République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématique

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Calcul proximal dans un espace de Hilbert

Présenté par :

Bouhanna Zineb   **Lecheheb Karima**

Devant le jury :

Président	: D. Affane	M.C.A.	Univ. de Jijel
Encadreur	: N. Fetouci	M.C.B.	Univ. de Jijel
Examinateur	: M. Bengassoum	M.C.B.	Univ. de Jijel

Promotion 2017/2018

Remerciements

$\mathcal{T}$out d'abord et avant tout, nous remercions $\mathcal{ALLAH}$ qui nous a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

$\mathcal{N}$ous remercions vivement notre encadreur $\mathcal{M}$lle $\mathcal{F}$**etouci** $\mathcal{N}$**ora**, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour sa patience, ses remarques et surtout pour sa confiance, et nous le remercions pour sa disponibilité, sa bienveillance et ses conseils du début à la fin de ce travail.

$\mathcal{N}$ous remercions aussi les membres du jury, pour avoir accepté de juger notre travail.

D. Affane, qui nous fait l'honneur de présider ce jury.
M. Bengassoum, pour avoir accepté d'être examinateur de ce travail.

$\mathcal{E}$nfin, nous n'oublierons pas de remercier tous les enseignants du département de mathématiques qui de prés ou de loin ont contribué à notre formation.

Table des matières

Introduction

En mathématiques et plus précisément en analyse convexe, le sous différentiel est un concept permettant de décrire la variation locale d'une fonction non nécessairement différentiable dans un sens classique. Ce concept a eu de nombreuses applications importantes à l'ensemble des problèmes dans l'optimisation convexe, l'économie, la mécanique, etc. Le sous différentiel d'une fonction convexe généralise la notion de la dérivée et a fourni ses premiers exemples à la théorie des opérateurs maximaux monotones. Parmi les sous différentiels connus citons : le sous différentiel généralisé de Clarke, le sous différentiel de Fréchet et Fréchet limite et le sous différentiel proximal qui est sujet de notre intérêt.
Notre mémoire est constitué de trois chapitres, nous présentons dans le premier chapitre quelques notions et concepts de base que nous utilisons tout au long de notre travail, on introduit la notion de la topologie faible et faible*, la semi continuité inférieure qui joue un rôle essentiel ainsi que quelques généralités sur les multifonctions. Nous proposons dans le deuxième chapitre deux concepts de base d'analyse non lisse : le cône proximal et le sous différentiel proximal. Le cône proximal est l'ensemble de toutes les directions v pour lesquelles il existe des normales proximales du type $x - s$ ou x est dans $\mathbb{R}^n$ et s est dans S est le point le plus proche de x. Le sous différentiel est formé de ce qu'on appelle sous gradients proximaux, l'existence d'un sous gradient proximal v correspond à la possibilité de minorer la fonction par une fonction quadratique, dont le point d'intersection est $(x, f(x))$ et v est la pente en ce point. Nous donnons également le lien entre le sous différentiel proximal et le cône proximal, leurs propriétés ainsi que quelques règles de calcul. Une partie de ce chapitre sera consacrée au sous différentiel de la fonction distance.
Le but du dernier chapitre est d'établir un résultat d'existence et d'unicité d'une solution absolument continue pour le processus de rafle non convexe du premier ordre avec une perturbation univoque, qui se présente sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + h(t) \ p.p. \ sur \ [0, T]; \\ x(0) = x_0 \in C(0); \end{cases} \tag{1}$$

Où C(t) est un ensemble non vide fermé de $\mathbb{R}^n$, uniformément $r-prox$ régulier. Nous détaillons un résultat dû à C. Castaing, A. Salvadori et L.Thibault [9].

les premiers travaux concernant le processus de rafle convexe sans perturbation ($h \equiv 0$) et $C(t)$ est un ensemble non vide convexe fermé, $N_{C(t)}(u(t))$ est le cône normal à $C(t)$ en $u(t)$ au sens d'analyse convexe, ont été entrepris dans les années 70 par J. J- Moreau, pour la modélisation d'un certain nombre de situations pratiques en mécanique comme l'écoulement d'eau dans une cavité, dynamique des systèmes avec contrainte unilatérale, plasticité et évolution des systèmes élastoplastiques. L'ensemble $C(t)$ dérive de la loi de plasticité du système.

Intuitivement, on peut définir le Processus de rafle comme suit : un ensemble convexe fermé mobile $C(t)$ d'un espace de Hilbert varie avec le temps, à l'instant initial, un point $u_0 \in C(0)$, au cours du temps ce point est éventuellement poussé par le bord de $C(t)$ dans la direction de la normale rentrante et reste dans $C(t)$, c-à-d le point mobile reste fixe dans H tant qu'il est interne à $C(t)$, lorsque u est rejoint par la frontière de cet ensemble, il est poussé par cette frontière dans la direction de la normale rentrante de manière à rester dans $C(t)$ pour tout t (voir la figure).

La convexité de l'ensemble joue un rôle déterminant pour la résolution de ce type de problème.

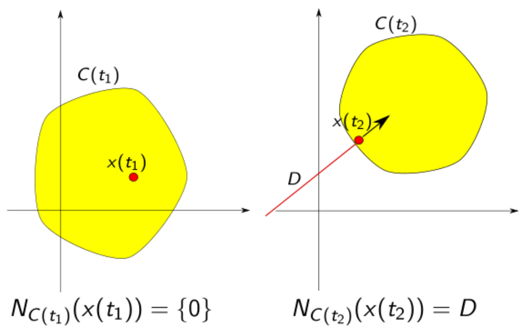

FIGURE 1

plusieurs auteurs se sont intéressés au cas non convexe. Des résultats ont été établis en exploitant une notion de régularité d'ensembles ; l'uniforme r-prox-régularité, qui est en fait une version locale de la convexité.

Le problème non convexe sans perturbation ($h \equiv 0$) a était initialement étudié par L.Thibault [21], qui a démontré que toute solution du problème est solution du problème équivalent suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -\dot{v}(t)\partial d_{C(t)}(x(t)) \ p.p. \ sur \ [0,T]; \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

La méthode utilisée pour le problème (1) consiste à le ramener au problème sans perturbation.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous allons introduire tous les résultats et les notions qui nous seront très utiles tout au long de ce mémoire. On commence par quelques notions, puis on présente quelques concepts d'analyse convexe et résultats concernant, la topologie faible et faible*, la continuité des fonctions, et des généralités sur les multifonctions. Une grande partie de ce chapitre sera consacrée aux sous différentiel d'une fonction convexe, et le cône normal à un ensemble convexe.

1.1 Notations principales

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	esemble des entiers naturels.
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
E	espace vectoriel.
E'	espace dual de E.
H	espace de Hilbet.
$B(x,r)/\overline{B}(x,r)$	boule ouverte/fermé de centre x et de rayon r.
$v(x)$	ensemble des voisinages de x.
f^*	fonction conjugée de f.
f^{**}	fonction biconjugée de f.
$\delta_A(.)$	fonction indicatrice de A.
$\langle ., . \rangle$	crochet de dualité.

$int(A)$	intérieur de A.
$Fr(A)$	frontière de A.
$\sigma(E, E')$	topologie faible.
$\sigma(E', E)$	topologie faible *.
$f'(x_0; v)$	dérivée directionnelle de f.
$\nabla f(x)$	gradient de f .
$\partial f(x)$	sous-différentiel de f .
$dom(f)$	domaine effectif de f.
$epi(f)$	épigraphe de la fonction f.
$graph(F)$	graphe de la multifonction F.
$\mathcal{F}(U)$	ensemble de toutes les fonctions $f : U \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ semi-continue inférieur.
$proj_S(x)$	projection de x sur S.
$d_S(x)$	distance de x à S.
$N_S^p(x)$	cône normal proximal de x à S.
$\partial_p f(x)$	sous-différentiel proximal de f.
$\partial^p f(x)$	sur-différentiel proximal de f .
$f'_G(x)$	dérivée de f au sens de Gâteaux.
$f'(x)$	dérivée de f au sens de Fréchet.
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	la dérivée de x par rapport à t.
$L^1([0,T], H)$	espace des applications intégrables définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H.
$L^\infty([0,T], H)$	espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H.

1.2 Quelques concepts d'analyse convexe

1.2.1 Ensemble convexe et Fonction convexe

Définition 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel.Un ensemble $K \subset E$ est dit convexe **si***

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall t \in [0, 1],\ tx + (1-t)y \in K.$$

Définition 1.2.2. ***(Domaine effectif).*** *Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On appelle domaine effectif de f l'ensemble défini par*

$$\textbf{\textit{dom (f)}} = \{x \in E : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.2.3. ***(Fonction convexe).*** *Soit E un espace vectoriel, On dit qu'une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe* ***si*** *pour tout $x, y \in dom(f)$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Définition 1.2.4. ***(Fonction propre).*** *La fonction f est dite propre si et seulement si $f(x) \neq -\infty \ \forall x \in E,$ et il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq +\infty$.*

Définition 1.2.5. ***(Épigraphe).*** *On appelle épigraphe de f l'ensemble défini par*

$$\boldsymbol{epi(f)} = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}$$

Proposition 1.2.6. *Une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

Définition 1.2.7. ***(Fonction conjuguée).*** *Soient E un espace vectoriel normé,E' son dual topologique de E et f une fonction définie sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.*
On appelle la fonction conjuguée de f qu'on note f^* définie par :

$$\begin{aligned} f^* : E' &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x' &\longmapsto f^*(x') = \sup_{x \in E}[\langle x', x\rangle - f(x)]. \end{aligned}$$

On appelle biconjuguée de f qu'on note f^{**}, la fonction définie par

$$\begin{aligned} f^{**} : E &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto f^{**}(x) = \sup_{x' \in E'}[\langle x', x\rangle - f^*(x')] \end{aligned}$$

Définition 1.2.8. ***(Fonction indicatrice).*** *Soit E un espace vectoriel et soit A un sous ensemble de E (i.e., $A \subset E$). On appelle fonction indicatrice de A qu'on note δ_A la fonction définie par*

$$\begin{aligned} \delta_A : &E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto \delta_A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in A \\ +\infty & sinon. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1.2.9. *La fonction δ_A est convexe si et seulement si A est convexe.*

Définition 1.2.10. ***(Fonction support).*** *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. On appelle fonction support de A notée par $\sigma_A(.)$ où $\sigma(A,.)$ la fonction définie sur E' par*

$$\begin{aligned} \sigma_A : &E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x' &\longmapsto \sigma_A(x') = \sigma(A, x') = \sup_{x \in A}\langle x', x\rangle. \end{aligned}$$

C'est la fonction conjuguée de la fonction indicatrice.

Définition 1.2.11. *Soient D et E deux ensembles d'un espace normé. On dit que D est dense dans E si pour tout x de E, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in D$ avec*

$$\|y - x\| \leq \varepsilon.$$

1.3 Topologie faible et faible *

Soit E un espace de Banach.On rappelle que E' désigne le dual topologique de E ; ($E' = \{f : E \to \mathbb{R}, f$ est linéaire et continue$\}$).
On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient $(\varphi_f)_{f\in E'}$ une famille d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.1. *On appelle topologie faible sur E (notée $\sigma(E, E')$) la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$.*

Notation.

- On notera $x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible dans E.
- On notera $x_n \longrightarrow x$ la convergence forte dans E.

Proposition 1.3.2. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a les propriétés suivantes :*
(i) *$x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E') \Longleftrightarrow \langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \forall f \in E'$.*
(ii) *Si $x_n \longrightarrow x$ $fortement$, alors $x_n \rightharpoonup x$ $faiblement$ pour $\sigma(E, E')$.*

(iii) *Si $x_n \rightharpoonup x$ $faiblement$ pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\|_E \leq \liminf_n \|x_n\|_E$.*
(iv) *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \longrightarrow f$ dans E', (i.e., $\|f_n - f\| \to 0$), alors $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.*

Corollaire 1.3.3. *Soient H un espace de Hilbert et $(x_n)_n$ une suite bornée dans E. Alors il existe une sous suite extraite $(x_{n_k})_k$ qui converge pour la topologie $\sigma(H, H')$.*

Soit E un espace de Banach. On sait que E' est aussi un espace de Banach. On note E'' l'ensemble des formes linéaires continues sur E'. C'est encore un espace de Banach appelé bidual de E.
Nous allons définir un sous espace vectoriel de E'' par le procédé suivant.À tout $x \in E$

on associe une forme linéaire ψ_x sur E' en posant.

$$\begin{aligned} \psi_x : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \psi_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

Définition 1.3.4. *On appelle topologie faible* la topologie la moins finie rendant toutes les applications ψ_x continues.*
La topologie $faible^*$ se note $\sigma(E', E)$.

Proposition 1.3.5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. On a les propriétés suivantes :*
(i) *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E) \Longleftrightarrow \langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle,\ \forall x \in E$.*
(ii) *Si $f_n \longrightarrow f\ fortement,\ alors\ f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E)$.*
(iii) *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E),\ alors\ \|f_n\|$ est bornée et $\|f\|_{E'} \leq \liminf_n \|f_n\|_{E'}$.*
(iv) *Si $x_n \longrightarrow x\ fortement\ dans\ E$ et $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E),\ alors \langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.*

Remarque 1.3.6. *Lorsque E est de dimension finie les trois topologies forte, faible et faible* coïcident .*

1.4 Continuité des fonctions

1.4.1 Fonction absolument continue

Définition 1.4.1. *Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$ est dite absolument continue si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$ on a*

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.4.2. *Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$ est dite absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, c'est-à-dire,*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

De plus une fonction absolument continue est dérivable presque partout et $f'(x) = g(x)$, p.p.

Remarque 1.4.3.
une fonction absolument continue est continue.

1.4.2 Fonction lipschitzienne

Définition 1.4.4. *Une fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne de rapport $K > 0$ si pour tout x, y de H :*

$$|f(x) - f(y)| \leq K\|x - y\|.$$

Remarque 1.4.5. *Si $K < 1$ la fonction f est dite contractante.*

Définition 1.4.6. *Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ f une fonction. f est dite localement lipschitzienne de rapport $K > 0$ au voisinage de x_0 **si** pour un certain $\delta > 0$, f est K-lipschitzienne sur l'ensemble $B(x_0, \delta)$.*

Proposition 1.4.7. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, alors on a :*
- *Si f est Lipschitzienne alors f est absolument continue.*
- *Si f est localement lipschitzienne, alors f est continue.*

1.4.3 Les fonctions semi-continues

Définition 1.4.8. *Soient X un espace vectoriel topologique et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction.*
- *On dit que f est semi-continue inférieurement(en abrégé s.c.i) en $x_0 \in X$ **si** pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > \lambda$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) > \lambda$, pour tout $x \in U$.*
- *On dit que f est s.c.i sur X si et seulement si elle est s.c.i en tout point de X.*
- *On dit que f est une fonction semi-continue supérieurement (s.c.s) en $x_0 \in X$ **si** pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) < \lambda$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) < \lambda$ pour tout $x \in U$.*
- *On dit que f est s.c.s sur Xsi et seulement si elle est s.c.s en tout point de X.*

Remarque 1.4.9.
f est s.c.s sur $X \Longleftrightarrow (-f)$ s.c.i sur X.

Définition 1.4.10. *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On a :*
- *f est s.c.i au point x_0 **ssi** $\forall \varepsilon > 0,\ \exists U \in v(x_0),\ \forall x \in U : f(x) - f(X_0) > -\varepsilon$.*
- *f est s.c.s au point x_0 **ssi** $\forall \varepsilon > 0,\ \exists U \in v(x_0),\ \forall x \in U : f(x) - f(x_0) < \varepsilon$.*
- *f est continue au point x_0 **ssi** f est s.c.i et s.c.s au point x_0.*

Remarque 1.4.11. *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors on a*

1. *Si f est s.c.i au point $x_0 \in X$ et si $f(x_0) = +\infty$,alors*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = +\infty;$$

2. Si $f(x_0) = -\infty$, alors f est semi-continue inférieurement en x_0.

Définition 1.4.12. *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in X$. Alors on a*

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \inf f(x) = \sup\limits_{U \in v(x_0)} \inf\limits_{x \in U} f(x)$.

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \sup f(x) = \inf\limits_{U \in v(x_0)} \sup\limits_{x \in U} f(x)$.

Proposition 1.4.13. *Soit X un espace vectoriel topologique et soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction alors*

a) *f est s.c.i au point $x_0 \iff \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \inf f(x) \geq f(x_0)$.*

b) *f est s.c.s au point $x_0 \iff \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \sup f(x) \leq f(x_0)$.*

Théorème 1.4.14. *[22] Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

i) *f est s.c.i sur X ;*

ii) *les ensembles de niveau sont fermés dans X*

$$A_\lambda(f) = \{x \in X, f(x) \leq \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

iii) *l'épigraphe de f est fermé dans $X \times \mathbb{R}$*

$$epi(f) = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R}, f(x) \leq r\}.$$

Proposition 1.4.15. *Soit H un espace de Hilbert, soit $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement et $\lim\limits_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Alors il existe $x_0 \in H$ tel que*

$$f(x_0) = \inf_{x \in H} f(x).$$

Proposition 1.4.16. *Soient (X, O) et (X', O) deux espaces topologiques, $x \in X$ et $f : X \longrightarrow X'$ une fonction continue. f est dite **Séquentiellement continue** ssi pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X convergeant vers x, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x).$$

Proposition 1.4.17. *Soient (X, O) un espace topologique, F un fermé de (X, O), F est dit* ***séquentiellement fermé*** *ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de points de F, alors la limite de cette suite est encore dans F.*

Théorème 1.4.18. *Dans un espace métrique un ensemble est fermé si et seulement si il est séquentiellement fermé.*

1.5 Généralités sur les multifonctions

Définition 1.5.1. *Soient X et Y deux ensembles non vides.On appelle multifonction (multi-application ou application multivoque) de X dans Y toute application F définie sur X à valeurs dans $\mathcal{P}(Y)$ (ensemble des parties de Y) et on note $F : X \rightrightarrows Y$ où $F : X \to \mathcal{P}(Y)$.*
Alors $\forall x \in X$, $F(x)$ est un sous ensemble de Y.
Les sous ensembles $F(x)$ sont appelés les images ou les valeurs de F.

Définition 1.5.2. *Soient X et Y deux ensembles non vides et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On appelle*
1. Domaine effectif de F qu'on le note ***dom(F)*** *le sous ensemble de X défini par*

$$\boldsymbol{dom(F)} = \{x \in X, F(x) \neq \emptyset\}.$$

2. Graphe de F le sous ensemble de $X \times Y$ noté par ***graph(F)*** *défini par*

$$\boldsymbol{graph(F)} = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}.$$

3. Image de F qu'on la note ***Im(F)*** *le sous ensemble de Y défini par*

$$\boldsymbol{Im(F)} = \{y \in Y,\ \exists\ x \in X, y \in F(x)\}.$$

où

$$\boldsymbol{Im(F)} = \bigcup_{x\in X} F(x).$$

4. L'inverse d'une multifonction F est une multifonction $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ telle que :

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x)$$

$$(\ (y, x) \in graph(F^{-1}) \Leftrightarrow (x, y) \in graph(F)\ )$$

Ainsi $dom(F^{-1}) = Im(F)$ et $Im(F^{-1}) = dom(F)$.

1.5.1 Image directe et image réciproque d'un sous-ensemble

Définition 1.5.3. *Soient X et Y deux ensembles non vides, $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction et A un sous ensemble de X.L'image de A par F est définie par :*

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x).$$

Définition 1.5.4. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction et $V \subset Y$.*
L'image réciproque large de V par F notée $F^{-1}(V)$ est définie par :

$$F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

Et l'image réciproque étroite de V par F notée F_+^{-1} est définie par :

$$F_+^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \subseteq V\}.$$

1.5.2 Quelques opérations sur les multifonctions

Définition 1.5.5. *Considérons X,Y deux ensembles et $F, G : X \rightrightarrows Y$ deux multifonctions. On peut alors définir divers multifonctions en considérant :*
• $H = F \cup G : X \rightrightarrows Y$ *telle que* $H(x) = F(x) \cup G(x), \ \forall x \in X$
• $H = F \cap G : X \rightrightarrows Y$ *telle que* $H(x) = F(x) \cap G(x), \ \forall x \in X$
• $H = F \times G : X \rightrightarrows Y$ *telle que* $H(x) = F(x) \times G(x), \ \forall x \in X$
• *Si* $F : X \rightrightarrows Y$ *et* $G : Y \rightrightarrows Z$ *, on définit*
$H = G \circ F : X \rightrightarrows Z$ *telle que* $H(x) = (G \circ F)(x) = G(F(x)) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y)$.

Et lorsque X,Y sont des espaces vectoriels, on définit les opérations suivantes :
• $H = F \pm G : X \rightrightarrows Y$ *telle que* $H(x) = F(x) \pm G(x) = \{y_1 \pm y_2 : y_1 \in F(x)$ *et* $y_2 \in G(x)\} \ \forall x \in X$
• $H = \lambda F : X \rightrightarrows Y$ *telle que* $H(x) = \lambda F(x) = \{\lambda y : y \in F(x)\} \ \forall x \in X \ (\lambda \in \mathbb{R})$

Lemme 1.5.6. *Soient $F, G : X \rightrightarrows Y$ et $H : Y \rightrightarrows Z$ trois multifonctions et soient $U, W \subseteq Y$ et $V \subseteq Z$ alors nous avons*
1. $(F \cup G)_+^{-1}(U) = F_+^{-1}(U) \cap G_+^{-1}(U)$;
2. $(F \cup G)^{-1}(U) = F^{-1}(U) \cap G^{-1}(U)$;
3. $(F \cap G)^{-1}(U) \subseteq F^{-1}(U) \cap G^{-1}(U)$;
4. $F_+^{-1}(U) \cap G_+^{-1}(U) \subseteq (F \cap G)_+^{-1}(U)$;
5. $(F \times G)^{-1}(U \times W) = F^{-1}(U) \cap G^{-1}(W)$;

6. $(F \times G)_+^{-1}(U \times W) = F^{-1}(U) \cap G^{-1}(W)$ *;*

7. $(F \circ G)^{-1}(V) = G^{-1}(F^{-1}(V))$ *;*

8. $(F \circ G)_+^{-1}(V) = G_+^{-1}(F_+^{-1}(V))$*.*

1.6 Continuité des multifonctions

Définition 1.6.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On dit que F est* ***semi-continue supérieurement (s.c.s en abrégé)*** *en $x_0 \in X$, si pour tout ouvert U de Y contenant $F(x_0)$ (i.e., $F(x_0) \subset U$), il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(\Omega) \subset U$ i.e., $F(z) \subset U$, $\forall z \in \Omega$.*
On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x \in X$.

Proposition 1.6.2. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On à les équivalences entre les propriétés suivantes :*

1. F est s.c.s ;

2. $F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y ;

3. $F^{-1}(U)$ est un fermé de X pour tout fermé U de X ;

4. $\overline{F^{-1}(M)} \subseteq F^{-1}(\overline{M})$, pour tout sous ensemble M de Y.

Définition 1.6.3. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On dit que F est* ***semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé)*** *en $x_0 \in X$, si pour tout ouvert U de Y vérifiant $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de x_0*
tel que $F(\Omega) \cap U \neq \emptyset$ i.e., $F(z) \cap U \neq \emptyset$, $\forall z \in \Omega$ i.e., $F^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.
On dit que F est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point $x \in X$.

Proposition 1.6.4. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On à les équivalences entre les propriétés suivantes :*

1. F est s.c.i ;

2. $F^{-1}(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de X ;

3. $F_+^{-1}(U)$ est un fermé de X pour tout fermé U de Y ;

4. $\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$, pour tout sous ensemble M de Y.

Théorème 1.6.5. *Soient X, Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. F est s.c.i au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X, telle que $x_n \longrightarrow x_0$ et pour tout $y_0 \in F(x_0)$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \longrightarrow y_0$.*

Définition 1.6.6. ***(Multifonction monotone).*** *Soient E un espace vectoriel normé et $\phi : E \rightrightarrows E'$ une multifonction. On dit que ϕ est monotone si*

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0,$$

pour tout $x, y \in dom(\phi)$, $x \neq y$, $x^* \in \phi(x)$, $y^* \in \phi(y)$.

Définition 1.6.7. ***(Multifonction hypomonotone).*** *Une multifonction $T : H \rightrightarrows H$ est hypomonotone sur un sous ensemble O de H s'il existe $\sigma > 0$, tel que $T + \sigma I$ est monotone sur O ; cela correspond à avoir*

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\sigma |x_1 - x_2|^2, \ \forall v_i \in T(x_i) \ et \ x_i \in O, \ i = 1, 2.$$

1.6.1 Continuité au sens de Hausdorff

Pour définir la continuité au sens de Hausdorff, on a besoin d'introduire la notion d'excès et la distance de Hausdorff. Pour cela, considérons un espace métrique (X, d).

Définition 1.6.8. *Soient A, B deux parties de X, on définit l'excès de A sur B, et on note $e(A, B)$, comme suit :*
$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$. *si* $A \neq \emptyset$
$e(\emptyset, B) = 0$
où $d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$, *avec la convention* $\inf \emptyset = +\infty$.

Définition 1.6.9. ***(Distance de Hausdorff).*** *La distance de Hausdorff entre deux parties A et B de (X, d) est définie par :*

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = max(e(A, B), e(B, A)).$$
$$\mathcal{H}(A, B) = max(e(A, B), e(B, A)).$$

Il est clair que $\mathcal{H}$ définie une métrique sur l'ensemble des parties fermées bornées et non vides de X.

Définition 1.6.10. ***(Semi-continuité au sens de Hausdorff).*** *Soient X et Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs non vides. On dit que F est :*
1. Semi-continue inférieurement en $x_0 \in dom(F)$ si $e(F(x_0), F(x)) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.
2. Semi-continue supérieurement en $x_0 \in dom(F)$ si $e(F(x), F(x_0)) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$
3. Continue au sens de Hausdorff en $x_0 \in dom(F)$ si $d_{\mathcal{H}}(f(x), f(x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, autrement dit, si elle est s.c.i est s.c.s en x_0.

1.7 Sous Différentiel d'une fonction convexe

1.7.1 Différentiabilité des fonctions convexes

Définition 1.7.1. *Soient E un espace vectoriel, $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction, $x_0 \in E$, et v un vecteur non nul de E. On appelle **dérivée directionnelle** de f au point x_0 dans la direction v qu'on note $f'(x_0; v)$ la limite suivante quand elle existe*

$$f'(x_0; v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Si la dérivée directionnelle de f existe dans toutes les directions on dit que f est différentiable en $x_0 \in E$.

Théorème 1.7.2. *Soient $f : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre convexe, et $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors*
1. Pour tout $v \in E$, $f'(x_0; v)$ existe ;
2. la fonction $g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $g(v) = f'(x_0; v)$ pour tout $v \in E$ est positivement homogène, convexe et sous additive.

Définition 1.7.3. ***(Différentiabilité au sens de Gâteaux).***
*On dit que f est **différentiable au sens de Gâteaux**(où Gâteaux différentiable) en x_0 s'il existe $x' \in E'$ tel que :*

$$f'(x_0; v) = \langle f'_G(x_0), v \rangle \Leftrightarrow \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \langle x', v \rangle, \ \forall v \in E. \tag{1.1}$$

x' est défini d'une façon unique par la relation (1.1) et est appelé différentiel de f au sens de Gâteaux,on le note $x' = \nabla f(x_0)$, est appelé aussi le gradient de f au point x_0.

Définition 1.7.4. ***(Différentiabilité au sens de Fréchet).***
*On dit que f est **différentiable au sens de Fréchet** (où Fréchet différentiable) au point x_0 si la convergence dans (1.1) est uniforme sur les ensembles bornés de E, i.e.,*

$$\forall r > 0, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \forall t \in \mathbb{R} : \ |t| < \delta \Rightarrow |\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - \langle x', v \rangle| < \varepsilon, \ \forall v \in \overline{B}(0, r). \tag{1.2}$$

Remarque 1.7.5.
1. La relation (1.2) est équivalente à $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0$
2. Si f est Différentiable au sens de Fréchet implique que f est différentiable au sens de Gâteaux.
3. Si f est différentiable au sens de Fréchet au point x_0, alors f est continue au point x_0.

4. Si f est différentiable a sens de Gâteaux au point x_0 i.e., $\nabla f(x_0)$ existe, alors la dérivée directionnelle de f au point x_0 dans toutes les directions $v \in E$ existe et nous avons :

$$f'(x_0; v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle, \ \forall v \in E.$$

Mais l'inverse est faux, l'existence de toutes les dérivées directionnelles n'implique pas l'existence de $\nabla f(x_0)$.

***En effet** (par exemple) :*

Soit E un espace vectoriel normé et

$$\begin{aligned} f : & E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ & x \longmapsto f(x) = \|x\| \end{aligned}$$

Soit $v \in E$, $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f'(0, ; v) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(0 + tv) - f(0)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|t.v\|}{t} \\ &= \|v\|. \end{aligned}$$

Donc $f'(0, v) = \|v\|, \forall v \in E$.

f est différentiable au sens de Gâteaux en 0 $\Longleftrightarrow \exists\ x' \in E', f'(0, v) = \langle x', v \rangle (i.e., \|v\| = \langle x', v \rangle)$.

Si on pose $\|v\| = \langle x', v \rangle$ alors $x' \in E'$, et par suite il n'existe pas $x' \in E'$ tel que $\|v\| = \langle x', v \rangle$

par conséquent f n'est pas différentiable au sens de Gâteaux en 0.

1.7.2 Sous-différentiabilité

Plusieurs fonctions convexes f finies en x_0 et ne sont pas différentiables en ce point admettent des éléments x' de E' satisfont

$$\langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) \text{ pour tout } x \in E. \tag{1.3}$$

Par exemple, la fonction convexe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = |x|$ n'est pas différentiable en 0 mais admet des éléments y dans $\mathbb{R}$ vérifient (1.1), donc on peut énoncer la définition suivante.

Définition 1.7.6. *Soient E un espace vectoriel normé, et E' son dual topologique, f une fonction convexe définie de E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in dom(f)$.*
Le sous-différentiel de f au point x_0, noté $\partial f(x_0)$ est le sous ensemble de E' défini par

$$\partial f(x_0) = \{x' \in E', f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle, \forall x \in E\}.$$

Un élément quelconque du sous-différentiel est appelé un sous-gradient.

Exemple 1.7.7.

1. *Considérons la fonction :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x|. \end{aligned}$$

$\partial f(0) = [-1, 1]$. ***En effet***

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \{x' \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(0) + \langle x', x\rangle, \ \forall x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x' \in \mathbb{R} : |x| \geq x'x, \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x' \in \mathbb{R} : x'x \leq |x|, \ \forall x \in [0, +\infty[\ \} \cap \{x' \in \mathbb{R} : x'x \leq |x|, \ \forall x \in]-\infty, 0[\ \} \\ &= \{x' \in \mathbb{R} : x'x \leq x, \ \forall x \geq 0\} \cap \{x' \in \mathbb{R} : x'x \leq -x, \ \forall x < 0\} \\ &= \{x' \in \mathbb{R} : x' \leq 1\} \cap \{x' \in \mathbb{R} : x' \geq -1\} \\ &=]-\infty, 1] \cap [-1, +\infty[\\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

2. *Soit $C \subset E$ un ensemble et $x_0 \in C$. Alors $x' \in \partial\delta_C(x_0)$ si et seulement si $\delta_C(x) \geq \delta_C(x_0) + \langle x', x - x_0\rangle$ pour tout $x \in C$. On a donc*

$$\partial\delta_C(x_0) = \{x' \in E' : \langle x', x - x_0\rangle \leq 0 \text{ pour tout } x \in C\}.$$

Lorsque $E = \mathbb{R}$, signalons ici que E' s'identifie à E' s'identifie à E et l'on considère que $\partial f(x_0)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.7.8. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, et soit $x_0 \in int(dom(f))$. Alors*

$$\partial f(x_0) = [f'_g(x_0), f'_d(x_0)].$$

Démonstration.

Si $x' \in \partial f(x_0)$, on a $f(x) - f(x_0) \geq x'(x - x_0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq x' \text{ si } x > x_0; \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq x' \text{ si } x < x_0. \end{cases}$$

Passant à la limite quand $x \longrightarrow x_0$, il vient $f'_g(x_0) \leq x' \leq f'_d(x_0)$, d'où $x \in [f'_g(x_0), f'_d(x_0)]$.
Réciproquement, si $x' \in [f'_g(x_0), f'_d(x_0)]$, on a

$$\begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq x' \ si\ x > x_0; \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq x' \ si\ x < x_0. \end{cases}$$

Donc $f(x) - f(x_0) \geq x'(x - x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, d'où $x' \in \partial f(x_0)$. ∎

Remarque 1.7.9.

1. On dit que f est sous-différentiable au point x_0 si et seulement si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

2. Si $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et $f(x_0) = +\infty$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.

En effet

$$\begin{aligned} x' \in \partial f(x) &\Longleftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle, \forall x \in E \\ &\Longleftrightarrow f(x) \geq +\infty, \forall x \in E. \end{aligned}$$

D'où $f \equiv +\infty$ contradiction donc $\partial f(x_0) = \emptyset$.

3. Le sous-différentiel est une multi-application définie de E à valeurs dans E' i.e.,

$$\begin{aligned} \partial f(x_0) :& E \rightrightarrows E' \\ & x_0 \mapsto \partial f(x_0) = \{x' \in E'; f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0 \rangle, \ \forall x \in E\} \subset E'. \end{aligned}$$

Proposition 1.7.10. *Si $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions et si $x_0 \in dom(f) \cap dom(g)$ on a*

$$\partial f(_0) + g(x_0) \subset \partial(f + g)(x_0).$$

Démonstration.
Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} x' + y' \in \partial f(x_0) + \partial g(x_0) &\Longrightarrow x' \in \partial f(x_0) \ et\ y' \in \partial f(x_0) \\ &\Longleftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0 \rangle \ et\ g(x) - g(x_0) \geq \langle y', x - x_0 \rangle \end{aligned}$$

Par addition on trouve

$$\begin{aligned} & f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0) \geq \langle x' + y', x - x_0 \rangle \\ \Longleftrightarrow & (f + g)(x) - (f + g)(x_0) \geq \langle x' + y', x - x_0 \rangle \\ \Longleftrightarrow & x' + y' \in \partial(f + g)(x_0). \end{aligned}$$

Alors

$$\partial f(_0) + g(x_0) \subset \partial(f + g)(x_0).$$

∎

Proposition 1.7.11. *Soient E un espace vectoriel normé et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe, si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$, il y'a équivalence entre*
1. $x' \in \partial f(x_0)$;
2. $f'(x_0; v) \geq \langle x', x\rangle$, pour tout $v \in E$.

Démonstration.
1) $\Longrightarrow$ 2)

$$x' \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle, \ \forall x \in E.$$

En particulier pour $x = x_0 + tv$ $\forall v \in E$, $\forall t > 0$. On a

$$\begin{aligned} f(x_0 + tv) - f(x_0) &\geq \langle x', tv\rangle \\ \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} &\geq \langle x', v\rangle. \end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque $t \downarrow 0$ on obtient

$$f'(x_0; v) \geq \langle x', v\rangle, \ \forall v \in E.$$

2) $\Longrightarrow$ 1)

$$f'(x_0; v) \geq \langle x', v\rangle, \ \forall v \in E \Leftrightarrow \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - \langle x', v\rangle \geq 0, \ \forall v \in E.$$

En particulier pour $v = \frac{x - x_0}{t}$, $\forall x \in E$, on obtient

$$\begin{aligned} &\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0 + t\frac{x-x_0}{t}) - f(x_0)}{t} - \langle x', \frac{x - x_0}{t}\rangle \geq 0, \ \forall x \in E; \\ &\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{t} - \frac{1}{t}\langle x', x - x_0\rangle, \ \forall x \in E; \\ &\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0\rangle) \geq 0, \ \forall x \in E; \\ &\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0\rangle \geq 0, \ \forall x \in E. \end{aligned}$$

D'où $x' \in \partial f(x_0)$. ■

Proposition 1.7.12. *Soient $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, $x_0 \in E$ telle que $f(x_0) < +\infty$, et $x' \in E$,*
alors les propriétés suivantes sont équivalentes
***a)**. $x' \in \partial f(x_0)$;*
***b)**. $f^*(x') + f(x_0) \leq \langle x', x\rangle$;*
***c)**. $f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0\rangle$. De plus, $\partial f(x_0)$ est un sous ensemble convexe fermé de E'.*

Démonstration.

a) $\Longleftrightarrow$ b)

$$\begin{aligned}
x' \in \partial f(x_0) &\Longleftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle, \ \forall x \in E \\
&\Longleftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x\rangle - \langle x', x_0\rangle, \ \forall x \in E \\
&\Longleftrightarrow \langle x', x\rangle \geq f(x_0) - f(x) + \langle x', x\rangle, \ \forall x \in E \\
&\Longleftrightarrow \langle x', x_0\rangle \geq \sup_{x\in E}[\langle x', x\rangle - f(x)] + f(x_0), \ \forall x \in E \\
&\Longleftrightarrow \langle x', x\rangle \geq f^*(x') + f(x_0) \\
&\Longleftrightarrow f^*(x') + f(x_0) \leq \langle x', x_0\rangle.
\end{aligned}$$

b) $\Longrightarrow$ c)

$f^*(x') = \sup_{x\in E}[\langle x', x\rangle - f(x)]$
$\Longrightarrow f^*(x') \geq \langle x', x\rangle - f(x), \ \forall x \in E$
En particulier pour $x = x_0 \in E$, on aura alors

$$f^*(x') \geq \langle x', x_0\rangle - f(x_0)$$

i.e.

$$f^*(x') + f(x_0) \geq \langle x', x_0\rangle.$$

De **(b)** on trouve $f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0\rangle$.

c) $\Longrightarrow$ a)

On a

$$\begin{aligned}
\langle x', x_0\rangle - f(x_0) &= f^*(x') \\
&= \sup_{x\in E}[\langle x', x\rangle - f(x)] \\
&\geq \langle x', x\rangle - f(x), \ \forall x \in E
\end{aligned}$$

i.e.,

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle, \ \forall x \in E.$$

D'où $x' \in \partial f(x_0)$.

Montrons que $\partial f(x_0)$ est convexe

Soient $x', y' \in \partial f(x_0)$ et $t \in [0,1]$, montrons que : $tx' + (1-t)y' \in \partial f(x_0)$.
On a

$$\begin{aligned}
x' \in \partial f(x_0) &\Longleftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle, \ \forall x \in E; \\
y' \in \partial f(x_0) &\Longleftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle y', x - x_0\rangle, \ \forall x \in E.
\end{aligned}$$

En multipliant ces deux dernières inégalités par t, $(1-t)$ respectivement et en additionnant on obtient

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle tx' + (1-t)y', x - x_0 \rangle,$$

et par suite $tx' + (1-t)y' \in \partial f(x_0)$.
Par conséquent $\partial f(x_0)$ est convexe.

Montrons que $\partial f(x_0)$ est fermé

Soit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\partial f(x_0)$ tel que x'_n converge vers $x' \in E'$ quand n tend vers $+\infty$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ x'_n \in \partial f(x_0) &\Longleftrightarrow f^*(x'_n) + f(x_0) = \langle x'_n, x_0 \rangle,\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} f^*(x'_n) + f(x_0) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \langle x'_n, x_0 \rangle \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} f^*(x'_n) + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} [\sup_{x\in E}(\langle x'_n, x \rangle - f(x))] + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
&\Longleftrightarrow \sup_{x\in E}[\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\langle x'_n, x \rangle - f(x))] + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
&\Longleftrightarrow \sup_{x\in E}[\langle x'_n, x \rangle - f(x)] + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
&\Longleftrightarrow f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
&\Longleftrightarrow x' \in \partial f(x_0).
\end{aligned}$$

Donc $\partial f(x_0)$ est un sous ensemble fermé de E'. ■

Théorème 1.7.13. *Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Si f est finie et continue au point x_0, alors pour tout $v \in E$ on a*

$$f'(x_0) = \sup_{x'\in\partial f(x_0)} \langle x', v \rangle.$$

Proposition 1.7.14. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Si f est Gâteaux différentiable au point x_0, alors $\partial f(x_0)$ est un singleton et est égal à $\nabla f(x_0)$ i.e.,*

$$\partial f(x_0) = \nabla f(x_0).$$

Inversement. *Si f est finie et continue en $x_0 \in E$, et si $\partial f(x_0)$ est un singleton, alors f est Gâteaux différentiable au point x_0 et $\nabla f(x_0) = \{\partial f(x_0)\}$.*

Démonstration.

Supposons que f est Gâteaux différentiable en x_0, donc

$$f'(x_0; v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle,\ \forall v \in E$$

On a

$$x' \in \partial f(x_0) \Longleftrightarrow f'(x_0; v) \geq \langle x', v\rangle,\ \forall v \in E,$$

d'où

$$\langle \nabla f(x_0), v\rangle \geq \langle x', v\rangle,\ \forall v \in E.$$

D'autre part, $v \in E$ alors $-v \in E$, donc

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x_0), -v\rangle &\geq \langle x', -v\rangle \\ \langle \nabla f(x_0), v\rangle &\leq \langle x', v\rangle,\ \forall v \in E. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x_0), v\rangle = \langle x', v\rangle,\ \forall v \in E &\Longleftrightarrow \langle \nabla f(x_0) - x', v\rangle = 0,\ \forall v \in E \\ &\Longleftrightarrow \nabla f(x_0) - x' = 0_{E'} \\ &\Longleftrightarrow x' = \nabla f(x_0). \end{aligned}$$

Alors pour tout $x' \in \partial f(x_0)$, $x' = \nabla f(x_0)$, d'où $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
Inversement. D'après le Théorème précédent : $f'(x_0; v) = \sup\limits_{x' \in \partial f(x_0)} \langle x', v\rangle,\ \forall v \in E$ et comme $\partial f(x_0)$ est un singleton, alors $f'(x_0; v) = \langle \partial f(x_0), v\rangle,\ \forall v \in E$.
Par conséquent f est Gâteaux différentiable en x_0 et $\nabla f(x_0) = \{\partial f(x_0)\}$. ■

Corollaire 1.7.15. *Soient E un espace vectoriel et f une fonction propre. Alors f admet un minimum global au point x_0 si et seulement si $0 \in \partial f(x_0)$.*

Démonstration.
On a

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(x_0) &\Longleftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + \langle 0, x - x_0\rangle,\ \forall v \in E \\ &\Longleftrightarrow f(x) \geq f(x_0),\ \forall v \in E \\ &\Longleftrightarrow x_0 \textit{ est un minimum global de } f. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.7.16. *Soit $f : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre convexe et soit $x_0 \in dom(f)$.*
Alors

$$\forall \lambda > 0,\ \partial(\lambda f)(x_0) = \lambda \partial f(x_0).$$

Démonstration.

Rappelons que $(\lambda f^*)(x') = \lambda f^*(\frac{x'}{\lambda})$.

Soient $\lambda > 0$ et $x' \in \partial(\lambda f)(x_0)$

$$\begin{aligned} x' \in \partial(\lambda f)(x_0) &\Longleftrightarrow (\lambda f^*)(x') + (\lambda f)(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\ &\Longleftrightarrow \lambda f^*(\frac{x'}{\lambda}) + \lambda f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\ &\Longleftrightarrow f^*(\frac{x'}{\lambda}) + f(x_0) = \langle \frac{x'}{\lambda}, x_0 \rangle \\ &\Longleftrightarrow \frac{x'}{\lambda} \in \partial f(x_0) \\ &\Longleftrightarrow x' \in \lambda \partial f(x_0). \end{aligned}$$

■

1.8 Cône normal

Définition 1.8.1. ***(Le cône).*** *Un sous-ensemble A d'un espace vectoriel E est un Cône si*

$$\forall x \in A,\ \forall \lambda \geq 0,\ \lambda x \in A.$$

Définition 1.8.2. *Soient $A \subset E$ $x \in A$. Le cône normal à A au point x, noté par $N_A(x)$ est l'ensemble défini par*

$$N_A(x) = \{x' \in E',\ \langle x', y - x \rangle \leq 0,\ \forall y \in A\}.$$

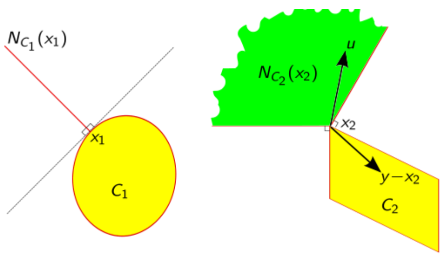

FIGURE 1.1

Proposition 1.8.3.

1. *Si $x \notin A$, alors $N_A(x) = \emptyset$.*
2. *Si $x \in int(A)$, alors $N_A(x) = \{0\}$.*

Proposition 1.8.4. *Soit $A \subset E$ un sous ensemble convexe tel que $int(A) \neq \emptyset$. Si $x \in Fr(A)$, alors $N_A(x) \neq \{0\}$.*

Pour plus des détails sur ce chapitre on se réfère à ([2], [3], [7], [18]).

Chapitre 2

Cône proximal et sous différentiel proximal

Nous présentons dans ce chapitre deux concepts de base d'analyse non lisse : le cône proximal et le sous différentiel proximal. Nous donnons également le lien entre le sous différentiel proximal et le cône proximal, leurs propriétés ainsi que quelques règles de calcul. Une partie de ce chapitre sera consacrée au sous différentiel de la fonction distance.

2.1 Normales proximales

Considérons un ensemble fermé S de l'espace de Hilbert H. Le tout premier objet que l'on peut associer à cet ensemble est la fonction distance d_S (notée aussi $d(.,S)$) ; elle est définie de la manière suivante :

$$\forall x \in H, d_S(x) = \inf_{s \in S} \|x - s\|.$$

Il est important de remarquer que l'infimum de la définition ci-dessus est toujours réalisé lorsque l'ensemble S est fermé et non vide ; en d'autre termes, pour tout x de H, il existe un point s de S tel que $d_S(x) = \|x-s\|$, le vecteur $x-s$ est alors appelé normale proximale. Nous noterons $proj_S(x)$ l'ensemble de tous les points qui réalisent la distance de x à S. Par ailleurs le lemme suivant apporte une première information sur la fonction distance

Lemme 2.1.1. *La fonction distance est 1-Lipschitzienne sur H.*

Définition 2.1.2. *Soient S un ensemble fermé non vide de H. Pour tout $x \notin S$, il existe un point s de S le plus proche de x tel que : $d_S(x) = \|x - s\|$.*

L'ensemble de ces points est noté $proj_S(x)$ et est défini par

$$\begin{aligned} proj_S(x) &= \{s \in S, d_S(x) = \|x - s\|\}; \\ &= \{s \in S, \inf_{s' \in S} \|x - s'\| = \|x - s\|\}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3. *Soient S un ensemble fermé non vide de H, et $x \in H$,$s \in S$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $s \in proj_S(x)$ *;*

(b) $\langle x - s, s' - s\rangle \leq \frac{1}{2}\|s' - s\|^2, \ \forall s' \in S$ *;*

(c) $s \in proj_S(s + t(x - s)), \ \forall t \in [0, 1]$ *;*

(d) $d_S(s + t(x - s)) = t\|x - s\|, \ \forall t \in [0, 1]$.

Démonstration.

(a) $\Longleftrightarrow$ **(b)**

$$\begin{aligned} s \in proj_S(x) &\Longleftrightarrow d_S(x) = \|x - s\| \\ &\Longleftrightarrow \|x - s\| \leq \|x - s'\|, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \|x - s\|^2 \leq \|x - s'\|^2, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \langle x - s, x - s\rangle + \langle x - s, s' - x\rangle \leq \langle x - s', x - s'\rangle + \langle x - s, s' - x\rangle, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \langle x - s, x - s + s' - x\rangle \leq \langle x - s', x - s'\rangle - \langle x - s, x - s'\rangle, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \langle x - s, s' - s\rangle \leq \langle x - s', x - s' - x + s\rangle, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \langle x - s, s' - s\rangle \leq \langle s' - x, s' - s\rangle, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \langle x, s' - s\rangle - \langle s, s' - s\rangle \leq \langle s', s' - s\rangle - \langle x, s' - s\rangle, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow 2\langle x, s' - s\rangle - \langle s, s' - s\rangle \leq \langle s', s' - s\rangle, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \langle x, s' - s\rangle - \frac{1}{2}\langle s, s' - s\rangle \leq \frac{1}{2}\langle s', s' - s\rangle, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \langle x, s' - s\rangle - \frac{1}{2}\langle s, s' - s\rangle - \frac{1}{2}\langle s, s' - s\rangle \leq \frac{1}{2}\langle s', s' - s\rangle - \frac{1}{2}\langle s, s' - s\rangle, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \langle x, s' - s\rangle - \langle s, s' - s\rangle \leq \frac{1}{2}\langle s', s' - s\rangle - \frac{1}{2}\langle s, s' - s\rangle, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \langle x - s, s' - s\rangle \leq \frac{1}{2}\langle s' - s, s' - s\rangle, \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \langle x - s, s' - s\rangle \leq \frac{1}{2}\|s' - s\|^2, \forall s' \in S. \end{aligned}$$

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)
Soit $t \in [0,1]$ et $s' \in S$, on a

$$\begin{aligned} & t\langle x-s, s'-s\rangle \leq \langle x-s, s'-s\rangle \leq \frac{1}{2}\|s'-s\|^2 \\ \Longleftrightarrow & \langle (s+t(x-s))-s, s'-s\rangle \leq \frac{1}{2}\|s'-s\|^2 \\ \Longleftrightarrow & s \in proj_S(s+t(x-s)). \end{aligned}$$

(c) $\Longleftrightarrow$ (d)
Soit $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} s \in proj_S(s+t(x-s)) & \Longleftrightarrow \|s+t(x-s)-s\| = d_S(s+t(x-s)) \\ & \Longleftrightarrow t\|x-s\| = d_S(s+t(x-s)). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Définition 2.1.4. *Soient S un ensemble fermé non vide de H, et $s \in S$. On définit* ***le cône normal proximal*** *(où* ***le cône proximal****) de S en s de la manière suivante*

$$\begin{aligned} N_S^p(s) &= \{v \in H,\ \exists\ t > 0,\ tel\ que:\ d_S(s+tv) = t\|v\|\}; \\ &= \{v \in H,\ \exists\ t > 0,\ tel\ que:\ s \in proj_S(s+tv)\}. \end{aligned}$$

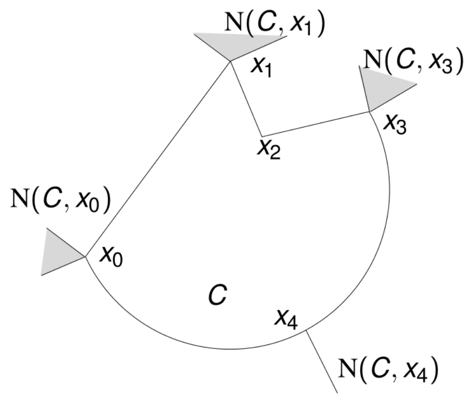

FIGURE 2.1

Le cône proximal réunit toutes les directions v pour lesquelles il existe des normales proximales du type $x-s$ où x dans H, s est dans S, et où $x-s$ est positivement colinéaire à v. Nous pouvons en donner la caractérisation suivante.

Proposition 2.1.5. *Soit S un ensemble fermé non vide de H, $s \in S$ et $v \in H$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $v \in N_S^p(s)$ *;*

(ii) $\exists\ t > 0,$ *tel que :* $proj_S(s + tv) = s$ *;*

(iii) $\exists\ t > 0,$ *tel que :* $\forall s' \in S,\ t\|v\| \leq \|s + tv - s'\|$ *;*

(iv) $\exists\ \sigma \geq 0$ *tel que :* $\forall s' \in S,\ \langle v, s' - s\rangle \leq \sigma\|s' - s\|^2.$

Démonstration.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

$$\begin{aligned} v \in N_S^p(s) &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ d_S(s + tv) = t\|v\| \\ &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ s \in proj_S(s + tv) \\ &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ d_S(s + tv) = t\|v\| = \|s + tv - s'\| \end{aligned}$$

donc $s' = s$ et on a

$$v \in N_S^p(s) \Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ proj_S(s + tv) = s.$$

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

Soit $s' \in S$, et $v \in H$

$$\begin{aligned} s \in proj_S(s + tv) &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ \|s + tv - s\| = \inf \|s + tv - s'\|,\ \forall s' \in S \\ &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ t\|v\| \leq \|s + tv - s'\|,\ \forall s' \in S. \end{aligned}$$

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv)

Soient $s', s \in S$, et $v \in H$

$$\begin{aligned} t\|v\| \leq \|s + tv - s'\| &\Longleftrightarrow t^2\|v\|^2 \leq \|s + tv - s'\|^2 \\ &\Longleftrightarrow t^2\|v\|^2 \leq \|s - s'\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2\langle s - s', tv\rangle \\ &\Longleftrightarrow 2t\langle v, s' - s\rangle \leq \|s' - s\|^2 \\ &\Longleftrightarrow \langle v, s' - s\rangle \leq \frac{1}{2t}\|s' - s\|^2 \\ &\Longleftrightarrow \exists\ \sigma = \frac{1}{2t} > 0, \langle v, s' - s\rangle \leq \sigma\|s' - s\|^2, \forall s' \in S. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.6.

Il est maintenant facile de voir, que le cône proximale est un cône convexe. Mais, il n'a aucune raison d'être fermé.

D'autre part, on se rend bien compte que la structure du cône proximale $N_S^p(s)$ dépend de la forme de l'ensemble S dans un voisinage de s. Ceci peut se résumer par la proposition suivante.

Proposition 2.1.7. *Soit $\delta > 0$ donné,alors un vecteur v appartient à $N_S^p(s)$* ***ssi*** *il existe $\sigma = \sigma(v,s) \geq 0$ tel que*

$$\langle v, s' - s \rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2,\ \forall s' \in S \cap B(s, \delta).$$

Lemme 2.1.8. *Soit S un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, donc $proj_S(x) \neq \emptyset$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n/S$ et l'ensemble $\{s \in proj_S(x) : x \in \mathbb{R}^n/S\}$ est dense dans $Fr(S)$.*

Il est d'autre part intéressant de noter que lorsque l'ensemble S est convexe, le cône proximal coïncide avec le cône normal habituel. Nous avons donc la proposition suivante.

Proposition 2.1.9. *Soit S un ensemble convexe fermé et non vide. Alors*
(a) $v \in N_S^p(s) \Longleftrightarrow \langle v, s' - s \rangle \leq 0, \forall s' \in S.$
(b) *Si H de dimension finie et $s \in Fr(S) \Longrightarrow N_S^p(s) \neq \{0\}$.*

Démonstration.
(a)
$\Longrightarrow$)
D'après **la proposition 2.1.5** pour $\sigma = 0$, cela implique

$$\langle v, s' - s \rangle \leq 0,\ \forall s' \in S$$

$\Longleftarrow$)
S un ensemble convexe c'est-à-dire

$$\forall\ s', s \in S, \forall t \in [0,1],\ s_0 = ts' + (1-t)s \in S.$$

En vertu de la **proposition 2.1.5** on a

$$\begin{aligned}
v \in N_S^p(s) &\Longleftrightarrow \exists\ \sigma \geq 0, tel\ que:\ \forall s_0 \in S, \langle v, s_0 - s \rangle \leq \sigma \|s_0 - s\|^2 \\
&\Longleftrightarrow \exists\ \sigma \geq 0, tel\ que:\ \langle v, ts' + (1-t)s - s \rangle \leq \sigma \|ts' + (1-t)s - s\|^2,\ \forall s, s' \in S \\
&\Longleftrightarrow \exists\ \sigma \geq 0, tel\ que:\ \langle v, t(s' - s) \rangle \leq \sigma \|t(s' - s)\|^2,\ \forall s, s' \in S \\
&\Longleftrightarrow \exists\ \sigma \geq 0, tel\ que:\ t\langle v, s' - s \rangle \leq \sigma t^2 \|s' - s\|^2,\ \forall s, s' \in S \\
&\Longleftrightarrow \exists\ \sigma \geq 0, tel\ que:\ \langle v, s' - s \rangle \leq \sigma t \|s' - s\|^2,\ \forall s, s' \in S
\end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque $t \downarrow 0$ on obtient

$$\langle v, s' - s \rangle \leq 0, \forall s' \in S.$$

(b) Soient $x \in \mathbb{R}^n\ S$ et $s \in Fr(S)$, en vertu du **lemme 2.1.8**, il existe une suite $(s_i)_i$ de S qui converge vers s, tel que

$$s_i \in proj_S(x_i),\ \forall x_i \in \mathbb{R}^n/S$$

et $x_i \longrightarrow x$.

Si $s_i \in proj_S(x_i)$, donc $x_i - s_i \in N_S^p(s_i) \neq \emptyset$. Soit $v_i \in N_S^p(s_i)$, tel que $\|v_i\| = 1$, $(v_i)_i$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$, donc on peut en extraire une sous suite encore notée v_i qui converge vers v et telle que $\|v\| = 1$. En utilisant la partie **(a)**, on obtient

$$\langle v_i, s' - s_i \rangle \leq 0, \ \forall s' \in S,$$

par passage à la limite quand $i \longrightarrow +\infty$, on trouve

$$\langle v, s' - s \rangle \leq 0, \ \forall s' \in S,$$

ce qui entraine par application de la partie **(a)** que $v \in N_S^p(s)$. Ce qui achève la démonstration. ■

2.2 Sous-gradients proximaux

Dans cette section, on note $\mathcal{F}(H)$ l'ensemble des fonctions semi-continue inférieurement de H dans $]-\infty, +\infty]$ i.e.

$$\mathcal{F}(H) = \{f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty], \ tel \ que, \ f \ s.c.i\}.$$

Définition 2.2.1. *Un vecteur $v \in H$ est appelé sous-gradient proximal de f en x* ***ssi***

$$(v, -1) \in N^p_{epi(f)}(x, f(x)).$$

L'ensemble de tous ces v s'appelle le sous différentiel proximal de f en x, et est noté $\partial_p f(x)$.

Remarque 2.2.2.
1. Si $\alpha > 0$, alors $(v, -\alpha) \in N^p_{epi(f)}(x, f(x))$ ***ssi*** *$\frac{v}{\alpha} \in \partial_p f(x)$.*
2. La remarque 2.1.6 nous permet immédiatement d'affirmer que $\partial_p f(x)$ est un ensemble convexe. Cependant il n'est pas nécessairement ouvert, fermé ou non vide.

Théorème 2.2.3. *Soient H un espace de Hilbert, U un ouvert de H, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Fréchet différentiable sur U, et $f \in C^2(U)$. Alors, il existe σ, $\delta \geq 0$*

$$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2, \tag{2.1}$$

pour tout $y \in B(x, \delta)$.

Donnons maintenant une caractérisation analytique du sous différentiel proximal. Celle-ci est fondamentale, elle constitue presque une nouvelle définition de sous gradients proximaux.

Théorème 2.2.4. *Soient $f \in F$ et $x \in dom(f)$. Alors $v \in \partial_p f(x)$ **ssi** $\exists\, \sigma, \delta \geq 0,$ tels que*

$$f(y) - f(x) + \sigma\|y-x\|^2 \geq \langle v, y-x\rangle,\ \forall\ y \in B(x,\delta). \tag{2.2}$$

Démonstration.

$\Longleftarrow)$

Soit $y \in B(x,\delta)$ et $(y,\alpha) \in epi(f)$ $(i.e. f(y) \leq \alpha)$ l'inégalité (2.2) implique

$$\begin{aligned}
&\langle v, y-x\rangle \leq \alpha - f(x) + \sigma[\|y-x\|^2 + |\alpha - f(x)|^2]\\
\Rightarrow &\langle v, y-x\rangle \leq \alpha - f(x) + \sigma\langle (y-x, \alpha - f(x)), (y-x, \alpha - f(x))\rangle
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sigma\langle (y,\alpha) - (x, f(x)), (y,\alpha) - (x,f(x))\rangle &\geq v(y-x) - (\alpha - f(x))\\
\Longrightarrow \sigma\|(y,\alpha) - (x,f(x))\|^2 &\geq \langle (v,-1), (y-x, \alpha - f(x))\rangle\\
\Longrightarrow \sigma\|(y,\alpha) - (x,f(x))\|^2 &\geq \langle (v,-1), (y,\alpha) - (x, f(x))\rangle
\end{aligned}$$

D'après (**la proposition 2.1.5 (iv)**) on obtient $(v,-1) \in N^p_{epi(f)}(x, f(x))$

$\Longrightarrow)$

Supposons que $(v,-1) \in N^p_{epi(f)}(x,f(x))$, c'est-à-dire

Il existe $t > 0$ tel que

$$(x, f(x)) \in proj_{epi(f)}((x,f(x)) + t(v,-1)),$$

ce qui implique pour (y,α) dans $epi(f)$

$$\begin{aligned}
&d_{epi(f)}((x,f(x)) + t(v,-1)) = t\|(x,f(x)) + t(v,-1) - (x,f(x))\|\\
\Rightarrow &t\|(v,-1)\| \leq \|[(x,f(x)) + t(v,-1)] - (y,\alpha)\|\\
\Rightarrow &t^2\|(v,-1)\|^2 \leq \|[(x,f(x)) + t(v,-1)] - (y,\alpha)\|^2\\
\Rightarrow &t^2\|v\|^2 + t^2 \leq \|x - tv - y\|^2 + |f(x) - t_\alpha|^2\\
\Rightarrow &t^2\|v\|^2 + t^2 \leq \|x-y\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t\langle v, y-x\rangle + (f(x) - t - \alpha)^2\\
\Rightarrow &(f(x) - t - \alpha)^2 \geq t^2 + 2t\langle v, y-x\rangle - \|x-y\|^2
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = f(y)$, on trouve

$$(f(x) - t - f(y))^2 \geq t^2 + 2t\langle v, y-x\rangle - \|x-y\|^2$$

Maintenant, t étant constant, il est clair que le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est positif pour y suffisamment proche de x. Par ailleurs, on peut supposer que pour

$y \in B(x, \delta)$, $f(y) - f(x) + t > 0$ (ceci car f est s.c.i).

Ainsi, par passage à la racine carrée dans l'inégalité démontrée plus haut, on obtient

$$f(y) \geq g(y) = f(x) - t + \{t^2 + 2t\langle v, y - x\rangle - \|x - y\|^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

Montrons que pour tout y dans $B(x, \delta)$, on a $g'(x) = v$

En effet

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{g(y + tu) - g(y)}{\varepsilon} = \langle g'(y), u\rangle, \ \forall u \in E.$$

Pour tout $u \in E$ on a

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{g(y + tu) - g(y)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\{t^2 + 2t\langle v, y + \varepsilon u - x\rangle - \|x - y - \varepsilon u\|^2\}^{\frac{1}{2}} - \{t^2 + 2t\langle v, y - x\rangle - \|x - y\|^2\}^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{2t\langle v, \varepsilon u\rangle - \varepsilon^2\|u\|^2 + 2\varepsilon\langle x - y, u\rangle}{\varepsilon\{t^2 + 2t\langle v, y + \varepsilon u - x\rangle - \|x - y - \varepsilon u\|^2\}^{\frac{1}{2}} + \{t^2 + 2t\langle v, y - x\rangle - \|x - y\|^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{2t\langle v, u\rangle - \varepsilon\|v\|^2 + 2\langle x - y, u\rangle}{\{t^2 + 2t\langle v, y + \varepsilon u - x\rangle - \|x - y - \varepsilon u\|^2\}^{\frac{1}{2}} + \{t^2 + 2t\langle v, y - x\rangle - \|x - y\|^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2t\langle v, u\rangle + 2\langle x - y, u\rangle}{2\{t^2 + 2\langle v, y - x\rangle - \|x - y\|^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \langle \frac{tv + x - y}{\{t^2 + 2\langle v, y - x\rangle - \|x - y\|^2\}^{\frac{1}{2}}}, u\rangle$$

En particulier pour $x = y$ on obtient

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{g(x + tu) - g(x)}{\varepsilon} = \langle v, u\rangle = \langle g'(x), u\rangle$$

alors $g'(x) = v$, et que g'' existe et est bornée (disons par $2\sigma > 0$) dans un voisinage de x ; ainsi, quitte à modifier δ, on a

$$g(y) \geq g(x) + \langle v, y - x\rangle - \sigma\|y - x\|^2 \ \forall y \in B(x, \delta).$$

d'après (2.3), on a

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle - \sigma\|y - x\|^2 \ \forall y \in B(x, \delta).$$

$\blacksquare$

Remarque 2.2.5. *La preuve est considérablement simplifiée lorsque la fonction f est supposée localement Lipschitzienne. En effet, la condition suffisante reste identique (le σ de (**??**) peut être pris égal à celui de (2.2)). En revanche, si $(v,-1) \in N^p_{epi(f)}(x, f(x))$, la* ***proposition 2.1.5* (iii)** *permet d'affirmer qu'il existe $\sigma \geq 0$ tel que*

$$\langle v, y-x\rangle - (f(y)-f(x)) \leq \sigma\|y-x\|^2 + (f(y)-f(x))^2,$$

pour tout y proche de x. Maintenant, $|f(y)-f(x)|$ est borné localement par $K|y-x|$; ceci nous permet de conclure avec $\sigma' = \sigma + K$.

Corollaire 2.2.6. *Soient S un ensemble fermé non vide de H, et $x \in S$. On définit le cône normal proximal de S en x par $N^p_S(x) = \partial_p \delta_S(x)$, où δ_S représente la fonction indicatrice de S.*

Démonstration.
On a

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in S \\ +\infty & Sinon \end{cases}$$

Soit $x \in S$, on a par définition du sous différentiel proximal

$$\begin{aligned} v \in \partial_p\delta_S(x) &\Longleftrightarrow \exists\ \sigma,\ \delta > 0,\ tel\ que : \langle v, y-x\rangle \leq \sigma\|y-x\| + \delta_S(y) - \delta_S(x),\ \forall y \in B(x,\delta) \\ &\Longleftrightarrow \exists\ \sigma,\ \delta > 0,\ tel\ que : \langle v, y-x\rangle \leq \sigma\|y-x\|,\ \forall y \in B(x,\delta). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} v \in N^p_S(x) &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ d_S(x+tv) = t\|v\| \\ &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ t\|v\| = \inf_{y \in S} \|x+tv-y\| \\ &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ t\|v\| \leq \|x+tv-y\|,\ \forall y \in S \\ &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ t^2\|v\|^2 \leq \|x+tv-y\|^2,\ \forall y \in S \\ &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ t^2\|v\|^2 \leq \langle x+tv-y, x+tv-y\rangle,\ \forall y \in S \\ &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ t^2\|v\|^2 \leq \|x-y\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t\langle -y, v\rangle,\ \forall y \in S \\ &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ -2t\langle x-y, v\rangle \leq \|x-y\|^2,\ \forall y \in S \\ &\Longleftrightarrow \exists\ t > 0,\ \langle v, y-x\rangle \leq \frac{1}{2t}\|x-y\|^2,\ \forall y \in S. \end{aligned}$$

D'près la **proposition 2.1.7**, on a

$$\begin{aligned} v \in N_S^p(x) &\Longleftrightarrow \exists\ \sigma = \frac{1}{2t} > 0,\ tel\ que\ \langle v, y-x\rangle \leq \sigma\|x-y\|^2,\ \forall y \in S \cap B(x,\delta) \\ &\Longleftrightarrow \exists\ \sigma = \frac{1}{2t} > 0,\ tel\ que\ \langle v, y-x\rangle \leq \sigma\|x-y\|^2,\ \forall y \in B(x,\delta) \\ &\Longleftrightarrow N_S^p(x) = \partial_p I_S(x). \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.7. *Soit $f \in \mathcal{F}$ et $U \subset H$ un ouvert. On a les propriétés suivantes*

(a) *Supposons que f est Gâteaux différentiable au point $x \in U$, alors*

$$\partial_p f(x) \subseteq \{f'_G(x)\}$$

(b) *Si $f \in C^2(U)$, alors*

$$\partial_p f(x) = \{f'(x)\}, \forall x \in U$$

(c) *Si f est convexe, alors $v \in \partial_p f(x)$* ***ssi***

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y-x\rangle,\ \forall y \in H \tag{2.4}$$

Démonstration.

(a)

Supposons que f est Gâteaux différentiable au point $x \in U$ et $v \in \partial_p f(x)$,

et montrons que $\partial_p f(x) \subseteq \{f'_G(x)\}$:

On a

f est Gâteaux différentiable au point x donc

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = \langle f'_G(x), v\rangle,\ \forall v \in H.$$

D'autre part on a

$u \in \partial_p f(x) = \{u \in H, \exists\ \sigma, \delta > 0 :\ \langle u, y-x\rangle \leq f(y) - f(x) + \sigma\|y-x\|^2,\ \forall y \in B(x,\delta)\}$.

Si on prend $y = x + tv$ pour tout $v \in H$ on obtient

$$\begin{aligned} u \in \partial_p f(x) &\Longleftrightarrow \exists\ \sigma, \delta > 0, tel\ que : \langle u, x+tv-x\rangle \leq f(x+tv) - f(x) + \sigma\|x+tv_x\|^2 \\ &\Longleftrightarrow \exists\ \sigma, \delta > 0, tel\ que : t\langle u, v\rangle \leq f(x+tv) - f(x) + \sigma t^2\|v\|^2 \\ &\Longleftrightarrow \exists\ \sigma, \delta > 0, tel\ que : \langle u, v\rangle \leq \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} + \sigma t\|v\|^2. \end{aligned}$$

Passons à la limite quand $t \downarrow 0$, on obtient

$$\langle u, v\rangle \leq \lim \frac{f(x+tv)-f(x)}{t},$$

ce qui implique

$$\langle f'_G(x), v\rangle - \langle u, v\rangle \geq 0,$$

et par suite

$$\langle f'_G(x) - u, v\rangle \geq 0,$$

Pour $v = -(f'_G - u)$

$$\begin{aligned}\langle f'_G(x) - u, (-f'_G(x) - u)\rangle \geq 0 &\Longrightarrow \|f'_G(x) - u\|^2 \leq 0 \\ &\Longrightarrow f'_G(x) = u.\end{aligned}$$

Par conséquent $\partial_p f(x) \subseteq \{f'_G(x)\}$.

(b)

Si $f \in C^2(U)$ et $x \in U$, alors $f'(x) \in \partial_p f(x)$ par le **théorème 2.2.4**, puisque (2.1) implique (2.2) si $v = f'(x)$. D'après la partie **(a)**, $\partial_p f(x)$ contient seulement $f'(x)$, alors $\partial_p f(x) = \{f'(x)\}$.

(c)

f est convexe, i.e., $\forall x, y \in H, \forall t \in [0,1]$

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x).$$

$$v \in \partial_p f(x) \Longleftrightarrow \exists\ \sigma, \delta \geq 0 \ \textit{tel que}: f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle - \sigma\|y - x\|^2,\ \forall y \in B(x, \delta).$$

Soit $y \in H$,$t \in [0,1]$ et $(1-t)x + ty \in B(x,\delta)$

$f(x) + \langle v, (1-t)x + ty - x\rangle - \sigma\|(1-t)x + ty - x\|^2 \leq f((1-t)x + ty - x)$

$\Leftrightarrow f(x) + t\langle v, y - x\rangle - \sigma t^2\|y - x\|^2 \leq tf(y) + (1-t)f(x)$

$\Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle - \sigma.t\|y - x\|^2$

En passant à la limite quand $t \downarrow 0$ on obtient

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle,$$

ce qui achève la démonstration ■

Corollaire 2.2.8. *Supposons que $f \in \mathcal{F}$.*

(a) *Si f atteint son minimum local en x , alors $0 \in \partial_p f(x)$.*

(b) *Inversement, si f est convexe et $x_0 \in \partial_p f(x)$, alors x est un minimum global de f.*

Démonstration.

(a)

Supposons que f atteint un minimum local, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(y) \geq f(x)\ \forall y \in B(x, r),$$

qui est l'inégalité du sous différentiel proximal pour $v = 0$ et $\sigma = 0$, ce qui implique que

$$0 \in \partial_p f(x).$$

Pour démontrer **(b)**, en vertu de (2.4) avec $v = 0$, on obtient $f(y) \geq f(x)$ pour tout $y \in H$, et par conséquent Alors x est un minimum global de f. ■

Proposition 2.2.9. *Soit $f \in \mathcal{F}$, alors*

(i) $\partial_p f(x) + \partial_p g(x) \subseteq \partial_p(f + g)(x)$.

(ii) $\forall \lambda \geq 0,\ \partial_p(\lambda f)(x) = \lambda \partial_p f(x)$.

Démonstration.

(i)

Soit $x \in H$

$$\begin{aligned}
(v+u) \in \partial_p f(x) + \partial_p g(x) \Rightarrow v \in \partial_p f(x) \ et \ u \in \partial_p g(x) & \\
\Rightarrow & \exists \sigma_1, \delta_1 \geq 0, f(y) \geq f(x) - \sigma_1 \|y - x\|^2 + \langle v, y - x\rangle \ \forall y \in B(x, \delta_1) \\
& \exists \sigma_2, \delta_2 \geq 0, g(y) \geq g(x) - \sigma_2 \|y - x\|^2 + \langle v, y - x\rangle \ \forall y \in B(x, \delta_2) \\
\Rightarrow & (f+g)(y) \geq (f+g)(x) + \langle v + u, y - x\rangle - (\sigma_1 + \sigma_2)\|y - x\|^2 \\
& \forall y \in B(x, \delta_1) \ et \ y \in B(x, \delta_2),
\end{aligned}$$

donc, il existe $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) \geq 0$, pour tout $y \in B(x, \delta_1) \cap B(x, \delta_2)$ tel que

$$(v + u) \in \partial_p(f + g).$$

(ii)

Soient $\lambda > 0, x \in H$

$$\begin{aligned}
v \in \partial_p(\lambda f)(x) & \Leftrightarrow \exists \sigma, \delta \geq 0,\ (\lambda f)(y) \geq (\lambda f)(x) - \sigma \|y - x\|^2 + \langle v, y - x\rangle \ \forall y \in B(x, \delta) \\
& \Leftrightarrow \exists \sigma, \delta \geq 0,\ \lambda f(y) \geq \lambda (f)(x) - \sigma \|y - x\|^2 + \langle v, y - x\rangle \ \forall y \in B(x, \delta) \\
& \Leftrightarrow \exists \sigma' = \frac{\sigma}{\lambda}, \delta \geq 0,\ f(y) \geq (f)(x) - \frac{\sigma}{\lambda}\|y - x\|^2 + \langle \frac{v}{\lambda}, y - x\rangle \ \forall y \in B(x, \delta) \\
& \Leftrightarrow \frac{v}{\lambda} \in \partial_p f(x) \\
& \Leftrightarrow v \in \lambda \partial_p f(x).
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.10. *Soient f, g deux fonctions s.c.i sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.*
(i) *Si $v \in \partial_p min\{f, g\}(x)$, alors $v \in \partial_p f(x)$ si le minimum est atteint pour f et $v \in \partial_p g(x)$ dans l'autre cas.*

(ii) *Si $g \in C^2(U)$, alors*

$$v \in \partial_p(f+g)(x) \Longrightarrow v - g'(x) \in \partial_p f(x)$$

Démonstration.
(i)
Si le minimum est atteint pour f, on peut écrire pour un certain $\sigma \geq 0$,

$$\begin{aligned} min\{f, g\}(y) - f(x) + \sigma\|y-x\|^2 &\geq \langle v, y-x\rangle \\ f(y) - f(x) + \sigma\|y-x\|^2 &\geq \langle v, y-x\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, $v \in \partial_p f(x)$.
D'autre part, si le minimum est atteint pour g, on peut écrire pour un certain $\sigma \geq 0$,

$$\begin{aligned} min\{f, g\}(y) - g(x) + \sigma\|y-x\|^2 &\geq \langle v, y-x\rangle \\ g(y) + \sigma\|y-x\|^2 &\geq \langle v, y-x\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, $v \in \partial_p g(x)$.
(ii)
Comme g (ou $-g$) est deux fois différentiable dans un voisinage de x on peut trouver une constante σ' tel que

$$g(x) - g(y) + \sigma'\|y-x\|^2 \geq \langle -g'(x), y-x\rangle, \ \forall y \in B(x, \delta).$$

D'autre part, comme $v \in \partial_p(f+g)(x)$ d'après le **théorème 2.2.4**, il existe $\sigma \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned} &(f+g)(y) \geq (f+g)(x) + \langle v, y-x\rangle - \sigma\|y-x\|^2, \ \forall y \in B(x, \delta') \\ \Leftrightarrow\, &f(y) + g(y) \geq f(x) + g(x) + \langle v, y-x\rangle - \sigma\|y-x\|^2, \ \forall y \in B(x, \delta'), \end{aligned}$$

là aussi dans un certain voisinage de x. En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$f(y) - f(x) + (\sigma + \sigma')\|y-x\|^2 \geq \langle v - g'(x), y-x\rangle$$

Pour $\sigma'' = \sigma' + \sigma$

$$f(y) - f(x) + \sigma''\|y-x\|^2 \geq \langle v - g'(x), y-x\rangle,$$

quand $y \in B(x, \delta) \cap B(x, \delta')$. Ceci implique, en vertu du **théorème 2.2.4** que
$v - g'(x) \in \partial_p f(x)$. ∎

Théorème 2.2.11. ***(La valeur moyenne).*** *Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que $x, y \in H$ et $f \in \mathcal{F}$, et f est Gâteaux différentiable sur un voisinage du segment $[x, y]$ (où $[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$), alors il existe $z \in [x, y]$ tel que*

$$f(y) - f(x) = \langle f'_G(z), y - x \rangle.$$

Démonstration.
Considérons la fonction suivante

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = f(ty + (1-t)x) - tf(y) - (1-t)f(x). \end{aligned}$$

On a g est continue sur $[0,1]$, différentiable sur $]0,1[$, et vérifie $g(0) = g(1) = 0$. Il s'ensuit qu'il existe un point $\bar{t} \in]0,1[$ soit un minimum ou un maximum de g sur $[0,1]$ (i.e., $g'(\bar{t}) = g(1) - g(0) = 0$).
Calculons $g'(\bar{t})$

$$\begin{aligned} g'(\bar{t}) &= f(\bar{t}y + (1-\bar{t})x))' - (\bar{t}f(y))' - ((1-\bar{t})f(x))' \\ &= f'(\bar{t}y + (1-\bar{t})x))(y - x) - (f(y) - f(x)) \\ &= \langle f'_G(z), y - x \rangle - (f(y) - f(x)). \end{aligned}$$

$g'(\bar{t}) = 0$, alors

$$f(y) - f(x) = \langle f'_G(z), y - x \rangle.$$

■

Théorème 2.2.12. ***(Théorème de minimisation)***. *Soit $f \in \mathcal{F}$, et supposons que f est bornée sur un ensemble borné fermé $S \subset H$ avec $S \cap dom(f) \neq \emptyset$. Alors, il existe un ensemble des points x dense dans H, ayant la propriété que la fonction $y \longmapsto f(y) - \langle x, y \rangle$ atteint un minimum unique sur S'.*

Nous établissons maintenant un théorème important qui affirme que l'ensemble $dom(\partial_p f)$ des points dans $dom(f)$ auxquels il existe au moins un sous-gradient proximal est dense dans $dom(f)$.

Théorème 2.2.13. *Supposons que $f \in \mathcal{F}$, soit $x_0 \in dom(f)$, et $\varepsilon > 0$ sont donnés. Alors, il existe un point $y \in B(x_0, \varepsilon)$ satisfaisant $\partial_p f(y) \neq \emptyset$, et $f(x_0) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x_0)$. En particulier, $dom(\partial_p f)$ est dense dans $dom(f)$.*

Démonstration.

Supposons que f est s.c.i, c'est-à-dire, il existe δ avec $0 < \delta < \varepsilon$ tel que

$$x \in \overline{B}(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

Nous donnons d'abord une démonstration dans le cas $H = \mathbb{R}^n$.
Définissions la fonction

$$g(x) = \begin{cases} [\delta^2 - \|x - x_0^2]^{-1} & si\ \|x - x_0\| < 0, \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

La fonction g appartient à $C^2(B(x_0, \delta))$, considérons la fonction $f + g \in F$ qui est bornée sur la boule fermée de centre x_0 et de rayon δ. D'après le théorème de minimisation, la fonction $f + g$ atteint un minimum local y sur $\overline{B}(x_0, \delta)$ qui est évidement dans $B(x_0, \delta)$, alors $0 \in \partial_p(f + g)(y)$. Par la **proposition 2.2.10** on obtient

$$-g'(y) \in \partial_p(f)(y),$$

et par suite, $\partial_p(f)(y) \neq \emptyset$.
Puisque δ peut être arbitrairement petit, il s'ensuit que $dom(\partial_p(f))$ est dense dans $dom(f)$.
Il reste à montrer que $f(y) \leq f(x_0)$
y est un minimum local de $f + g$ i.e.,

$$\begin{aligned} &(f + g)(y) \leq (f + g)(x_0),\ \forall y \in B(x_0, \delta) \\ \Rightarrow &f(y) + g(y) \leq f(x_0) + g(x_0),\ \forall y \in B(x_0, \delta) \\ \Rightarrow &f(y) \leq f(x_0) + (g(x_0) - g(y)) \leq f(x_0)\ (car\ g(x_0) \leq g(y)),\ \forall y \in (x_0, \delta) \\ \Rightarrow &f(y) \leq f(x_0),\ \forall y \in B(x_0, \delta). \end{aligned}$$

Ainsi le preuve est complète dans le cas d'un espace de dimension finie. pour cas d'un espace quelconque voir [12]. ■

2.3 La fonction distance

Dans cette partie nous examinons le sous-gradient proximal de la fonction distance d_S associée à un sous-ensemble fermé non vide S de H.

Proposition 2.3.1. *Supposons que S un sous-ensemble fermé de H, et que f est K-Lipschitzienne sur un ensemble ouvert U qui contient S. Supposons que $s \in S$ est un minimum de f. Alors, la fonction $x \longmapsto f(x) + Kd_S(x)$ atteint son minimum sur U au point $x = s$. Inversement, si $K' > K$ et $x \longmapsto f(x) + K'd_S(x)$ atteint son minimum sur U au point $x = s$, alors, $s \in S$.*

Démonstration.
Supposons que $x \in U$ et $\varepsilon > 0$. Soit $s' \in S$ tel que

$$\|x - s'\| < d_S(x) + \varepsilon$$

f atteint un minimum sur S à s, i.e. $f(s) \leq f(s')$
en utilisant la propriété de Lipschitz nous avons

$$\begin{aligned} f(s) &\leq f(s') \\ &< f(x) + K\|s' - x\| \\ &< f(x) + Kd_S(x) + \varepsilon K \end{aligned}$$

Passant à la limite lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ on obtient

$$\begin{aligned} & f(s) \leq f(x) + Kd_S(x) \\ \Leftrightarrow & f(s) + Kd_S(s) < f(x) + Kd_S(x). \end{aligned}$$

On déduit que $f + Kd_S$ atteint son minimum sur U en $x = s$.
Pour prouvez l'inverse. Supposons que $K' > K$, et le point $s \notin S$ minimise $f + Kd_S$ sur U.
Choisissons $s' \in S$ tel que, $\|s' - s\| < \frac{K'}{K}d_S(s)$.
Supposons que s minimise $x \longmapsto f(x) + Kd_S(x)$ sur U, et puisque $s' \in S \subset U$, et f est K-Lipschitzienne, nous concluons que

$$\begin{aligned} f(s) + K'd_S(s) &\leq f(s') + K'd_S(s') \\ &\leq f(s) + K\|s' - s\| \\ &< f(s) + K'd_S(s). \end{aligned}$$

Alors $f(s) < f(s)$ contradiction, donc $s \in S$. ■

Le résultat suivant forme un lien entre le cône proximal et le sous différentiel de la fonction distance .

Théorème 2.3.2. *Supposons que S est fermé, et $s \in S$. Alors*

$$N_S^p(s) = \{tv : t \geq 0, v \in \partial_p d_S(s)\}.$$

Démonstration.
Supposons que $w \in N_S^p(s)$, alors il existe $\sigma \geq 0$ tel que

$$\langle w, s' - s\rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2$$

pour tout $s' \in S$. D'après le théorème de minimisation la fonction
$x \longmapsto -\langle w, x\rangle + \sigma\|x - s\|^2$ atteint son minimum sur S au point $x = s$ i.e.,

$$-\langle w, s\rangle \leq -\langle w, x\rangle + \sigma\|x - s\|^2.$$

la fonction $x \longmapsto -\langle w, x\rangle + \sigma\|x - s\|^2$ est localement lipschitzienne ; en effet
$| - \langle w, x\rangle + \sigma\|x - s\|^2 + \langle w, y\rangle - \sigma\|y - s\|^2|$
$\leq |\langle w, y - x\rangle + \sigma(\|x - s\|^2 - \|y - s\|^2)|$
$\leq |\langle w, y - x\rangle| + \sigma(|\|x - s\| + \|y - s\||)(|\|x - s\| - \|y - s\||)$
$\leq \|y - x\|(\|w\| + 2\sigma\delta)$,
donc il existe $K = \|w\| + 2\sigma\delta \geq 0$ tel que la fonction $x \longmapsto -\langle w, x\rangle + \sigma\|x - s\|^2$ est K-lipschitzienne, d'après la **proposition 2.3.1** la fonction
$x \longmapsto -\langle w, x\rangle + \sigma\|x - s\|^2 + Kd_S(x)$ atteint son minimum local au point $x = s$ i.e.,

$$\begin{aligned}
&-\langle w, s\rangle \leq -\langle w, x\rangle + \sigma\|x - s\|^2 + Kd_S(x)\\
\Leftrightarrow&\langle w, x - s\rangle \leq \sigma\|x - s\|^2 + Kd_S(x)\\
\Leftrightarrow&\langle \frac{w}{K}, x - s\rangle \leq \frac{\sigma}{K}\|x - s\|^2 + d_S(x) - d_S(s)\\
\Leftrightarrow&\frac{w}{K} \in \partial_p d_S(s)
\end{aligned}$$

On déduit que $w \in \{tv : t \geq 0,\ v \in \partial_p d_S(x)\}$
Pour prouver l'inclusion inverse, on suppose que $v \in \partial_p d_S(s)$, alors

$$\exists \sigma, \delta \geq 0\ d_S(x) - \langle v, x - s\rangle + \sigma\|x - s\|^2 \geq d_S(s) = 0\ \forall x \in B(s, \delta).$$

En particulier, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\langle v, s' - s\rangle \leq \sigma\|s' - s\|^2,$$

pour tout $s' \in S \cap B(s, \delta)$, ce qui est équivalent à

$$v \in N_S^p(s).$$

Or le cône proximal est un cône, on obtient $tv \in N_S^p(s)$. Ce qui termine la démonstration.

■

Nous pouvons de manière équivalente, lorsque $f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est semi-continue supérieurement, définir son sur-différentiel proximal. En effet $-f$ est une fonction s.c.i, on peut alors définir le sur-différentiel proximal $\partial^p f(x)$.

Définition 2.3.3. *Supposons que $-f \in \mathcal{F}$ et $x \in dom(-f)$, alors $v \in \partial^p f(x)$ **ssi** il existe des nombres positifs σ et δ tels que*

$$f(y) - f(x) - \sigma\|y - x\|^2 \leq \langle v, y - x\rangle \ \forall y \in B(x, \delta).$$

Théorème 2.3.4. *Soient S un ensemble fermé non vide de H, $x \notin S$, et $proj_S(x) \neq \emptyset$. Alors*

$$\partial^p d_S(x) \neq \emptyset.$$

Démonstration.
Considérons la fonction suivante

$$f_x(w) = \|w - x\|.$$

D'après la définition de la différentiabilité au sens de Gâteaux de la fonction f_x au point w

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0} \frac{f_x(w + tv) - f_x(w)}{w} &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{\|w + tv - x\| - \|w - x\|}{t} \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \frac{\|w + tv - x\|^2 - \|w - x\|^2}{t(\|w + tv - x\| + \|w - x\|)} \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \frac{t\|v\|^2 + 2\langle v, w - x\rangle}{\|w + tv - x\| + \|w - x\|} \\
&= \langle v, \frac{w - x}{\|w - x\|}\rangle.
\end{aligned}$$

On déduit que :

$$f'_x(w) = \frac{w - x}{\|w - x\|}.$$

De plus la fonction f'_x est K-lipschitzienne sur $B(u,\delta)$, d'après le théorème de la valeur moyenne, pour tout $x \in S$ et $w \in B(u,\delta)$, il existe $v \in [u,w]$ tel que

$$\begin{aligned}
f_x(w) - f_x(u) &= \langle f'_x(v), w-u\rangle \\
&= \langle f'_x(v) - f'_x(u) + f'_x(u), w-u\rangle \\
&= \langle f'_x(v) - f'_x(u), w-u\rangle + \langle f'_x(u), w-u\rangle \\
&\leq |\langle f'_x(v) - f'_x(u), w-u\rangle| + \langle f'_x(u), w-u\rangle \\
&\leq |f'_x(v) - f'_x(u)| \|w-u\| + \langle f'_x(u), w-u\rangle \\
&\leq K\|w-u\|^2 + \langle f'_x(u), w-u\rangle.
\end{aligned}$$

Soit $\bar{x} \in proj_S(u)$, alors pour tout $w \in B(u,\delta)$ on a

$$d_S(w) - d_S(u) - K \leq \langle f'_{\bar{x}}(u), w-u\rangle,$$

donc $f'_{\bar{x}}(u) \in \partial^p d_S(u)$. ■

Proposition 2.3.5. *Soit $f \in \mathcal{F}$, alors*

$$\partial^p f(x) = -\partial_p(-f)(x).$$

Théorème 2.3.6. *Soient S un ensemble fermé non vide de H, $x \notin S$, et $proj_S(x) \neq \emptyset$. Alors*
Si $\partial_p d_S(x) \neq \emptyset$, alors d_S est Fréchet différentiable au point x et

$$\partial_p d_S(x) = \partial^p d_S(x) = \{d'_S(x)\} = \{\frac{x-y}{d_s(x)}\},$$

tel que $proj_S(x) = \{y\}$.

Proposition 2.3.7. *Soient $U \subset H$ un ouvert convexe, et $f \in \mathcal{F}(U)$. Alors f est K-lipschitzienne si et seulement si*

$$\forall x \in U,\ \forall v \in \partial_p f(x),\ \|v\| \leq K.$$

Pour plus des détails sur ce chapitre on se réfère à ([11], [12], [13], [18]).

Chapitre 3

Processus de rafle non convexe du premier ordre

Le but du dernier chapitre est d'établir un résultat d'existence et d'unicité d'une solution absolument continue pour le processus de rafle non convexe du premier ordre avec une perturbation univoque, qui se présente sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + h(t) \ p.p. \ sur \ [0,T]; \\ x(0) = x_0 \in C(0); \end{cases} \tag{3.1}$$

Où C(t) est un ensemble non vide fermé de $\mathbb{R}^n$, uniformément $r-prox$ régulier. Nous détaillons un résultat dû à C. Castaing, A. Salvadori et L.Thibault [9]. Le problème sans perturbation ($h \equiv 0$), a était initialement étudié par L.Thibault [21], qui a démontré que toute solution du problème est solution du problème équivalent suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -\dot{v}(t)\partial d_{C(t)}(x(t)) \ p.p. \ sur \ [0,T]; \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

La méthode utilisée pour le problème (3.1) consiste à le ramener au problème sans perturbation.

3.1 Ensembles uniformément r-prox réguliers

La non convexité des valeurs des multifonctions, produit souvent plusieurs difficultés dans l'étude de quelques problèmes d'évolution contenant des cônes, entre autre le Processus de rafle, cette lacune a été comblée par l'introduction de sous ensembles réguliers

de telle façon que la projection existe sur des boules de rayon $r > 0$. Cette section est consacrée à l'étude de ce type de sous ensembles dit : ensembles uniformément r-prox-réguliers.
La proposition suivante révèle la relation entre le cône normal proximal et le sous différentiel proximal de la fonction distance, pour plus de détails sur ces ensembles voir [5].

Proposition 3.1.1. *[5]. Soit X un espace de vectoriel normé, S un sous-ensemble non vide fermé de X, et $x \in S$. Alors*

$$\partial_p d_S(x) = N_S^p(x) \cap B^*. \tag{3.2}$$

où B^* est la boule unité fermée du dual de X.

Démonstration.
Soit $x^* \in \partial_p d_S(x)$, alors il existe $\sigma > 0$, et $\delta > 0$ tels que pour tout $x' \in B(x, \delta)$, $\langle x^*, x' - x\rangle \leq \sigma\|x' - x\|^2 + d_S(x') - d_S(x) = \sigma\|x' - x\|^2 + d_S(x')$. Comme $x \in S$ donc pour tout $x' \in S \cap B(x, \delta)$,

$$\langle x^*, x' - x\rangle \leq \sigma\|x' - x\|^2,$$

ce qui assure que $x^* \in N_S^p(x)$. On a, en vertu de la **proposition 2.3.7** $\partial_p d_S(x) \subset B^*$, alors $x^* \in N_S^p(x) \cap B^*$.
Fixons maintenant $x^* \in N_S^p(x)$ avec $\|x^*\| \leq 1$, il existe alors $\sigma > 0$, et $\delta > 0$ tels que

$$\langle x^*, x' - x\rangle \leq \sigma\|x' - x\|^2 \textit{ pour tout } x' \in S \cap B(x, \delta). \tag{3.3}$$

Fixons maintenant $\gamma = min\{1, \frac{\delta}{3}\}$ et fixons aussi $z \in B(x, \gamma)$, puis choisissons $y_z \in S$ tel que

$$\|y_z - z\| \leq d_S(z) + \|z - x\|^2. \tag{3.4}$$

Alors $y_z \in B(x, \delta)$, puisque de (3.4)

$$\begin{aligned}\|y_z - x\| = \|y_z - z + z - x\| \leq \|y_z - z\| + \|z - x\| &\leq d_S(z) + \|z - x\|^2 + \|z - x\| \\ &\leq \|z - x\| + \|z - x\|^2\|z - x\| \leq 3\|z - x\| \leq 3\gamma \leq \delta,\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\langle x^*, z - x\rangle &= \langle x^*, y_z - x\rangle + \langle x^*, z - y_z\rangle \\ &\leq \sigma\|y_z - x\|^2 + \|y_z - z\|\|x^*\| \\ &\leq 9\sigma\|z - x\|^2 + d_S(z) + \|z - x\|^2 \\ &\leq (9\sigma + 1)\|z - x\|^2 + d_S(z) - d_S(x),\end{aligned}$$

ceci assure que $x^* \in \partial_p d_S(x)$ ce qui achève la démonstration.

■

Revenons maintenant à la définition des sous-ensembles uniformément r-prox réguliers.

Définition 3.1.2. *[20] Étant donné un $r \in]0, +\infty]$, un sous-ensemble $S \subset H$ (espace de Hilbert) est uniformément r-prox régulier si est seulement si pour tout $y \in S$ et tout $v \in N_S^p(y)$, $v \neq 0$ on a*

$$\langle \frac{v}{\|v\|}, x - y \rangle \leq \frac{1}{2r} \|x - y\|^2, \tag{3.5}$$

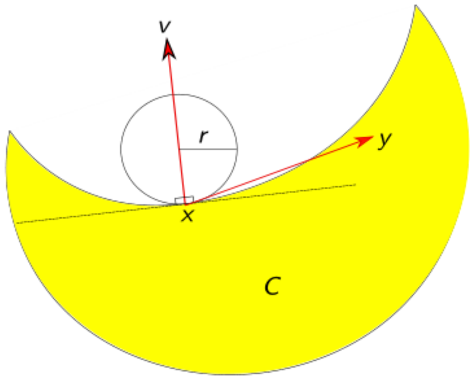

FIGURE 3.1

pour tout $x \in S$. Par convention $\frac{1}{r} = 0$ pour $r = +\infty$ (dans ce cas, l'uniforme r-prox régularité est équivalente à la convexité de S).

La proposition suivante (voir la démonstration dans [13], [20]) résume quelques propriétés importantes de ces ensembles.

Proposition 3.1.3. *Soit $r > 0$, et S un sous-ensemble non vide fermé uniformément r-prox régulier de H, alors*

1. $proj_S(x)$ existe et unique pour tout $x \in H$ avec $d_S(x) < r$.

2. Le sous différentiel proximal de d_S coïncide avec tous les sous différentiels contenus dans le sous différentiel de Clarke en tout point $x \in H$ satisfaisant $d_S(x) < r$. Dans ce cas, $\partial_p d_S(x) = \partial d_S(x) = \partial^c d_S(x)$ est un ensemble fermé convexe de H.

Comme conséquence de 2, pour les ensembles uniformément r-prox régulier, le cône normal proximal à S coïncide avec tous les cônes normaux contenus dans le cône normal de Clarke en tout point $x \in S$, $N_S^p(x) = N_S(x) = N_S^c(x)$. (On se réfère à [13] pour les définitions du sous différentiel et cône normal de Clarke).

Énonçons dans la suite une caractérisation fort utile des ensembles uniformément r-prox réguliers.

Proposition 3.1.4. *[6]. Soit $r > 0$, et S un sous-ensemble non vide fermé uniformément r-prox régulier de H. Alors pour tout $x \in S$ et tout $V \in \partial_p d_S(x)$ on a*

$$\langle v, x' - x \rangle \leq \frac{2}{r} \|x' - x\|^2 + d_S(x') \ \forall x' \in H, \ avec \ d_S(x') \leq r. \tag{3.6}$$

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la dernière proposition (voir aussi [6]).

Corollaire 3.1.5. *Pour tout sous-ensemble S non vide fermé uniformément r-prox régulier de H, on a pour tout $x \in H$ avec $d_S(x) < r$ et tout $v \in \partial_p d_S(x)$*

$$\langle v, x' - x \rangle \leq \frac{8}{r - d_S(x)} \|x' - x\|^2 + d_S(x') - d_S(x) \ \forall x' \in H, \ avec \ d_S(x') \leq r.$$

Ce corollaire est utilisé pour montrer une propriété de fermeture du sous différentiel de la fonction distance associée à une multifonction (voir [4]).

Proposition 3.1.6. *Soit $r > 0$, Ω un sous-ensemble ouvert d'un espace vectoriel normé X, et $K : \Omega \rightrightarrows H$ une multifonction Hausdorff-continue (i.e, $\lim_{x' \to x} \mathcal{H}(K(x'), K(x)) = 0$, $\forall x \in H$) telle que $K(y)$ soit uniformément r-prox régulier pour tout $y \in \Omega$. Alors, étant donné $\delta, 0 < \delta < r$, pour tout $y' \in \Omega$, $x' \in K(y') + (r - \delta)B$, $x_n \to x$, $y_n \to y'$ avec $y_n \in \Omega$ et $v \in \partial_p d_{K(y_n)}(x_n)$ avec $v_n \rightharpoonup v'$, on a $v' \in \partial_p d_{K(y')}(x')$.*

Démonstration.

Fixons $y' \in \Omega$, $x' \in B(K(y'), r - \delta)$. Comme $x_n \to x'$ on obtient pour n suffisamment grand $x_n \in B(x', \frac{\delta}{4})$. D'autre part, puisque $K(y')$ est uniformément r-prox régulier, de **la proposition 3.1.3**, il existe un point $z \in K(y')$ avec $d_{K(y')} = \|z - x'\|$. Alors, par la définition de la distance de Hausdorff, on a

$$\mathcal{H}(K(y_n), K(y')) = \max(e(K(y_n), K(y')), e(K(y'), K(y_n))),$$

$$e(K(y_n), K(y')) = \sup_{z \in K(y')} d_{K(y_n)}(z).$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
d_{K(y_n)}(x_n) &= \inf_{t_n \in K(y_n)} \|x_n - t_n\| \\
&\leq \inf_{t_n \in K(y_n)} \|z - t_n\| + \|x_n - z\| \\
&\leq d_{K(y_n)}(z) + \|x_n - z\| \\
&\leq e(K(y_n), K(y')) + \|x_n - z\| \\
&\leq max(e(K(y_n), K(y')), e(K(y'), K(y_n))) + \|x_n - z\| \\
&\leq \mathcal{H}(K(y_n), K(y')) + \|x_n - z\|,
\end{aligned}
$$

la continuité de K assure pour n assez grand

$$
d_{K(y_n)}(x_n) \leq \frac{\delta}{4} + \|x_n - x'\| + \|x' - z\| \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + r - \delta = r - \frac{\delta}{2} < r.
$$

En appliquant le corollaire précédent avec $v \in \partial_p d_{K(y_n)}(x_n)$ on obtient

$$
\langle v_n, u - x_n \rangle \leq \frac{8}{r - d_{K(y_n)}(x_n)} \|u - x_n\|^2 + d_{K(y_n)}(u) - d_{K(y_n)}(x_n) \tag{3.7}
$$

pour tout $u \in H$ avec $d_{K(y_n)}(u) \leq r$
cette inégalité reste vraie pour tout $u \in B(x', \delta')$ avec $0 < \delta' < \frac{\delta}{4}$ car pour un tel u on a

$$
d_{K(y_n)}(u) \leq \|u - x'\| + \|x' - u\| + d_{K(y_n)}(x_n) \leq \delta' + \frac{\delta}{4} + r - \frac{\delta}{2} < r.
$$

Par conséquent, en utilisant la continuité de la fonction distance par rapport à (y, x) qui découle de la Hausdorff-continuité de K et en tendant n vers $+\infty$, l'inégalité (3.7) donne

$$
\langle v', u - x' \rangle \leq \frac{8}{r - d_{K(y')}(x_n)} \|u - x'\|^2 + d_{K(y')}(u) - d_{K(y')}(x'),
$$

pour tout $u \in B(x', \delta)$. Ceci assure que $v' \in \partial_p d_{K(y')}(x')$, ce qui achève la preuve de la proposition. ■

Remarque 3.1.7. *Comme conséquence directe de ce résultat, on a la semi-continuité supérieure de la multifonction* $(x, y) \mapsto \partial_p d_{K(y)}(x)$ *de* $\Omega \times H$ *vers* H *muni de la topologie faible.*

3.2 Existence et unicité de solution du processus de rafle

Rappelons d'abord quelques résultats classiques qui nous seront utiles pour la démonstrations du théorème principal.

Définition 3.2.1. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques, et soit $\mathcal{F}(X, Y)$ l'espace de toutes les applications $f : X \longrightarrow Y$. Un sous-ensemble H de $\mathcal{F}(X, Y)$ est dit équicontinu au point x de X si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0,\ \forall y \in X, d(x, y) < \delta \Longrightarrow \forall f \in H, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Proposition 3.2.2. *Soit H un sous-ensemble de $\mathcal{F}(X, Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *H est relativement compact ;*
2. *Il existe une partie compact de X contenant H ;*
3. *Toute suite dans H possède une sous-suite convergente dans X.*

Théorème 3.2.3. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà).****[14] Soit X un espace métrique compact, (Y, d) un espace métrique complet, et H un sous-ensemble de $C(X, Y)$ l'espace des applications continues définie sur X à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact, avec*

$$H_x = H(x) = \{x(t) : x \in H\}.$$

Théorème 3.2.4. ***(Conséquence du Théorème d' Ascoli-Arzelà).****[14] Soit $(x_k)_k$ une suite de fonctions absolument continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach X telle que*

$$\begin{cases} \text{(i)}.\ \forall t \in I, \{x_k(t)\}_k \textit{ est relativement compacte de } X; \\ \text{(ii)}.\ \textit{il existe une fonction positive } c \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \textit{ tel que } \|\dot{x}_k(t)\| \le c(t),\ \textit{p.p. sur } I. \end{cases}$$

Alors il existe une sous-suite (encore notée $(x_k)_k$) et une fonction absolument continue $x : I \to X$ telle que

$$\begin{cases} 1.\ x_k \textit{ converge uniformement vers } x \textit{ sur un ensemble compact de } I; \\ 2.\ \dot{x}_k \textit{ converge faiblement vers } \dot{x} \textit{ dans } L^1(I, X). \end{cases}$$

Théorème 3.2.5. ***(Théorème d'Eberlien-Smŭlian)****[18]. Soit S un sous-ensemble d'un espace de Banach. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *S est faiblement (relativement) séquentiellement compact ;*

ii) *S est faiblement (relativement) compact.*

Définition 3.2.6. ***(Hémi-continuité supérieure)****. Soient X, Y deux espaces topologiques munis de la topologie faible et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On dit que F est hémi-continue supérieurement (h.c.s. en abrégé) en x_0 si pour tout $p \in Y$ la fonction $\sigma(F(x), p)$ est semi-continue supérieurement en x_0.*
On dit que F est h.c.s si et seulement si elle est h.c.s en tout $x_0 \in X$.

Proposition 3.2.7. *Toute multifonction semi-continue supérieurement définie de X à valeurs dans Y qui est muni de la topologie faible est hémi-continue supérieurement.*

Théorème 3.2.8. ***(Théorème de convergence)****[1] . Soient X un espace localement convexe et séparé, Y un espace de Banach, $K \subset Y$ un sous-ensemble convexe fermé et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction hémi-continue supérieurement. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_k(.), y_k(.)$ des fonctions mesurables de I à valeurs dans X (respectivement Y) vérifiant*

$$\begin{cases} \text{pour presque } t \in I, \text{ et tout voisinage } V \text{ de } 0 \text{ dans } X \times Y, \\ \text{il existe } k_0 = k_0(t, V)\, \forall k \geq k_0, (x_k(t), y_k(t)) \in graph(F) + V. \end{cases}$$

Si

$$\begin{cases} 1)\ x_k \text{ converge presque partout vers une fonction } x \text{ de } I \text{ dans } X; \\ 2)\ y_k \text{ appartient } \ L^1(I, Y) \text{ et converge faiblement vers } y \text{ dans } L^1(I, Y); \end{cases}$$

Alors

$$(x(t), y(t)) \in graph(F) i.e., y(t) \in F(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in I.$$

Proposition 3.2.9. *[18] Le cône proximal normal est hypomonotone, si C est r-prox régulier alors pour tout $x, y \in C$, $u \in N_C^p(x)$ et $v \in N_C^p(y)$*

$$\langle x - y, u - v \rangle \geq \frac{-\|u\| + \|v\|}{2r} \|x - y\|^2.$$

Lemme 3.2.10. ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit une fonction $u \in C^2$ vérifiant*

$$u'(t) \leq b(t) + u(t)a(t).$$

avec $a, b \in C^2$, donc

$$u(t) \leq u(t_0) e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau) d\tau} b(s) ds.$$

Pour plus de détails sur le lemme de Gronwall voir [16].

Énonçons d'abord un résultat d'existence pour le processus de Rafle non convexe sans perturbation.

Théorème 3.2.11. *[21] Soit $C : [0,T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multifonction, vérifiant :*

(H_1) $\forall t \in [0,T]$, $C(t)$ est un sous-ensemble non vide fermé dans $\mathbb{R}^n$, uniformément r-prox régulier,

(H_2) C est absolument continue, c-à-d, il existe une fonction $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ absolument continue non décroissante, telle que

$$d(x, C(t)) - d(y, C(s)) \leq v(t) - v(s) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } s, t \in [0,T].$$

Alors, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique absolument continue du problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. sur } [0,T]; \\ x(0) = x_0 \in C(0); \end{cases}$$

et

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \dot{v}(t).$$

Théorème 3.2.12. *[21] Soit C une multifonction vérifiant (H_1) et (H_2), donc toute solution du problème*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. sur } [0,T]; \\ x(0) \in C(0). \end{cases} \tag{3.8}$$

est une solution du problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -\dot{v}(t)\partial d_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. sur } [0,T]; \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases} \tag{3.9}$$

Démonstration.

Fixons $t \in [0,T]$ avec x et v sont dérivables en t et $\dot{x}(t) \neq 0$. Alors par (3.8) et l'uniforme régularité de $C(t)$. on obtient

$$-\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \in N^p_{C(t)}(x(t))$$

Par application du **théorème 3.1.1** on sait que pour tout ensemble fermé S et $v \in S$

$$\partial_p d_S(x) = N^p_S(x) \cap B^*$$

par conséquent

$$-\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \in \partial_p d_{C(t)}(x(t)).$$

Fixons $\varepsilon > 0$, pour $s < t$ suffisamment proche de t, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\langle -\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|}, x(s) - x(t)\rangle &\leq d_{C(t)}(x(s)) + \varepsilon\|x(s) - x(t)\|^2 \\
&\leq d_{C(t)}(x(s)) - d_{C(s)}(x(s)) + \varepsilon\|x(s) - x(t)\|^2 \\
&\leq v(t) - v(s) + \varepsilon\|x(s) - x(t)\|^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\langle -\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|}, \frac{x(s) - x(t)}{t - s}\rangle \leq \frac{1}{t-s}v(t) - v(s) + \frac{\varepsilon}{t-s}\|x(s) - x(t)\|^2$$

ce qui implique

$$\langle \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|}, \frac{x(s) - x(t)}{s - t}\rangle \leq \frac{v(s) - v(t)}{s-t} + \varepsilon(t-s)\|\frac{x(s) - x(t)}{s-t}\|^2,$$

par passage à la limite quand $\xrightarrow{s<t}$ nous obtenons

$$\langle \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|}, \dot{x}(t)\rangle \leq \dot{v}(t)$$

c'est-à-dire

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \dot{v}(t).$$

Comme l'inégalité est évidente quand $\dot{x}(t) = 0$, on obtient $\|\dot{x}(t)\| \leq \dot{v}(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, et par conséquent par la définition du sous différentiel proximal

$$-\dot{x}(t) \in \dot{v}(t)\partial_p d_{C(t)}(x(t))$$

d'après **la proposition 3.1.3** on a

$$-\dot{x}(t) \in \dot{v}(t)\partial d_{C(t)}(x(t)).$$

■

Théorème 3.2.13. *Soit $C : [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multifonction, vérifiant (H_1),(H_2), si $2\int_0^T \dot{v}(s)ds < r$. Alors, l'inclusion différentielle (3.9) admet une solution unique $x(.)$, satisfaisant $\|\dot{x}(t)\| \leq \dot{v}(t)$, cette solution est une solution du problème (3.8).*

Maintenant nous somme sur le point de démontrer le théorème principal de ce chapitre

Théorème 3.2.14. *[9] Soit C une multifonction vérifiant (H_1) et*
(H_3) C est absolument continue, c-à-d, il existe une fonction $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ absolument continue, telle que

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(s))| \leq \|x - y\| + |v(t) - v(s)| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } s, t \in [0,T].$$

(H_4) $2\int_0^T |\dot{v}(s)| + \|h(s)\|ds < r$
Alors, pour toute application $h \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + h(t) \text{ p.p. sur } [0,T]; \\ x(0) = x_0 \in C(0); \end{cases} \tag{3.10}$$

admet une solution unique absolument continue $x(.)$ telle que

$$\|\dot{x}(t) + h(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + \|h(t)\|.$$

de plus, si m une fonction positive Lebesgue intégrable, définie sur $[0,T]$ et

$$H = \{h \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T]) : \|h(t)\| \leq m(t) \text{ p.p.}\},$$

Alors l'ensemble $\{x_h : h \in H\}$, où x_h est l'unique solution absolument continue de l'inclusion différentielle (3.10), est un compact de $C_{\mathbb{R}^n}([0,T])$, et l'application $h \mapsto x_h$ est continue sur H muni de la topologie faible $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T]), L^\infty_{\mathbb{R}^n}([0,T]))$.

Démonstration.
Soit $h \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$, pour tout $t \in I$ posons

$$\psi(t) = \int_0^t h(s)ds, \ D(t) = C(t) + \psi(t).$$

1) Montrons que $D(t)$ est uniformément r-prox régulier :
On sait que

$$N^p_S(x) = \{v \in \mathbb{R}^n, \exists\, t > 0; x \in proj_S(x + tv)\};$$

$N^p_S(.)$ désigne le cône proximal à x.

$$proj_S(u) = \{y \in S, d_S(u) = \|u - y\|\};$$

étant donné un $r \in]0, +\infty]$,
$D(t)$ est uniformément r-prox régulier$\Leftrightarrow \forall y \in D(t)$ *et* $v \in N^p_{D(t)}(y), v \neq 0$,

$$\langle \frac{v}{\|v\|}, x - y\rangle \leq \frac{1}{2r}\|x - y\|^2;$$

soit $y \in D(t)$, donc $y - \int_0^t h(s)ds \in C(t)$, et soit $v \in N^p_{D(t)}(y)$,
Montrons que $v \in N^p_{C(t)}(y) - \int_0^t h(s)ds$:

On a

$$\begin{aligned}
v \in N^p_{D(t)}(y) &\Leftrightarrow \exists\ t > 0, y \in proj_{D(t)}(y + tv) \\
&\Leftrightarrow \exists\ t > 0, \langle y + tv - y, z - y\rangle \leq \frac{1}{2}\|z - y\|^2, \forall z \in D(t) \\
&\Leftrightarrow \exists\ t > 0, \langle tv, z - \psi(t) + \psi(t) - y\rangle \leq \frac{1}{2}\|z - \psi(t) + \psi(t) - y\|^2, \forall z - \psi(t) \in C(t) \\
&\Leftrightarrow \langle y - \psi(t) + tv - (y - \psi(t)), z - \psi(t) - (y - \psi(t))\rangle \leq \frac{1}{2}\|z - \psi(t) - (y - \psi(t))\|^2, \\
&\forall z - \psi(t) \in C(t),
\end{aligned}$$

il s'ensuite que

$$(y - \psi(t)) \in proj_{C(t)}((y - \psi(t)) + tv)$$

par suite

$$v \in N^p_{C(t)}(y - \psi(t)),$$

on a

$$\begin{aligned}
y - \psi(t) \in C(t), v \in N^p_{C(t)}(y_\psi(t)) & \\
&\Leftrightarrow \langle \frac{v}{\|v\|}, x - (y - \psi(t))\rangle \leq \frac{1}{2r}\|x - (y - \psi(t))\|^2, \forall x \in C(t) \\
&\Leftrightarrow \langle \frac{v}{\|v\|}, x + \psi(t) - y\rangle \leq \frac{1}{2r}\|x + \psi(t) - y\|^2, \forall x + \psi(t) \in D(t),
\end{aligned}$$

d'où, l'uniforme r-prox régularité de $D(t)$. 2) $\forall s, t \in [0,T]$ *et* $e \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned}
|d(e, D(s)) - d(e, D(t))| &\leq |d(e, \psi(s), C(s)) - d(e, \psi(t), C(t))| \\
d(e, D(s)) &= \inf_{x \in D(t)} \|e - x\| = \inf_{x - \psi(s) \in C(s)} \|e - \psi(s) - (x - \psi(s))\| \\
&= d(e - \psi(s), C(s)) \\
|d(e, D(s)) - d(e, D(t))| &\leq |d(e - \psi(s), C(s)) - d(e - \psi(t), C(t))| \\
&\leq \|\psi(t) - \psi(s)\| + |v(t) - v(s)| \\
&\leq \| \int_0^t h(\tau) d\tau - \int_0^s h(\tau) d\tau \| + | \int_s^t \dot{v}(\tau) d\tau | \\
&\leq \| \int_s^t v(\tau) d\tau \| + | \int_s^t \dot{v}(\tau) d\tau | \\
&\leq | \int_s^t (\|h(\tau)\| + |\dot{v}(\tau)|) d\tau | \\
&\leq |V(t) - V(s)| \ \textit{pour} \\
V(t) &= \int_0^t (\|h(\tau)\| + |\dot{v}(\tau)|) d\tau.
\end{aligned}$$

Donc les ensembles $D(s)$ vérifient (H_3) avec la fonction V au lieu de v.

Revenons à notre problème, l'inclusion différentielle (3.10) est équivalente à

$$\begin{cases} -\dot{y}(t) \in N_{D(t)}(y(t)) \ p.p.; \\ y(0) = x_0 \in C(0) = D(0); \end{cases} \tag{3.11}$$

avec $y(t) = x + \psi(t)$, $\forall t \in [0,T]$, en vertu du **théorème 3.2.12** et **théorème 3.2.13**, cette inclusion admet une solution unique absolument continue vérifiant l'inclusion

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in -\dot{V}(t) \partial d_{D(t)}(y(t)) \ p.p.; \\ y(0) = x_0 \in C(0) = D(0). \end{cases}$$

$$\|\dot{y}(t)\| = \|\dot{x}(t) + h(t)\| = \|\dot{y}(t) - h(t) + h(t)\| = \|\dot{y}(t)\| \leq |\dot{V}(t)| = |\dot{v}(t)| + \|h(t)\|.$$

On déduit que le problème (3.10) admet une solution unique absolument continue.

<u>Montrons que $\{x_h : h \in H\}$ est compact :</u>

Soit $(x_{h_n})_n$ une suite de solutions de (3.10), donc $(h_n)_n$ est une suite de H qui est $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$ compact, d'après **le théorème d'Eberlien-Smŭlian**, H est faiblement séquentiellement compact, par suite, on peut extraire une sous suite notée aussi $(h_n)_n$ convergeant vers h de H, pour la topologie $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$.

D'autre part $(\dot{x}_{h_n})_n$ est une suite de K tel que

$$K = \{h \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T]), \|h(t)\| \leq v(t) + 2m(t)\}.$$

de la même façon que pour H, on déduit que K est $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$ compact, donc il existe une sous suite extraite qui converge vers $z \in K$ $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$ et $(x_{h_n})_n$ converge uniformément vers une fonction $\omega \in C_{\mathbb{R}^n}([0,T])$

$$\omega(t) = x_0 + \int_0^t z(s)ds \ \forall t \in [0,T]$$

d'où : $\dot{\omega} = z$ p.p., d'après le **théorème 3.2.12**, $(x_{h_n})_n$ vérifie l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}_{h_n}(t) \in -\dot{\omega}(t)\partial d_{C(t)}(x_{h_n}(t)) + h_n(t) \ p.p. \ sur[0,T]; \\ x_{h_n}(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

tel que $\omega(t) = \int_0^t (\dot{v}(s) + m(s))ds, \forall t \in [0,t]$, comme $(\dot{x}_{h_n})_n$ converge faiblement vers $\dot{\omega} + h$ et x_{h_n} converge uniformément vers ω, et la multifonction $\dot{\omega}(t)\partial d_{C(t)}(.)$ est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}^n$ en utilisant le **théorème de convergence** on obtient

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) \in -\dot{\omega}(t)\partial d_{C(t)}(\omega(t)) + h(t) \ p.p.; \\ \omega(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

donc la fonction absolument continue ω vérifie l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) \in -N_{C(t)}(\omega(t)) + h(t) \ p.p.; \\ \omega(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

par conséquent l'ensemble $\{x_h : h \in H\}$ est compact.
<u>Montrons que l'application $h \mapsto x_h$ est continue sur H muni de la topologie faible $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$</u>

Soit $(h_n)_n$ une suite de H convergeant $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$, vers h, et $x_{h_n}(.)$ l'unique solution absolument continue du problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_{h_n}(t) \in -N_{C(t)}(x_n(t)) + h_n(t) \ p.p. \ sur \ [0,T]. \\ x_{h_n}(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

on a

$$\|\dot{x}_{h_n}(t)\| \leq v(t) + 2\|h_n(t)\| \ p.p.,$$

donc $(\dot{x}_{h_n})_n$ est uniformément intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$, on peut donc supposer que $(\dot{x}_{h_n})_n$ converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T]), L^\infty_{\mathbb{R}^n}([0,T]))$ vers une fonction intégrable z et par suite on

a :
$\forall t \in [0,T]$

$$\lim_n x_{h_n}(t) = \lim_n (x_0 + \int_0^t \dot{x}_{h_n}(s)ds) = x_0 + \int_0^t z(s)ds);$$

posons

$$y(t) = x_0 + \int_0^t z(s)ds, \ \forall t \in [0,T].$$

alors

$$\dot{y} = z \ p.p.$$

d'après le **théorème 3.2.12** , (x_{h_n}) vérifie l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}_{h_n}(t) \in -\dot{\omega}(t)\partial d_{C(t)}(x_{h_n}(t)) + h(t) \ p.p.; \\ x_{h_n}(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

avec $\omega(t) = \int_0^t (|\dot{v}(s)| + |h_n(s)|)ds \ \forall t \in [0,T]$,
Comme,$(\dot{x}_{h_n} + h_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{y} + h$ et (x_{h_n}) converge uniformément vers y, et comme $x \to \omega(t)\partial d_{C(t)}(x)$ est semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes, en vertu du théorème de fermeture on obtient

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in -\dot{\omega}(t)\partial d_{C(t)}(y(t)) + h(t) \ p.p.; \\ y(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

donc la fonction $y(.)$ vérifie

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in -N_{C(t)}(y(t)) + h(t) \ p.p.; \\ y(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

d'où σ est séquentiellement faiblement continue. ■

Le résultat suivant permet de comparer les solutions des problèmes

$$\begin{cases} -\dot{u}_f(t) \in N_{C(t)}(u_f(t)) + f(t) \ p.p.; \\ u_f(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\dot{u}_g(t) \in N_{C(t)}(u_g(t)) + g(t) \ p.p.; \\ u_g(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

Proposition 3.2.15. *Soit $f, g \in L^1_E([0,T])$ avec $\|f(t)\| \leq \sigma(t)$ et $\|g(t)\| \leq \sigma(t)$, où σ est une fonction Lebegue-intégrable. Sous les hypothèses du **théorème 3.2.14**, on a pour tout $t \in [0,T]$*

$$\|u_f(t) - u_g(t)\| \leq \gamma \exp(r^{-1} \int_0^t \sigma(s)ds) \int_0^t \|f(s) - g(s)\| ds.$$

Démonstration.
Soit

$$-\dot{u}_f(t) \in N_{C(t)}(u_f(t)) + f(t),$$

et

$$-\dot{u}_g(t) \in N_{C(t)}(u_g(t)) + g(t),$$

le **théorème 3.2.14**, assure que pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\|\dot{u}_f(t) + f(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + \|f(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + \sigma(t)$$

et

$$\|\dot{u}_g(t) + g(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + \|g(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + \sigma(t).$$

Alors pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\frac{-r}{|\dot{v}(t)| + \sigma(t)}(\dot{u}_f(t) + f(t)) \in N_{C(t)}(u_f(t)) \ et \ \|\frac{-r}{|\dot{v}(t)| + \sigma(t)}(\dot{u}_f(t) + f(t))\| \leq r,$$

et

$$\frac{-r}{|\dot{v}(t)| + \sigma(t)}(\dot{u}_g(t) + g(t)) \in N_{C(t)}(u_g(t)) \ et \ \|\frac{-r}{|\dot{v}(t)| + \sigma(t)}(\dot{u}_g(t) + g(t))\| \leq r.$$

Alors

$$\langle -\dot{u}_f(t) - f(t) - (-\dot{u}_g(t) - g(t)), u_f(t) - u_g(t) \rangle \geq -r^{-1}(|\dot{v}(t)| + \sigma(t))\|u_f(t) - u_g(t)\|^2$$

Par conséquent, pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\langle \dot{u}_f(t) - \dot{u}_g(t), u_f(t) - u_g(t)\rangle \quad \leq \langle g(t) - f(t), u_f(t) - u_g(t)\rangle + r^{-1}(|\dot{v}(t)| + \sigma(t))\|u_f(t) - u_g(t)\|^2,$$

ce qui entraine

$$\frac{d}{dt}(\|u_f(t) - u_g(t)\|^2) \quad \leq 2(\|f(t) - g(t)\| + \frac{|\dot{v}(t)| + \sigma(t)}{r}\|u_f(t) - u_g(t)\|)\|u_f(t) - u_g(t)\|. \tag{3.12}$$

D'autre part, pour tout $t_0 \in]0, T[$ tel que $\frac{d}{dt}\|u_f(.) - u_g(.)\|(t_0)$ existe et $\|u_f(t_0) - u_g(t_0)\| = 0$ donc

$$\frac{d}{dt}\|u_f(.) - u_g(.)\|(t_0) = 0, \tag{3.13}$$

en effet : pour tout t au voisinage de t_0, on a

$$\|u_f(t) - u_g(t)\| - \|u_f(t_0) - u_g(t_0)\| = \|u_f(t) - u_g(t)\| \geq 0.$$

vu que la fonction $t \longmapsto \|u_f(t) - u_g(t)\|$ est absolument continue (car la norme est lipschitzienne), (3.12) et (3.13), on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt}(\|u_f(t) - u_g(t)\|) \leq \|f(t) - g(t)\| + \frac{|\dot{v}(t)| + \sigma(t)}{r}\|u_f(t) - u_g(t)\|,$$

comme $\|u_f(0) - u_g(0)\| = 0$, en utilisant, **l'inégalité de Gronwall**, on trouve pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\|u_f(t) - u_g(t)\| &\leq \int_0^t \exp(\int_s^t \frac{|\dot{v}(\tau)| + \sigma(\tau)}{r} d\tau)\|f(s) - g(s)\|ds \\ &\leq \int_0^t \exp(r^{-1}\int_0^t (|\dot{v}(\tau)| + \sigma(\tau))d\tau)\|f(s) - g(s)\|ds \\ &\leq \exp(r^{-1}\int_0^t (|\dot{v}(s)| + \sigma(s))ds)\int_0^t \|f(s) - g(s)\|ds,\end{aligned}$$

et donc

$$\|u_f(t) - u_g(t)\| \leq \gamma \exp(r^{-1}\int_0^t \sigma(s)ds)\int_0^t \|f(s) - g(s)\|ds$$

ce qui termine la démonstration. ■

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à mettre en lumière deux concepts principals de l'analyse non lisse : le sous différentiel proximal et le cône proximal, et cela en donnant leurs propriétés ; quelques règles de calcul ainsi qu'une application à la résolution du processus de rafle non convexe du premier ordre. Ce type de problème a connu plusieurs généralisation ; citons par exemple
–Le processus de rafle du premier ordre avec perturbations multivoques, avec et sans retard.
–Le processus de rafle d'ordre supérieur.
–Processus de rafle dépendant du temps et de l'état.
D'autres résultats ont été obtenu, en exploitant les propriétés du sous différentiel proximal pour résoudre des problèmes dont le second membre est une multifonction à valeurs non convexes incluses dans le sous différentiel d'une fonction non convexe.

Bibliographie

[1] **J.P.Aubin et A.Cellina**, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] **D.AZE**, *Eléments d'analyse convexe et variationnelle*, ellipses, édition marketing S.A., Paris, 1997.

[3] **D.Azzam.Laouir**, polycopie, cours d'optimisation, Laboratoire de Mathématique Pures et Appliquées, Université de Jijel .

[4] **M.Bounkhel**, *General existance resultats for second order non convex sweeping process with unbounded perturbations*, Portugaliae Mathematica, 60(3) (2003), 269-304.

[5] **M.Bounkhel. and L.Thibault**, *On various notion of regularity of sets in nonsmooth analysis, Nonlinear Analysise*, Vol 48 (2002), N 2, 223-246.

[6] **M.Bounkhel. and L.Thibault**, *Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space.* J.Nonlinear convex Anal.6 (2005) 359-374.

[7] **H.Brezis**, *Analyse fonctionnelle*, MASSON, Paris, New York, 1987.

[8] **H.Brezis**, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, New York, 1973.

[9] **C.Castaing, A.Salvadori and L.Thibault**, *Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process*, Journal of nonlinear and convex analysis, volume2, numbre1, 2001.

[10] **C. Castaing and M.Valadier**, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics, Vol, 508, Springer, Berlin, 1977.

[11] **F.H.Clarke**, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley and Sons, Inc, New York, 1983.

[12] **F.H.Clarke, Yu.S.Ledyaev, R.JStern et P.R.Worlenski**, *Nonsmooth analysis and Control Theory*, Springer-Verlag. New York, Inc 1998.

[13] **F.H.Clarke, R.J.Stern et P.R.Wolenski**, *Proximal smoothness and lower C^2 property*, J.convex analysis, Vol 2 (1995), N 1/2, 117-144.

[14] **R.Descombes**, *Cours d'analyse*, Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[15] **N.Fetouci**, *Problèmes d'évolutions gouvernés par le processus de rafle*, Mémoire de Magister, Université de Jijel. 2005.

[16] **S.B.Gavage**, *Calcul différentiel et équations différentielles*, coure et exercice corrigés. Paris, 2010.

[17] **M.Jean-Batiste, M.D.Eduardo et M.B.Richard**, *Problèmes de stabilisation en theorie du controle*

[18] **M.Kisielewicz** *Differential inclusions and optimal control*, PWN Polish Scientific Publishers, Tnarzana and Kluwer Academic Publishers, (1991).

[19] **J.J.Moreau**, *Evolution problem associated with a moving convexe set in Hilbert space.* J Differential Equations, 26 : 347-374, 1977.

[20] **R.A.Poliquin, R.T.Rockafellar and L.Thibault**, *Local differentiability of distance functions*, Trans-Amer. Math. Soc. Vol. 352 (2000), n. 11, 5231-5249.

[21] **L.Thibault**,*Sweeping Process with regular and non regular sets*, J. differential equations 193 (2003) (1-26).

[22] **J.V. Tiel**, *Convexe analyse* An Introductory Text, New York, Singapore, 1984.