_n(t)) \subset F(t, u(t), u'(t)) + B(0, \varepsilon),$$

d'où

$$v_n(t) \in F(t, u(t), u'(t)) + B(0, \varepsilon).$$

Par la convexité de $F(t, u(t), u'(t))$ et $B(0, \varepsilon)$, on aura

$$w_n(t) \in F(t, u(t), u'(t)) + B(0, \varepsilon)\ ,$$

pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire et puisque $w_n(t) \to v(t)$, on aura $v(t) \in \overline{F(t, u(t), u'(t))} = F(t, u(t), u'(t))$ pour tout $t \in E_1$, qui signifie que $N(u)$ est non vide.

On va montrer maintenant que N est s.c.s de $W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ vers $(L^q(I, \mathbb{R}^N))_w$, pour cela, il suffit de montrer que, pour tout ensemble $E \subset L^q(I, \mathbb{R}^N)$ faiblement fermé, $N^{-1}(E) = \{u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)\ :\ N(u) \cap E \neq \emptyset\}$ est fermé.
Soit $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset N^{-1}(E)$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$, c'est à dire, il existe $v_n \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$ telle que $v_n \in N(u) \cap E$. Alors, pour presque tout $t \in I$, on a $v_n(t) \in F(t, u_n(t), u_n'(t))$.
Comme $u_n \to u$ dans $W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$, alors il existe $M_1 > 0$ tel que $\|u_n\|_C \leq M_1$, pour tout $n \geq 1$. Par $H(F)(iii)$, on aura

$$|v_n(t)| \leq \xi_{1,M_1}(t) + \xi_{2,M_1}(t)|u_n'(t)|^{p-1} = \theta_n(t)\, ,\ \text{p.p sur}\, I\, ,$$

alors, $\{\theta_n\}_{n\geq 1} \subset L^q(I, \mathbb{R}^N)$ est bornée, d'où $\{v_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$. Par suite, on peut lui extraire une sous suite faiblement convergente vers $v \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$ telle que $v \in N(u) \cap E$. Alors, $u \in N^{-1}(E)$ qui veut dire que $N^{-1}(E)$ est fermé dans $W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$, et donc N est s.c.s.

Finalement, de $H(F)(iii)$, on obtient que N est à valeurs bornées. En effet, pour tout $u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ et $v \in N(u)$ et pour presque tout $t \in I$, on a

$$|v(t)| \leq \xi_{1,k}(t) + \xi_{2,k}(t)|u'(t)|^{p-1}, \qquad \text{avec}\ k = \|u\|_C\, .$$

D'où

$$\|v\|_q \leq \|\xi_{1,k}\|_q + \|\xi_{2,k}|u'(\cdot)|^{p-1}\|_q\ .$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|v\|_q \leq \|\xi_{1,k}\|_q + \|\xi_{2,k}\|_\infty \|u'\|_p^{p-1},$$

d'où, $N(u)$ est borné dans $L^q(I,\mathbb{R}^N)$. ■

Proposition 3.2.2. *Si les hypothèses $H(\phi)$ et $H(F)$ sont vérifiées, alors le problème*

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' \in F(t,u(t),u'(t)), & p.p \text{ sur } I, \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

admet une solution $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$.

Proposition 3.2.3. *Si les hypothèses $H(\phi)_2$ et $H(F)_1$ sont vérifiées, alors le problème*

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' \in F(t,u(t),u'(t)), & p.p \text{ sur } I, \\ u(0) = u'(T) = 0, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

admet une solution $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$.

Proposition 3.2.4. *Si les hypothèses $H(\phi)_3$ et $H(F)_1$ sont vérifiées, alors le problème*

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' \in F(t,u(t),u'(t)), & p.p \text{ sur } I, \\ u'(0) = u'(T) = 0, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

admet une solution $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$.

On va donner la démonstration des trois propositions dans une seule preuve.

Démonstration

Soit $U : D_L \subset L^p(I,\mathbb{R}^N) \to L^q(I,\mathbb{R}^N)$ tel que $U = \widehat{\phi} + \widehat{J}$. On a $\widehat{\phi}$ et $\hat{J}$ sont maximaux monotones, donc du Théorème 1.11.8, U est maximal monotone. De plus, pour tout $u \in D_L$ on a

$$\begin{aligned} \langle U(u), u \rangle &= \langle \widehat{\phi}(u), u \rangle + \langle \widehat{J}(u), u \rangle \\ &\geq \beta \|u'\|_p^p + \|u\|_p^p \geq \min\{\beta, 1\} \|u\|_{W^{1.p}}^p = \beta' \|u\|_{W^{1.p}}^p \,, \end{aligned}$$

avec $\beta' = \min\{\beta, 1\}$, alors

$$\frac{\langle U(u), u \rangle}{\|u\|_{W^{1.p}}} \geq \beta' \|u\|_{W^{1.p}}^{p-1} \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|u\|_{W^{1.p}} \to +\infty,$$

c'est à dire, U est cœrcive. D'où par le Corollaire 1.11.9, on obtient que U est un opérateur surjective. En outre, la monotonie stricte de $\hat{J}$ implique l'injectivité de U, d'où U est bijectif. En effet, soient $u_1, u_2 \in D_L$ tels que $\langle U(u_1) - U(u_2), u_1 - u_2 \rangle = 0$, alors

$$\langle \widehat{\phi}(u_1) + \hat{J}(u_1) - \widehat{\phi}(u_2) - \hat{J}(u_2), u_1 - u_2 \rangle = 0\,,$$

cela implique

$$\langle \hat{J}(u_1) - \hat{J}(u_2), u_1 - u_2 \rangle = -\langle \widehat{\phi}(u_1) - \widehat{\phi}(u_2), u_1 - u_2 \rangle \leq 0\,,$$

donc, de la monotonie stricte de $\hat{J}$, on aura $u_1 = u_2$. D'où, U est injectif.

Donc, l'opérateur inverse U^{-1} existe, c'est à dire $U^{-1} : L^q(I, \mathbb{R}^N) \to D_L \subset L^p(I, \mathbb{R}^N)$ est bien défini.

Étape 1 : l'opérateur U^{-1} est complètement continu.

En effet, supposons que $g_n \rightharpoonup g$ dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$, et $u_n = U^{-1}(g_n),\ u = U^{-1}(g)$. Alors

$$\begin{cases} -(\phi(u_n'(t)))' + |u_n(t)|^{p-2}u_n(t) = g_n(t), \quad \text{p.p sur } I, \\ L(u_n(0), u_n(T), u_n'(0), u_n'(T)) = 0. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

En multipliant la première ligne de (3.2.5) par $u_n(t)$, on obtient

$$\langle -(\phi(u_n'(t)))' + |u_n(t)|^{p-2}u_n(t), u_n(t) \rangle = \langle g_n(t), u_n(t) \rangle.$$

En intégrant sur $[0, T]$, on aura

$$\int_0^T \langle -(\phi(u_n'(t)))', u_n(t) \rangle dt = \int_0^T \langle g_n(t) - |u_n(t)|^{p-2}u_n(t), u_n(t) \rangle dt.$$

Soit $G = \int_0^T \langle -(\phi(u_n'(t)))', u_n(t) \rangle dt$, en intégrant par parties et en utilisant les conditions de la deuxième ligne de (3.2.5), on obtient

$$G = \int_0^T \langle \phi(u_n'(t)), u_n'(t) \rangle dt,$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \phi(u_n'(t)), u_n'(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle g_n(t), u_n(t) \rangle dt - \int_0^T \langle |u_n(t)|^{p-2}u_n(t), u_n(t) \rangle dt \\ &\leq \int_0^T |g_n(t)|\, |u_n(t)| dt - \int_0^T |u_n(t)|^p dt \\ &\leq \|g_n\|_q \, \|u_n\|_p - \|u_n\|_p^p\,, \end{aligned}$$

la dernière inégalité est obtenue en utilisant l'inégalité de Hölder. D'autre part, $H(\phi)(ii)$ donne $\langle \phi(u_n'(t)), u_n'(t) \rangle \geq \beta |u_n'(t)|^p$, alors on obtient

$$\beta \|u_n'\|_p^p \leq \|g_n\|_q \, \|u_n\|_p - \|u_n\|_p^p\,,$$

cela implique

$$\beta\|u_n'\|_p^p + \|u_n\|_p^p \leq \|g_n\|_q \, \|u_n\|_p \, . \tag{3.2.6}$$

Comme $\{g_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^q(I,\mathbb{R}^N)$, c'est à dire

$$\exists\, k>0, \text{ tel que } \|g_n\|_q < k\,, \quad \forall\, n \geq 1, \tag{3.2.7}$$

et

$$\beta\|u_n'\|_p^p + \|u_n\|_p^p \geq \min\{\beta,1\}\|u_n\|_{W^{1.p}}^p = \beta'\|u_n\|_{W^{1.p}}^p, \tag{3.2.8}$$

alors, en remplaçant (3.2.7) et (3.2.8) dans (3.2.6), on obtient

$$\beta'\|u\|_{W^{1.p}}^p \leq k\|u_n\|_p \Longrightarrow \|u_n\|_{W^{1.p}}^p \leq \frac{k}{\beta'} \qquad (p \geq 2).$$

D'où, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$, par conséquent $\{u_n\}_{n\geq 1}$ est relativement compact dans $C(I,\mathbb{R}^N)$. En outre, par la première ligne de (3.2.5), la suite $\{(\phi(u_n'(t)))'\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^q(I,\mathbb{R}^N)$.

Maintenant, on va montrer que $\{u_n'\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C(I,\mathbb{R}^N)$, pour chaque problème.

Pour le problème (3.2.2), en intégrant (3.2.5) sur $[0,t]$, on obtient

$$-\phi(u_n'(t)) + \phi(u_n'(0)) = \int_0^t \Big(-|u_n(s)|^{p-2}\, u_n(s) + g_n(s)\Big) ds, \quad t \in I,$$

alors

$$\phi(u_n'(t)) = \phi(u_n'(0)) + \int_0^t \Big(|u_n(s)|^{p-2}\, u_n(s) - g_n(s)\Big) ds\,, \quad t \in I.$$

Soit $h(u_n)(t) = |u_n(t)|^{p-2}\, u_n(t) - g_n(t)$, alors $h(u_n) \in L^q(I,\mathbb{R}^N)$, pour tout $n \geq 1$, puisque $\hat{J}(u_n)$ et $g_n \in L^q(I,\mathbb{R}^N)$, et par la Proposition 3.1.3, on a

$$u_n'(t) = \phi^{-1}\big(Q_\phi(H(h(u_n))) - H(h(u_n))(t)\big)\,, \quad t \in I.$$

On a $\{h(u_n)\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^q(I,\mathbb{R}^N)$, $\{H(h(u_n))\}_{n\geq 1}$ et $\{Q_\phi(H(h(u_n)))\}_{n\geq 1}$ sont bornées dans $C(I,\mathbb{R}^N)$ (voir Chapitre 2), et comme ϕ^{-1} est continue, alors $\{u_n'\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C(I,\mathbb{R}^N)$.

Pour les problèmes (3.2.3) et (3.2.4), en intégrant (3.2.5) sur $[t,T]$ et sur $[0,t]$, respectivement, on obtient (pour le problème (3.2.3))

$$-\phi(u_n'(T)) + \phi(u_n'(t)) = \int_t^T \Big(-|u_n(s)|^{p-2}\, u_n(s) + g_n(s)\Big) ds\,, \quad t \in I,$$

donc

$$\phi(u_n'(t)) = \int_t^T \Big(- |u_n(s)|^{p-2}\, u_n(s) + g_n(s)\Big) ds\,, \quad t \in I.$$

En multipliant par $u_n'(t)$, on aura

$$\langle \phi(u_n'(t)), u_n'(t)\rangle = \int_t^T \langle -|u_n(s)|^{p-2}\, u_n(s) + g_n(s), u_n'(t)\rangle ds.$$

$H(\phi)(ii)$ donne $\langle \phi(u_n'(t)), u_n'(t)\rangle \geq \beta |u_n'(t)|^p$, pour tout $t \in I$, alors

$$\begin{aligned}
\beta |u_n'(t)|^p &\leq \int_t^T \langle -|u_n(s)|^{p-2}\, u_n(s), u_n'(t)\rangle + \int_t^T \langle g_n(s), u_n'(t)\rangle ds \\
&\leq \int_t^T |u_n(s)|^{p-1} |u_n'(t)|\, ds + \int_t^T |g_n(s)|\, |u_n'(t)|\, ds \\
&\leq |u_n'(t)| \Big(\int_0^T |u_n(s)|^{p-1} ds + \int_0^T |g_n(s)|\, ds\Big) = |u_n'(t)| \, \big(\|u_n\|_p^{p-1} + \|g_n\|_1 \big).
\end{aligned}$$

D'où, $\beta |u_n'(t)|^p \leq |u_n'(t)| \, \big(\|u_n\|_p^{p-1} + \|g_n\|_1 \big)$, pour tout $t \in I$. Alors il existe une constante $L > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$

$$\beta |u_n'(t)|^p \leq L\, |u_n'(t)| \Longrightarrow |u_n'(t)|^{p-1} \leq \frac{L}{\beta}\,, \qquad \forall\, t \in I.$$

Donc, $\{u_n'\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$.
Par conséquent, par la continuité de ϕ, on a $\{\phi(u_n')\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $C(I, \mathbb{R}^N)$ (bien sûr dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$), donc elle est bornée dans $W^{1.q}(I, \mathbb{R}^N)$, d'où elle est relativement compact dans $C(I, \mathbb{R}^N)$. Par suite, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ est relativement compact dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$.
On peut supposer que $u_n \longrightarrow \overline{u}$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$, $\overline{u}$ satisfait les conditions aux limites de chacun des problèmes (3.2.2), (3.2.3) et (3.2.4), c'est à dire $u_n(0) \longrightarrow \overline{u}(0)\,,\ u_n(T) \longrightarrow \overline{u}(T)\,,\ u_n'(0) \longrightarrow \overline{u'}(0)\,,\ u_n'(T) \longrightarrow \overline{u'}(T)$.
Supposons que $\phi(u_n') \rightharpoonup z$ dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$. Pour tout $\psi \in C_0^1(I, \mathbb{R}^N)$, d'un côté,

$$- \int_0^T \langle (\phi(u_n'(t)))', \psi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle |u_n(t)|^{p-2} u_n(t), \psi(t)\rangle dt = \int_0^T \langle g_n(t), \psi(t)\rangle dt,$$

et d'un autre côté,

$$- \int_0^T \langle (\phi(u_n'(t)))', \psi(t)\rangle dt = \int_0^T \langle \phi(u_n'(t)), \psi'(t)\rangle dt.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on aura

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \phi(\overline{u'}(t)), \psi'(t)\rangle dt &= -\int_0^T \langle |\overline{u}(t)|^{p-2}\overline{u}(t), \psi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle g(t), \psi(t)\rangle dt \\ &= -\int_0^T \langle z(t), \psi(t)\rangle dt.\end{aligned}$$

D'où

$$-\int_0^T \langle (\phi(\overline{u'(t)}))', \psi(t)\rangle dt = \int_0^T \langle z(t), \psi(t)\rangle dt,$$

puisque ψ est arbitraire dans $C_0^1(I, \mathbb{R}^N)$, on aura

$$z(t) = (\phi(u_n'(t)))' = |\overline{u}(t)|^{p-2}\overline{u}(t) - g(t)\,, \quad \text{p.p sur } I.$$

Cela signifie que $\overline{u}$ vérifie (3.2.5), c'est à dire $\overline{u} = U^{-1}(g) = u$. Ainsi, $U^{-1}(g_n) \longrightarrow U^{-1}(g)$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^N)$, et bien sûr dans $W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$, donc U^{-1} est complètement continu.

Étape 2 : soit $N_2 : W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N) \rightrightarrows L^q(I, \mathbb{R}^N)$ une multiapplication définie par

$$\begin{aligned}N_2(u) &= -N(u) + \hat{J}(u) \\ &= \{h \in L^q(I, \mathbb{R}^N) \ : \ h(t) \in -F(t, u(t), u'(t)) + |u(t)|^{p-2}\, u(t)\,, \text{ p.p sur } I\},\end{aligned}$$

pour tout $u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$.

Alors, la multiapplication N_2 est à valeurs non vides faiblement compactes et convexes dans $L^q(I, \mathbb{R}^N)$, de plus elle est s.c.s de $W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ vers $(L^q(I, \mathbb{R}^N))_w$ (c'est à dire $L^q(I, \mathbb{R}^N)$ muni de la topologie faible).

En effet, de la Proposition 3.2.1, on a la multiapplication N est à valeurs non vides, fermées, convexe et s.c.s, donc N_2 l'est aussi, de plus $\hat{J}$ est continue et par $H(F)(iii)$ on aura $N_2(u)$ est bornée, pour tout $u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$, d'où du Corollaire 1.4.15, $N_2(u)$ est faiblement compacte, pour tout $u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$.

Étape 3 : maintenant, nous considérons séparément les différents problèmes.

- On commence par le problème (3.2.2). Soit $U^{-1} \circ N_2 : W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N) \rightrightarrows W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ qui satisfait toutes les conditions mentionnée dans le Théorème 1.9.9. Soit l'ensemble

$$S = \{u \in W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N) \ : \ u \in \lambda U^{-1}(N_2(u))\,, 0 < \lambda < 1\}.$$

  Dans la suite on va montrer que S est borné.

  Soit $u \in S$, alors $u \in \lambda U^{-1}(N_2(u))$, donc $\lambda^{-1}u \in U^{-1}(N_2(u))$, par suite $U(\lambda^{-1}u) \in N_2(u)$, d'où il existe $f \in N(u)$ telle que

$$-\,(\phi(\lambda^{-1}u'(t)))' + \frac{1}{\lambda^{p-1}}|u(t)|^{p-2}u(t) = -f(t) + |u(t)|^{p-2}u(t)\,, \text{ p.p sur } I. \qquad (3.2.9)$$

En vertu à l'hypothèse $H(F)(iv)$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $M_1 = M(\varepsilon)$, tel que pour presque tout $t \in I$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| \geq M_1$, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $v \in -F(t,x,y)$, on a

$$\langle v, x\rangle < (\theta_1(t) + \varepsilon)|x|^p \,. \tag{3.2.10}$$

En effet, si on pose $l = \liminf\limits_{|x|\to+\infty} \left(\inf_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{m(t,x,y)}{|x|^p}\right)$, alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M_{(\varepsilon)} > 0, \text{ pour presque tout}\, t \in I,\, \forall\, x \in \mathbb{R}^N, |x| \geq M_{(\varepsilon)};\, \inf_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{m(t,x,y)}{|x|^p} - l > -\varepsilon \,,$$

donc, de $H(F)(iv)$, on a

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{m(t,x,y)}{|x|^p} > l - \varepsilon > \theta_1(t) - \varepsilon \,,$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_{(\varepsilon)} > 0$, tel que pour presque tout $t \in I$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| \geq M_{(\varepsilon)}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, il existe $u \in F(t,x,y)$ tel que

$$\frac{\langle u, x\rangle}{|x|^p} > -\theta_1(t) - \varepsilon \,,$$

qui implique

$$\langle u, x\rangle > -|x|^p(\theta_1(t) + \varepsilon) \,, \quad \text{donc} \quad \langle -u, x\rangle < |x|^p(\theta_1(t) + \varepsilon) \,.$$

Soit $v = -u$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_1 = M_{(\varepsilon)} > 0$, tel que pour presque tout $t \in I$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| \geq M_1$, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $v \in -F(t,x,y)$, on a

$$\langle v, x\rangle < |x|^p(\theta_1(t) + \varepsilon) \,.$$

Aussi, par l'hypothèse $H(F)(iii)$, pour presque tout $t \in I$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| \leq M_1$, tout $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $v \in -F(t,x,y)$, on a

$$\langle v, x\rangle \leq |v|\,|x| \leq M_1\, \xi_{1,M_1}(t) + M_1\, \xi_{2,M_1}(t)\, |y|^{p-1} \,, \tag{3.2.11}$$

donc, de (3.2.10) et (3.2.11), pour presque tout $t \in I$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $v \in -F(t, u(t), u'(t))$, on a

$$\langle v, x\rangle \leq (\theta_1(t) + \varepsilon)|x|^p + \mu_1(t)\, |y|^{p-1} + \mu_2(t), \tag{3.2.12}$$

tel que $\mu_1 = M_1\, \xi_{2,M_1} \in L^\infty(I, \mathbb{R}_+)$ et $\mu_2 = M_1\, \xi_{1,M_1} \in L^2(I, \mathbb{R}_+)$.

En multipliant (3.2.9) par $u(t)$, on obtient

$$\langle -(\phi(\lambda^{-1}u'(t)))' + \frac{1}{\lambda^{p-1}}|u(t)|^{p-2}u(t), u(t)\rangle = \langle -f(t) + |u(t)|^{p-2}u(t), u(t)\rangle.$$

En intégrant sur $[0,T]$, on aura

$$-\int_0^T \big\langle (\phi(\lambda^{-1}u'(t)))', u(t)\big\rangle dt + \frac{1}{\lambda^{p-1}}\int_0^T \langle |u(t)|^{p-2}u(t), u(t)\rangle dt = \int_0^T \langle -f(t)+|u(t)|^{p-2}u(t), u(t)\rangle dt. \tag{3.2.13}$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^T \big\langle \phi(\lambda^{-1}u'(t)), u'(t)\big\rangle dt + \frac{1}{\lambda^{p-1}}\int_0^T \langle |u(t)|^{p-2}u(t), u(t)\rangle dt = \int_0^T \langle -f(t), u(t)\rangle dt + \int_0^T |u(t)|^p dt. \tag{3.2.14}$$

De $H(\phi)(ii)$

$$\beta|\frac{1}{\lambda}u'(t)|^p \leq \big\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)), \frac{1}{\lambda}u'(t)\big\rangle,$$

cela implique

$$\frac{\beta}{\lambda^{p-1}}\|u'\|_p^p \leq \lambda \int_0^T \big\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)), \frac{1}{\lambda}u'(t)\big\rangle dt. \tag{3.2.15}$$

D'autre part, on a $f \in N(u)$, alors $-f \in -N(u)$, donc de (3.2.12)

$$\int_0^T \langle -f(t), u(t)\rangle dt \leq \int_0^T (\theta_1(t)+\varepsilon)|u(t)|^p dt + \int_0^T \mu_1(t)\,|u'(t)|^{p-1}dt + \int_0^T \mu_2(t)dt.$$

D'où

$$\frac{\beta}{\lambda^{p-1}}\|u'\|_p^p + \frac{1}{\lambda^{p-1}}\|u\|_p^p \leq \int_0^T (\theta_1(t)+\varepsilon)|u(t)|^p dt + \|\mu_1\|_\infty \int_0^T |u'(t)|^{p-1}dt + \|\mu_2\|_1 + \|u\|_p^p.$$

De plus, on a par l'inégalité de Hölder

$$\int_0^T |u'(t)|^{p-1}dt = \Big(\int_0^T dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^T |u'(t)|^{(p-1)q}dt\Big)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[p]{T}\Big(\int_0^T |u'(t)|^p dt\Big)^{\frac{p-1}{q}} = \sqrt[p]{T}\|u'\|_p^{p-1}.$$

Donc, il existe $k_1 = \sqrt[p]{T}$ tel que

$$\frac{\beta}{\lambda^{p-1}}\|u'\|_p^p + \frac{1}{\lambda^{p-1}}\|u\|_p^p \leq \int_0^T (\theta_1(t)+\varepsilon)|u(t)|^p dt + k_1\|\mu_1\|_\infty\|u'\|_p^{p-1} + \|\mu_2\|_1 + \|u\|_p^p,$$

comme $\lambda \in]0,1[$

$$\beta\|u'\|_p^p + \|u\|_p^p \leq \int_0^T (\theta_1(t)+\varepsilon)|u(t)|^p dt + k_1\|\mu_1\|_\infty\|u'\|_p^{p-1} + \|\mu_2\|_1 + \|u\|_p^p,$$

alors

$$\beta\|u'\|_p^p - \int_0^T (\theta_1(t)+\varepsilon)|u(t)|^p dt \leq k_1\|\mu_1\|_\infty \|u'\|_p^{p-1} + \|\mu_2\|_1 \,. \tag{3.2.16}$$

On montre qu'il existe $k_2 > 0$ tel que, pour tout $u \in W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$, on aura

$$\beta\|u'\|_p^p - \int_0^T \theta_1(t)\,|u(t)|^p dt \geq k_2\|u'\|_p^p \,. \tag{3.2.17}$$

On a $\theta_1 \in L^\infty(I,\mathbb{R}_+)$ et $\|\theta_1\|_\infty < \beta\lambda_1$, alors il existe $\beta' > 0$ tel que $\theta_1(t) \leq \beta'\lambda_1$ p.p sur I et $\beta' < \beta$, donc

$$-\int_0^T \theta_1(t)|u(t)|^p dt \geq -\beta'\lambda_1 \int_0^T |u(t)|^p dt = -\beta'\lambda_1\,\|u\|_p^p \,.$$

D'autre part, de $H(F)(iv)$

$$\lambda_1 = \min\left\{\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_p^p}\,, u \in W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)\,, u \neq 0\right\}\,,$$

alors

$$\begin{aligned} -\lambda_1 &= -\min\left\{\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_p^p}\,, u \in W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)\,, u \neq 0\right\} \\ &= \max\left\{-\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_p^p}\,, u \in W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)\,, u \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

Par suite

$$-\lambda_1 \geq -\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_p^p}\,, \quad \forall\, u \in W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)\,,\, u \neq 0\,,$$

et donc

$$-\beta'\lambda_1\|u\|_p^p \geq -\beta'\|u'\|_p^p \,.$$

D'où

$$\beta\|u'\|_p^p - \int_0^T \theta_1(t)|u(t)|^p dt \geq (\beta-\beta')\|u'\|_p^p = k_2\|u'\|_p^p\,,$$

tel que $k_2 = \beta - \beta' > 0$.

En utilisant (3.2.17) dans (3.2.16), on obtient

$$k_2\|u'\|_p^p - \varepsilon\|u\|_p^p \leq k_1\|\mu\|_\infty\,\|u'\|_p^{p-1} + \|\mu_2\|_1 \,.$$

Si on prend $k_3 = k_1\|\mu\|_\infty > 0$ et $k_4 = \|\mu_2\|_1$, on aura

$$k_2\|u'\|_p^p - \varepsilon\|u\|_p^p \leq k_3\|u'\|_p^{p-1} + k_4 \,.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\exists\, c > 0 \text{ tel que } \|u\|^p_{W^{1.p}} \leq c^p \|u'\|^p_p\,, \quad \forall\, u \in W^{1.p}_0(I,\mathbb{R}^N)\,,$$

alors, il existe $k_5 = c^p > 0$ tel que

$$k_2\|u\|^p_{W^{1.p}} \leq k_5\varepsilon\|u'\|^p_p + k_5k_3\|u'\|^{p-1}_p + k_5k_4\,.$$

Considérons que $\varepsilon > 0$ est très petit tel que $\varepsilon < \frac{k_2}{k_5}$, alors

$$\|u\|^p_{W^{1.p}} \leq k_6\|u'\|^{p-1}_p + k_7\,,$$

tel que $k_6 = \|u'\|_p + \frac{k_5}{k_2}k_3 > 0$ et $k_7 = \frac{k_5}{k_2}k_4 > 0$. D'où, comme $u \in W^{1.p}_0(I,\mathbb{R}^N)$ est arbitraire, alors S est borné dans $W^{1.p}_0(I,\mathbb{R}^N)$.

En vertu du Théorème 1.9.9, la multiapplication $U^{-1} \circ N_2$ admet un point fixe $u \in W^{1.p}_0(I,\mathbb{R}^N)$ tel que $u \in U^{-1}(N_2(u))$. D'où, $u \in D_L \subset C^1(I,\mathbb{R}^N)$ est la solution du problème (3.2.2).

- Maintenant, on considère les deux problèmes (3.2.3) et (3.2.4). Soit l'ensemble

$$S' = \{u \in W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)\ :\ u \in \lambda U^{-1}(N_2(u))\,,\ 0 < \lambda < 1\},$$

et montrons que S' est borné.

Fixons $u \in S'$, alors il existe $f \in N(u)$ tel que $U(\lambda^{-1}u) = -f + \hat{J}(u)$. En multipliant par $u(t)$ et en intégrant sur $[0,T]$, on obtient

$$\int_0^T \big\langle U(\lambda^{-1}u(t)), u(t)\big\rangle dt = \int_0^T \langle -f(t) + \widehat{J}(\lambda^{-1}u)(t), u(t)\rangle dt\,,$$

donc

$$\int_0^T \big\langle -(\phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)))', u(t)\big\rangle dt + \int_0^T \big\langle |\frac{1}{\lambda}u(t)|^{p-2}u(t), u(t)\big\rangle dt$$
$$= \int_0^T \langle -f(t), u(t)\rangle dt + \int_0^T \langle |u(t)|^p u(t), u(t)\rangle dt.$$

En intégrant par parties, on aura

$$\int_0^T \langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)), u'(t)\big\rangle dt + \frac{1}{\lambda^{p-2}}\int_0^T \big\langle |u(t)|^{p-2}u(t), u(t)\big\rangle dt$$
$$= \int_0^T \langle -f(t), u(t)\rangle dt + \int_0^T \langle |u(t)|^p u(t), u(t)\rangle dt.$$

En utilisant $H(\phi)(ii)$, on obtient

$$\frac{\beta}{\lambda^{p-1}}\|u'\|_p^p + \frac{1}{\lambda^{p-1}}\|u\|_p^p \leq -\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt + \|u\|_p^p\,,$$

cela implique

$$\beta\|u'\|_p^p + \|u\|_p^p \leq -\lambda^{p-1}\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt + \lambda^{p-1}\|u\|_p^p\,,$$

comme $0 < \lambda < 1$, alors on obtient

$$\beta\|u'\|_p^p \leq -\lambda^{p-1}\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt\,. \tag{3.2.18}$$

En utilisant $H(F)_1(v)$, on aura

$$-\lambda^{p-1}\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt \leq \lambda^{p-1}\mu\int_0^T |u(t)|^p dt + \lambda^{p-1}\gamma\int_0^T |u(t)|^r|u'(t)|^{p-r}dt + \lambda^{p-1}\int_0^T c_1(t)|u(t)|^s dt\,.$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$-\lambda^{p-1}\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt \leq \lambda^{p-1}\mu\|u\|_p^p + \lambda^{p-1}\gamma\|u\|_q^r\|u'\|_p^{p-r} + \lambda^{p-1}\|c_1\|_1\|u\|_\infty^s. \tag{3.2.19}$$

On va montrer que, pour tout $u \in S'$ et pour tout $t \in I$ alors $|u(t)| \leq M$ avec M est la constante dans la condition $H(F)_1(vi)$, pour cela on montre par l'absurde, c'est à dire, supposons le contraire : il existe $u \in S'$ et il existe $t_0 \in I$ tels que $|u(t_0)| > M$.
Posons $\theta(t) = |u(t)|^p$ et soit $t_0 \in [0, T]$ telle que $\theta(t_0) = \max_{t\in I}\theta(t)$.
Supposons premièrement que $t_0 \in]0, T[$ et $M^p < \theta(t_0)$, alors $\theta'(t_0) = 0$. Cela implique

$$p\,|u(t_0)|^{p-2}\langle u'(t_0), u(t_0)\rangle = 0. \tag{3.2.20}$$

En effet, $|u(t)|^p$ peut s'écrit sous la forme

$$|u(t)|^p = \langle u(t), u(t)\rangle^{\frac{p}{2}}\,.$$

En dérivant, on aura

$$\begin{aligned}\left(|u(t)|^p\right)' &= \left(\langle u(t), u(t)\rangle^{\frac{p}{2}}\right)' \\ &= \frac{p}{2}\langle u(t), u(t)\rangle^{\frac{p}{2}-1}\,2\langle u'(t), u(t)\rangle \\ &= p\,|u(t)|^{p-2}\langle u'(t), u(t)\rangle\,.\end{aligned}$$

Par l'hypothèse $H(F)_1(vi)$, il existe $\delta > 0$ et $c_2 > 0$ tel que, pour presque tout $t \in I$, on a

$$\inf\{\langle f(t), u(t)\rangle + \beta|u'(t)|^p \ : \ |u(t)-u(t_0)|+|u'(t)-u'(t_0)| < \delta\,,\ f \in F(t, u(t), u'(t))\} \geq c_2 > 0.$$

Puisque $u \in D_L \subset C^1(I, \mathbb{R}^N)$, alors il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|u(t) - u(t_0)| + |u'(t) - u'(t_0)| < \delta$ et $|u(t)| > M$, pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta_1[$. Donc

$$\langle f(t), u(t)\rangle + \beta|u'(t)|^p \geq c_2\,, \quad \text{p.p sur } [t_0, t_0 + \delta_1[. \tag{3.2.21}$$

Maintenant, puisque $u \in S'$, pour presque tout $t \in I$, on a de (3.2.9)

$$\langle f(t), u(t)\rangle = \big\langle (\phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)))', u(t)\big\rangle - \frac{1}{\lambda^{p-1}}\langle |u(t)^{p-2}u(t), u(t)\rangle + \langle |u(t)|^{p-2}u(t), u(t)\rangle,$$

alors

$$\langle f(t), u(t)\rangle = \big\langle (\phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)))', u(t)\big\rangle + (1 - \frac{1}{\lambda^{p-1}})|u(t)|^p.$$

De (3.2.21)

$$\big\langle (\phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)))', u(t)\big\rangle + (1 - \frac{1}{\lambda^{p-1}})|u(t)|^p + \beta|u'(t)|^p \geq c_2\,, \quad \text{p.p sur } [t_0, t_0 + \delta_1[\,,$$

et comme $0 < \lambda < 1$, alors

$$\big\langle (\phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)))', u(t)\big\rangle + \beta|u'(t)|^p \geq c_2\,, \quad \text{p.p sur } [t_0, t_0 + \delta_1[\,.$$

En intégrant sur $[t_0, t]$, on obtient

$$\int_{t_0}^{t} \big\langle (\phi(\frac{1}{\lambda}u'(s)))', u(s)\big\rangle ds + \int_{t_0}^{t} \beta|u'(s)|^p ds \geq c_2\,(t - t_0)\,, \quad \text{p.p sur } [t_0, t_0 + \delta_1[\,.$$

En intégrant $\int_{t_0}^{t} \big\langle (\phi(\frac{1}{\lambda}u'(s)))', u(s)\big\rangle ds$ par parties, on aura

$$\big\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(s)), u(s)\big\rangle\Big]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \big\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(s)), u'(s)\big\rangle ds + \int_{t_0}^{t} \beta|u'(s)|^p ds \geq c_2\,(t - t_0)\,, \quad \text{p.p sur } [t_0, t_0 + \delta_1[\,,$$

cela implique

$$\begin{aligned}&\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)), u(t)\big\rangle - \langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(t_0)), u(t_0)\big\rangle \\ &\qquad - \int_{t_0}^{t} \big\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(s)), u'(s)\big\rangle ds + \int_{t_0}^{t} \beta|u'(s)|^p ds \geq c_2\,(t - t_0)\,, \quad \text{p.p sur } [t_0, t_0 + \delta_1[\,.\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

De $H(\phi)_2$, il existe une application $\kappa : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ continue tel que $\phi(u(t)) = \kappa(u(t))u(t)$, alors, d'un côté,

$$\big\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)), u(t)\big\rangle = \langle \kappa\big(\frac{1}{\lambda}u'(t)\big)\frac{1}{\lambda}u'(t), u(t)\rangle = \kappa\big(\frac{1}{\lambda}u'(t)\big)\langle \frac{1}{\lambda}u'(t), u(t)\rangle.$$

D'un autre côté,

$$\big\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(t_0)), u(t_0)\big\rangle = \kappa\big(\frac{1}{\lambda}u'(t_0)\big)\langle \frac{1}{\lambda}u'(t_0), u(t_0)\rangle = 0,$$

la dernière égalité est obtenue de (3.2.20). D'où (3.2.22) devient

$$\frac{1}{\lambda}\kappa\big(\frac{1}{\lambda}u'(t)\big)\langle u'(t), u(t)\rangle - \int_{t_0}^{t} \big\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(s)), u'(s)\big\rangle ds + \int_{t_0}^{t} \beta|u'(s)|^p ds > 0,$$

donc

$$\frac{1}{\lambda}\kappa\big(\frac{1}{\lambda}u'(t)\big)\langle u'(t), u(t)\rangle + \int_{t_0}^{t} \beta|u'(s)|^p ds > \int_{t_0}^{t} \big\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(s)), u'(s)\big\rangle ds.$$

De $H(\phi)(ii)$, on a $\big\langle \phi(\frac{1}{\lambda}u'(t)), u'(t)\big\rangle dt \geq \frac{1}{\lambda^{p-1}}\beta|u'(t)|^p$, alors

$$\frac{1}{\lambda}\kappa\big(\frac{1}{\lambda}u'(t)\big)\langle u'(t), u(t)\rangle + \int_{t_0}^{t} \beta|u'(s)|^p ds > \frac{1}{\lambda^{p-1}}\beta \int_{t_0}^{t} |u'(s)|^p ds\,,$$

cela implique

$$\frac{1}{\lambda}\kappa\big(\frac{1}{\lambda}u'(t)\big)\langle u'(t), u(t)\rangle + \beta\big(1 - \frac{1}{\lambda^{p-1}}\big) \int_{t_0}^{t} |u(s)|^p ds > 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\kappa\big(\frac{1}{\lambda}u'(t)\big)\langle u'(t), u(t)\rangle > 0\,.$$

Par conséquent, $\theta'(t) = p\,|u(t)|^{p-2}\langle u'(t), u(t)\rangle > 0$, pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta_1[$, contradiction avec $t_0 \in]0, T[$.

Si $t_0 = 0$ ou $t_0 = T$, comme $u \in D_L$, on a $\langle u'(t_0), u(t_0)\rangle = 0$ et on procède de la même manière que dans la preuve ci-dessus. Ainsi, nous avons prouvé que $\|u\|_\infty \leq M$, pour tout $u \in S'$.

D'après (3.2.19), il existe $c_3 = \mu\|u\|_p^p > 0$, $c_4 = \gamma\|u\|_q^r > 0$, et $c_5 = \|c_1\|_1\|u\|_\infty > 0$, tel que

$$\frac{-1}{\lambda^{p-1}}\langle f, u\rangle \leq \lambda^{p-1}\, c_3 + \lambda^{p-1}\, c_4\|u'\|_p^{p-r} + \lambda^{p-1}\, c_5\,.$$

Par (3.2.18) et comme $\lambda \in]0, 1[$, on obtient

$$\beta\|u'\|_p^p \leq c_6 + c_7\|u'\|_p^{p-r} \qquad c_6, c_7 > 0.$$

Par conséquent, $\|u'\|_p^p \le c_8$ tel que $c_8 > 0$ est indépendant de λ.

Par l'inégalité de Poincaré, on a

$$\exists\, c > 0 \text{ tel que } \|u\|_{W^{1.p}} \le c\|u'\|_p \quad \forall\, u \in W_0^{1.p}(I, \mathbb{R}^N),$$

alors $\|u\|_{W^{1.p}} \le c_9$ tel que $c_9 > 0$. Comme $u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ est arbitraire, S' est borné. En vertu du Théorème 1.9.9, la multiapplication $U^{-1} \circ N_2$ admet un point fixe $u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$ tel que $u \in U^{-1}(N_2(u))$. D'où $u \in D_L \subset C^1(I, \mathbb{R}^N)$ est la solution du problème (3.2.3) ou (3.2.4).

■

3.2.2 Cas non convexe

Dans cette section, on va présenter la version non convexe des résultats d'existences. Dans ce cas les hypothèses de la multiapplication F sont les suivantes.

$H(F)'$ $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est une multiapplication à valeurs non vides et compactes vérifiant

$(i)'$ $Gr(F) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$;

$(ii)'$ pour presque tout $t \in I$, $F(t, \cdot, \cdot)$ est s.c.i ;

$(iii)'$ F vérifie $H(F)(iii)$ et $H(F)(iv)$.

$H(F)'_1$ $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est une multiapplication à valeurs non vides compactes et satisfaisant les conditions $H(F)'((i)' - (ii)')$ et $H(F)_1$.

Proposition 3.2.5. *(Voir [25]) Si la multiapplication $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ vérifie $H(F)'$ alors la multiapplication $N : W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N) \rightrightarrows L^q(I, \mathbb{R}^N)$ définie dans la Proposition 3.2.1 est à valeurs non vides, fermées, bornés et elle est s.c.i.*

Démonstration

La fermeture et la bornitude de N se montre de la même manière que dans la Proposition 3.2.1.

On va vérifier que N est à valeurs non vides. Pour tout $u \in W^{1.p}(I, \mathbb{R}^N)$, soit $K : I \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ définie par $K(t) = F(t, u(t), u'(t))$ et $\theta : I \times \mathbb{R}^N \to I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ définie par $\theta(t, v) = (t, u(t), u'(t), v)$. θ est une application mesurable (car elle est continue) et K est à valeurs fermées.

De $H(F)(ii)$, on peut déduire que $\theta^{-1}(Gr(F)) = Gr(K) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. En effet

$$\begin{aligned} Gr(K) &= \{(t, y) \in I \times \mathbb{R}^N \, : \, y \in K(t)\} \\ &= \{(t, y) \in I \times \mathbb{R}^N \, : \, y \in F(t, u(t), u'(t))\}, \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\theta^{-1}(Gr(F)) &= \{(t,y)\in I\times\mathbb{R}^N \,:\, \theta(t,y)\in Gr(F)\}\\
&= \{(t,y)\in I\times\mathbb{R}^N \,:\, (t,u(t),u'(t),y)\in Gr(F)\}\\
&= \{(t,y)\in I\times\mathbb{R}^N \,:\, y\in F(t,u(t),u'(t))\} = Gr(K)\in\mathcal{L}(I)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\,,
\end{aligned}$$

ceci signifie que K est aussi mesurable (Théorème 1.10.13). En utilisant le théorème d'existence de sélections, on obtient une fonction mesurable $v : I \to \mathbb{R}^N$ telle que $v(t) \in K(t)$ p.p sur I. En vertu de $H(F)'(iii)$, $v \in L^q(I,\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $N(u) \neq \emptyset$ pour tout $u \in W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$.

Pour la semicontinuité inférieure de N, par la Proposition 1.10.5, il suffit de montrer que, pour tout $w \in W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$ la fonction $u \longmapsto d(w,N(u)) \in \mathbb{R}_+$ est s.c.s sur $W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$.

Fixons $\lambda \geq 0$, et considérons l'ensemble

$$\triangle_\lambda = \{u\in W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N) \,:\, d(w,N(u))\geq\lambda\}\,.$$

Supposons que $\{u_n\}_{n\geq1} \subset \triangle_\lambda$ et $u_n \to u$ dans $W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$, alors $u_n(t) \to u(t)$ et $u_n'(t) \to u'(t)$ p.p sur I. Notons que, sous l'hypothèse $H(F)'(ii)$, la fonction positive $(x,y) \longmapsto d(w(t),F(t,x,y))$ est s.c.s. Donc en utilisant le Théorème 1.10.15, on peut déduire ce qui suit

$$\begin{aligned}
\lambda &\leq \limsup_{n\to+\infty} d(w,N(u_n))\\
&= \limsup_{n\to+\infty}\inf\Big\{\|w-v\|_q \,:\, v\in N(u_n)\Big\}\\
&= \limsup_{n\to+\infty}\inf\Big\{\Big(\int_0^T |w(t)-v(t)|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}} \,:\, v\in N(u_n)\Big\}\\
&= \limsup_{n\to+\infty}\Big(\int_0^T \inf\Big\{|w(t)-\bar{w}|^q \,:\, \bar{w}\in F(t,u_n(t),u_n'(t))\Big\}dt\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&= \limsup_{n\to+\infty}\Big(\int_0^T d\big(w(t),F(t,u_n(t),u_n'(t)\big)^q dt\Big)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

et par le lemme de Fatou, on trouve

$$\begin{aligned}
\lambda &\leq \Big(\limsup_{n\to+\infty}\int_0^T d\big(w(t), F(t,u_n(t),u_n'(t)\big)^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \Big(\int_0^T d(w(t), F(t,u(t),u'(t))^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&= \Big(\int_0^T \inf\Big\{|w(t)-\bar{w}|^q \,:\, \bar{w}\in F(t,u(t),u'(t))\Big\}dt\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&= \inf\Big\{\Big(\int_0^T |w(t)-v(t)|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}} \,:\, v\in N(u)\Big\}\\
&= \inf\Big\{\|w-v\|_q \,:\, v\in N_F(u)\Big\}\\
&= d(w,N(u)),
\end{aligned}$$

ce qui implique $u \in \triangle_\lambda$ et ceci prouve que l'ensemble $\triangle_\lambda$ est fermé. Donc par la Proposition 1.7.4, $d(u,N(u))$ est s.c.s. D'où N est s.c.i. ■

Proposition 3.2.6. *Si les hypothèses $H(\phi)_2$ et $H(F)'$ sont vérifiées, alors le problème*

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' \in F(t,u(t),u'(t)), & p.p \text{ sur } I,\\ u(0)=u(T)=0, \end{cases} \tag{3.2.23}$$

admet une solution $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$.

Proposition 3.2.7. *Si les hypothèses $H(\phi)_2$ (resp. $H(\phi)_3$) et $H(F)'_1$ sont vérifiées, alors le problème*

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' \in F(t,u(t),u'(t)), & p.p \text{ sur } I,\\ u(0)=u'(T)=0 \ \ (resp.\ u'(0)=u'(T)=0), \end{cases} \tag{3.2.24}$$

admet une solution $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$.

Démonstration des propositions 3.2.6 et 3.2.7

Soit $N : W^{1,p}(I,\mathbb{R}^N) \to L^q(I,\mathbb{R}^N)$ la multiapplication défine dans la Proposition 3.2.1. Par la Proposition 3.2.5, N est s.c.i et bornée. De plus, le graphe de F est mesurable, alors du Théorème 1.10.13, F est Σ-mesurable, donc en utilisant le Théorème 1.10.17, on aura que N est décomposable. D'où, du Théorème 1.10.18, N admet une sélection f continue de $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $L^q(I,\mathbb{R}^N)$, i.e., $f(u) \in N(u)$, pour tout $u \in W^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$. Donc l'ensemble

$$\begin{aligned}
S &= \{u \in W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N) \ : \ u \in \lambda U^{-1}(f(u))\,,\ 0<\lambda<1\} \\
&= \{u \in W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N) \ : \ U(\lambda^{-1}u) = f(u)\,,\ 0<\lambda<1\} \\
&= \{u \in W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N) \ : \ -(\phi(\lambda^{-1}u'(t)))' + \frac{1}{\lambda^{p-1}}|u(t)|\,u(t) = f(u)(t) \text{ p.p sur } I\,,\ 0<\lambda<1\}\,,
\end{aligned}$$

est borné (d'après la démonstration dans le cas convexe). D'où, par le Théorème 1.9.9, la multiapplication $P : W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N) \rightrightarrows D_L \subset W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$ définie par $P(u) = \{U^{-1}\circ f(u)\}$ admet un point fixe $u \in W^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)$, c'est à dire $u \in P(u)$. Donc $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$ est la solution des problèmes (3.2.23) et (3.2.24). ∎

Corollaire 3.2.8. *Soit les problèmes*

$$(\mathcal{P}'_1)\begin{cases} (|u'(t)|^{p-2}u'(t) = f(t,u(t),u'(t)), & p.p \text{ sur } I, \\ u(0)=u(T)=0\,, \end{cases}$$

et

$$(\mathcal{P}'_2)\begin{cases} (|u'(t)|^{p-2}u'(t) = f(t,u(t),u'(t)), & p.p \text{ sur } I, \\ u'(0)=u'(T)=0 \ \ (resp.\ u(0)=u'(T)=0)\,, \end{cases}$$

telle que f est une fonction univoque vérifiant les conditions suivantes.

$H(f)_1$ $f : I\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *est une fonction qui vérifiée*

(i) *pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$, $f(\cdot,x,y)$ est $\mathcal{L}(I)$- mesurable ;*

(ii) *pour presque tout $t\in I$, $f(t,\cdot,\cdot)$ est continue ;*

(iii) *pour presque tout $t\in I$ et pour tout $x,y\in\mathbb{R}^N$*

$$|f(t,x,y)| \le \gamma_1(t,|x|) + \gamma_2(t,|x|)|y|^{p-1}\,,$$

avec $\sup\limits_{0\le r\le k}\gamma_1(t,r) \le \eta_{1,k}(t)$ p.p sur I, $\eta_{1,k}\in L^q(I,\mathbb{R})$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ et $\sup\limits_{0\le r\le k}\gamma_2(t,r) \le \eta_{2,k}(t)$ p.p sur I, $\eta_{2,k}\in L^\infty(I,\mathbb{R})$.

(iv) *pour tout $x,y\in\mathbb{R}^N$ on a*

$$\liminf_{|x|\to+\infty}\left(\inf_{y\in\mathbb{R}^N}\frac{\langle f(t,x,y),x\rangle}{|x|^p}\right) \ge -\theta_1(t),$$

uniformément pour presque tout $t\in I$, avec $\theta_1\in L^\infty(I,\mathbb{R}_+)$, $\|\theta_1\|_\infty < \beta\lambda_1$ ($\beta>0$ est le nombre positive dans l'hypothèse $H(\phi)(ii)$), et λ_1 est donné par

$$\lambda_1 = \min\left\{\frac{\|x'\|_p^p}{\|x\|_p^p}\,,\ x\in W_0^{1.p}(I,\mathbb{R}^N)\,,\ x\neq 0\right\}.$$

$H(f)_2$ $f : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *est une fonction telle que* $H(f)_1(i) - (iii)$ *sont vérifiées et*

(v) *pour presque tout* $t \in I$ *et pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$\langle f(t,x,y), x \rangle \geq -a|x|^p - \gamma|x|^r|y|^{p-r} - c(t)|x|^s\,,$$

avec $a, \gamma \geq 0$, $1 \leq r, s < p$ *et* $c \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ *;*

(vi) *il existe* $M > 0$ *tel que, si* $|x_0| > M$ *et* $\langle x_0, y_0 \rangle = 0$, *alors on peut trouver* $\delta > 0$ *et* $\xi > 0$ *tel que pour presque tout* $t \in I$

$$\inf\{\langle f(t,x,y), x\rangle + |y|^p : |x - x_0| + |y - y_0| < \delta\} \geq \xi > 0\,.$$

•*Si l'hypothèse* $H(f)_1$ *est vérifiée, alors le problème* $(\mathcal{P}'_1)$ *admet une solution* $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$.

•*Si l'hypothèse* $H(f)_2$ *est vérifiée, alors le problème* $(\mathcal{P}'_2)$ *admet une solution* $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$.

Démonstration

Il suffit de prendre $F(\cdot,\cdot,\cdot) = \{f(\cdot,\cdot,\cdot)\}$. Donc F satisfait toutes les hypothèses des Propositions 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4. ■

Exemple 3.2.1. *Soit* $f : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *une application définie par*

$$f(t,x,u) = c|x|^{p-2}x + g(|y|)\; x - |y|^{p-2}x, \quad \forall\, t \in I, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N\,,$$

avec $c > 0$, $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et bornée et* $p \geq 2$.

f *satisfait les hypothèses* $H(f)_2$ *et* $H(f)_1(i) - (iii)$, *c'est à dire,* f *ne vérifie pas (iv).*

En effet

- f *est continue pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *et elle est constante par rapport à* $t \in I$, *donc elle est mesurable. D'où (i) et (ii) sont vérifiées.*
- *on a*

$$\begin{aligned} |f(t,x,y)| &= \left|c|x|^{p-2}x + g(|y|)\; x - |y|^{p-2}x\right| \\ &\leq c|x|^{p-1} + |g(|y|)|\,|x| + |y|^{p-2}|x|\;. \end{aligned}$$

On a g *est bornée, alors*

$$\forall\; M' > 0, \exists M > 0 \quad \textit{tel que si } |y| < M' \Rightarrow |g(|y|)| \leq M\,, \tag{3.2.25}$$

alors

$$|f(t,x,y) \leq \left(c|x|^{p-1} + M\,|x|\right) + |y|^{p-2}|x|\;.$$

Posons : $\gamma_1(t,|x|) = c|x|^{p-1} + M|x|$ *et* $\gamma_2(t,|x|) = |y|^{-1}|x|$, *donc on obtient*

$$|f(t,x,y)| \leq \gamma_1(t,|x|) + \gamma_2(t,|x|)|y|^{p-1}\;.$$

D'où (ii) est vérifiée.

- *On a*

$$\begin{aligned}
\langle f(t,x,y),x\rangle &= \langle c|x|^{p-1}x + g(|y|)\ x - |y|^{p-2}x, x\rangle \\
&= c|x|^p + g(|y|)\ |x|^2 - |y|^{p-2}|x|^2 \\
&= \big(c|x|^{p-2} + g(|y|)\big)|x|^2 - |y|^{p-2}|x|^2 \\
&\geq g(|y|)|x|^2 - |y|^{p-2}|x|^2 \qquad (c>0)\ ,
\end{aligned}$$

de (3.2.25), *il existe* $M>0$ *tel que* $-M \leq g(|y|) \leq M$, *alors*

$$\langle f(t,x,y),x\rangle \geq -M|x|^2 - |y|^{p-2}|x|^2\ .$$

D'où, (v) *est vérifiée si on prend* $a=0$, $\gamma=1$, $c(t)=M$ *et* $r=s=2$.

- *On a*

$$\langle f(t,x,y),x\rangle + |y|^p \geq c|x|^p - (M+|y|^{p-2})|x|^2 + |y|^p\ ,$$

cette quantité n'est pas inférieure à un constant positif pour $|x|$ *est suffisament grand et* $|y|$ *est borné, c'est à dire, il existe* $\xi>0$ *tel que*

$$\langle f(t,x,y),x\rangle + |y|^p \geq c|x|^p - (M+|y|^{p-2})|x|^2 + |y|^p \geq \xi > 0\ .$$

D'où (vi) *est vérifiée.*

- *Mais*

$$\liminf_{|x|\to+\infty}\Big(\inf_{y\in\mathbb{R}^N}\frac{\langle f(t,x,y),x\rangle}{|x|^p}\Big) = \liminf_{|x|\to+\infty}\Big(\inf_{y\in\mathbb{R}^N}\big(c + g(|y|)|x|^{2-p} - |y|^{p-2}|x|^{2-p}\big)\Big) = -\infty\ ,$$

c'est à dire (iv) *n'est pas vérifiée.*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous étions intéréssés aux problèmes non-linéaires pour des équations et des inclusions différentielles du second ordre de type semblable au p-Laplacien. Donc ce travail est répartie en deux partie.

Le point principal de la première partie était de montrer que les solutions des problèmes non-linéaires de Dirichlet, Neumann ou périodique, pour des équations différentelles du second ordre de type semblable au p-Laplacien, sont les points fixes d'opérateurs compacts. Après, à l'aide des degrés topologiques de Brouwer et Leray-Schauder, nous avons donner deux résultats d'existence de solutions sous certaines conditions sur la perturbation.
Ces résultats sont pris des deux papier [28] et [27].

La deuxième partie concerne les problèmes non-linéaires de Dirichlet, Neumann et mixte pour des inclusions différentielles du second ordre.
Dans la référence [31], Papalini a étudié l'existence de solutions des problèmes non-linéaires avec les conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et mixtes, sous différentes hypothèses sur la multiapplication F, qui sont de la forme

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' \in A(u(t)) + F(t,u(t),u'(t)), \quad \text{p.p sur } I, \\ L(u(0),u(T),u'(0),u'(T)) = 0. \end{cases} \tag{3.2.26}$$

avec $A : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est un opérateur maximal monotone.
Les mêmes problèmes sont présentés dans cette partie avec $A \equiv 0$ et ces résultats sont basés sur le théorème de point fixe de Leray-Schauder.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. A. Adams, Sobolev spaces, Departement of mathematic, University of British Columbia (1975).

[2] R. P. Agarwal et D. O'Regan, Series in Mathematical Analysis and Applications, Topological Degry Theory and Applications, Volume 10, published in (2006).

[3] D. Azzam-Laouir, Polycopié, cours d'analyse multivoque, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[4] D. Azzam-Laouir, Policopié, cours des espaces topologiques, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2012).

[5] D. Azzam-Laouir, Policopié, cours de mesure et intégrations, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2009) .

[6] D. Azé, Eléments d'analyse Convexe et variationnelle, Université de Perpignan, ellipes (1997).

[7] R. Bader, Nonlinear multivalued boundary value problems, Differential Inclusions, Control and Optimization 21 (2001) 127-148.

[8] R. Bader, A topological fixed point index theory for evolution inclusions, University of Munich, Preprint (1999).

[9] R. Bader et N. S. Papageorgeiou, Quasilinear vector differential equations with maximal monotone terms and nonlinear boundary conditions, Annaes polonici mathematici LXXIII.1 (2000).

[10] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equation in Banach Spaces, Nooedhoff, Leyden (1976).

[11] B. Boudjedaa, Une introduction à la théorie des distributions, Université Med Seddik Ben Yahia-Jijel, Faculté des Sciences exactes et informatique, Département de Mathématique, cours de master (2014-2015).

[12] R. Boukrouk et N. Hadade, Etude d'une inclusion différentielle du premier ordre, mémoire de Master, Université Med Seddik Ben Yahia-Jijel (2011-2012).

[13] R. F. Brown, A Topological introduction to nonlinear analysis, Second edition, Los Angeles, September (2003).

[14] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam (1973).

[15] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, université Pierre et Marie Curie et école Polythechnique, deuxiéme tirage (1987).

[16] P. Bich, cours d'Analyse fontionnelle et Convexe, Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique (2008, 2009).

[17] M. Cuesta, cours d'analyse fonctionnelle non linéaire et applications en équations différentielles, Maths Pures, Master 2 (2009-2010).

[18] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag (1985).

[19] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, New Yourk (1992).

[20] J. Droniou, Polycopié, Degré topologique et applications, Département de Mathématiques, Université de Montpellier II, France (2006).

[21] L. Gasiński et N. S. Papageorgiou, Nonlinear analysis, Ghapman and Hall/ CRC Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore (2005).

[22] L. Gasinski et N. S. Papageorgiou, Series in Mathematical Analysis and Applications, Nonlinear analysis, National University of Ireland, Volume 9 (2005).

[23] F. Hiai et H. Umegaki, Integrals, conditinal expectations, and martingales of multivalued functions, J. Multivaraite Anal. 7 (1977) 149-182.

[24] S. Hu et N. S. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis. Volume I : Theory, Kliwer, Dorfrecht, the Netherlands (1997).

[25] S. Hu. et N. S. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis. Volume II : Application, Dorfrecht, the Netherlands (2000).

[26] A. Makhlouf, Existence de solutions pour certaines classes d'inclusions différentielles, Thèse de Doctorat en sciences, Université Med Seddik Ben Yahia-Jijel (2016).

[27] R. Manásevich et J. Mawhin, Boundary value problems for nonlinear perturbations of vector P-Laplacian-like Operators, journal of the korean mathematical society, January (2000).

[28] R. Manásevich et J. Mawhin, Periodic solutions for nonlinear systems with P-Laplacian-like operators, Jornal of Differential Equations 145 (1998) 367-393.

[29] K. S. Papageorgiou et S. T. Kiritsy-Yaillourou, Handbook of Applied Analysis, Volum 19 (2008).

[30] R. Precup, Methode in Nolinear Integral Equations, Department of Applied Mathematics, Babes-Bolyai University (2002).

[31] F. Papalini, Solvability of strongly nonlinear boundary value problems for second order differential inclusions, Nonlinear Analysis 66 (2007) 2166-2189.

[32] M. Palmucci et F. Papalini, A nonlinear multivalued problem whith nonlinear boundary conditions, in : R.P. Agarwal, et al. (Eds), Set Valued Mappings with Application in Nonlinear Analysis, in : Ser. Math. Anal. Appl., vol. 4, Taylor et Francis, London (2002), pp.383-402.

[33] J. V. Tiel, Convex Analysis, An introductory Text, Royal Neteherlands Meteorological Institute (1984).

[34] Q. Zhang et G. Li. Nonliear boundary value problems for second order differential inclusions. Nonlinear Analysis, 70 (2009) 3390-3460.