REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**
Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse et Applications

Thème

Wronskien et équations différentielles p-adiques

Présenté par :

Besma Benoune

Devant le Jury :

Président :	R.Belhadef	M.C.B	Univ. Jijel
Encadreur :	B.Saoudi	M.A.A	Univ. Jijel
Examinateur :	S.Melit	M.A.A	Univ. Jijel

Promotion 2016/2017

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est consacré au domaine de la distribution de valeurs des fonctions méromorphes. On se propose d'étudier des propriétés des fonctions méromorphes dans le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$. Le corps $\mathbb{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ muni de la valeur absolue p-adique, où p un nombre premier fixé, on obtient une analyse différente qu'on appelle analyse p-adique.

Les nombres p-adiques ont été introduits comme un outil de théorie des nombres à la fin du vingtième siècle par **K.Hensel**. Aujourd'hui, les nombres p-adiques sont importants dans la théorie des nombres, physique théorique, théorie probabilité , topologie algébrique, code génétique et dans les équations différentiels... etc.

Ce mémoire s'articule autour de trois chapitres précède par une introduction.

Dans le premier chapitre, on commence par la construction du corps des nombres p-adiques par le procédé de complétion par rapport à la valeur absolue p-adique, ensuite on a abordé les propriétés fondamentales, topologiques et analytiques. Il est important de constater qu'il y a beaucoup de ressemblances entre l'analyse réelle et l'analyse p-adique. Mais, il y a aussi des différences remarquables comme le fait que la limite du terme générale d'une série soit nulle est une condition nécessaire et suffisante, dans le cas p-adique, pour la convergence de cette série. De même dans $\mathbb{Q}_p$, tout point d'une boule ouvert ou fermé est le centre de cette boule. Ensuite on fait la contraction du corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$ à partir du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ et on termine par une représentation des séries entières qui jouent un rôle très important dans l'étude des fonctions analytiques p-adiques.

Dans le deuxième chapitre, on présente la distribution des zéros des fonctions analytiques p-adiques et le principe du module maximum d'une fonction analytique p-adique, ce dernier défini une méthode qui nous permet d'étudier la distribution de zéros d'une fonction analytique p-adique et s'étend d'une manière naturelle aux fonction méromorphe p-adique. En termine ce chapitre par le wronskien p-adique qui est le déterminant d'une famille de solution d'un système différentiel linéaire homogène. Nous allons considérer des propriétés des wronskiens généralisés de série entière p-adique.

Dans le troisième chapitre, on a deux parties, dans la première partie nous allons montre un résultat liant la croissance d'un wronskien généralisé à la croissance du wronskien ordinaire de m séries entières p-adiques. Comme application, on montre que si le wronskien ordinaire de m fonctions entières p-adiques est un polynôme non nul, alors toutes les fonctions sont des polynômes. Dans la deuxième partie, on s'intéresse à l'application de ces résultats aux équations différentielles linéaires dans $\mathbb{C}_p$ qui consiste à résoudre l'équation

$$P_s(x)y^{(s)}(x) + \ldots + P_0(x)y(x) = 0,$$

où $s \geq 1$ et $P_0, \ldots, P_s$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, avec P_s non nul.

- Si l'équation différentielle a un système complet de solutions qui sont ses fonctions entières dans $\mathbb{C}_p$, alors toutes les solutions sont des polynômes.
- Si l'équation différentielle a un système complet de solutions qui sont ses fonctions méromorphe dans $\mathbb{C}_p$, alors toutes les solutions sont des fractions rationnelles.

Notation

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

$\mathbb{K}$	Un corps.
$\|.\|$	La valeur absolue sur un corps $\mathbb{K}$.
d	La distance sur un corps $\mathbb{K}$.
v	La valuation sur $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}[[X]]$	Le corps des séries formelle $\mathbb{K}$.
$D^+(a,r)$	Le disque fermé de centre a et de rayon r.
$D^-(a,r)$	Le disque ouvert de centre a et de rayon r.
$D(a,r)$	L'un ou l'autre de ces deux disque.
$C(a,r)$	Le cercle de centre a et de rayon r.
v_p	La valuation p-adique.
$\| \, . \, \|_p$	La valeur absolue p-adique.
$\mathbb{Z}_p$	Anneau des entiers p-adique.
$\mathbb{Q}_p$	Corps des nombres de p-adiques.
$\overline{\mathbb{Q}}_p$	La clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\mathbb{C}_p$	Le complété de la clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\mathcal{A}(D(a,r))$	L'ensemble des fonctions analytiques sur $D(a,r)$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$	L'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$	L'ensemble des fonction entières transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.
$\\|f\\| = \|f\|(r)$	Le module de maximum.
μ_f	La fonction de valuation p-adique.
$\mathcal{M}(D(a,r))$	L'ensemble des fonctions méromorphes sur $D(a,r)$.
$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$	L'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathbb{C}_p(X)$	L'ensemble des fontions rationnelles sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(X)$	L'ensemble des fonction méromorphes transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.

Chapitre 1

Préliminaire sur l'analyse p-adique

Ce chapitre a pour but d'introduire les outils nécessaires dont on aura besoin dans la suite. On va rappeler les outils de base pour l'analyse p-adique et donner des propriétés déjà connues aux fonctions analytiques p-adiques (dans un disque ou dans le corps tout entier).

1.1 Valeur absolue sur un corps

Définition 1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une valeur absolue sur $\mathbb{K}$ est une application $|.| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ telle que*

1) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

2) $|xy| = |x||y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}$,

3) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$. *(l'inégalité triangulaire)*

On dit que la valeur absolue $|.|$ est ultramétrique si au lieu de (3) *on a*

3') $|x + y| \leq \max(|x|, |y|), \forall x, y \in \mathbb{K}$ *(inégalité triangulaire forte).*

Définition 1.2. ***(la valuation)***
Soit $\mathbb{K}$ un corps, une valuation v sur $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les trois conditions suivantes

1) $v(x) = +\infty$ *si et seulement si* $x = 0$,

2) $v(xy) = v(x) + v(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$,

3) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$.

Exemple 1.1.

- *Tout corps est muni d'au moins une valeur absolue ultramétrique à savoir l'application* $|.| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définit par*

$$|x| \ = \begin{cases} 0 & si\ x = 0\,; \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

- $\mathbb{K}[[X]]$ *le corps des séries formelles à une variable sur* $\mathbb{K}$*, pour tout* $f \in \mathbb{K}[[X]]$*,* $f \not\equiv 0$ *on a*

$$f(X) = \sum_{n \geq n_0} a_n X^n, \quad a_{n_0} \neq 0.$$

On pose $v(f) = n_0$ *et* $v(0) = +\infty$*, donc on a*

$$\begin{array}{lcl} 1.\ v(f) & = & +\infty \text{ si et selement si } f = 0\,, \\ 2.\ v(f.g) & = & v(f) + v(g)\,, \\ 3.\ v(f+g) & \geq & \min(v(f), v(g))\,, \end{array}$$

et si l'on pose $|f| = a^{-v(f)}$*,* $a > 0$ *on définit une valeur absolue ultramétrique sur le corps* $\mathbb{K}[[X]]$.

En effet

1) Soit $f \in \mathbb{K}[[X]]$*, on a*

$$\begin{array}{rcrcl} |\ f\ |= 0 & \Longleftrightarrow & a^{-v(f)} & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow & \frac{1}{a^{v(f)}} & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow & v(f) & = & \infty \\ & \Longleftrightarrow & f & \equiv & 0. \end{array}$$

2) Soit $f, g \in \mathbb{K}[[X]]$*, on a*

$$\begin{array}{rclcl} |fg| & = & a^{-v(fg)} = a^{-(v(f)+v(g))} & = & a^{-v(f)-v(g)} \\ & & & = & a^{-v(f)} a^{-v(g)} \\ & & & = & |f||g|. \end{array}$$

3) Soit $f, g \in \mathbb{K}[[X]]$*, on a* $|f + g| = a^{-v(f+g)}$.

Et comme on a

$$v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))\,,$$

donc

$$-v(f+g) \leq -\min(v(f), v(g)) = \max\{-v(f), -v(g)\}\,,$$

alors

$$a^{-v(f+g)} \leq \max\{a^{-v(f)}, a^{-v(g)}\},$$

d'où, $|f+g| \leq \max\{|f|, |g|\}$.

Remarque.

- En topologie, une distance ultramétrique est une distance d sur $\mathbb{K}$ vérifiant l'inégalité ultra triangulaire

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\};\ \forall x,y,z \in \mathbb{K}. \tag{1.1}$$

Un espace métrique dont la distance vérifie (1.1) est dit ultramétrique.

Théorème 1.1. *La valeur absolue sur* $\mathbb{K}$ *est ultramétrique si et seulement si pour tout entier* $n \geq 0, |n| \leq 1$.

Preuve.

i) On suppose que $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ est vérifie et on montre par récurrence que $|n| \leq 1$ pour tout entier $n \geq 0$.

Pour $n = 0$; on a $|n| = |0| = 0 \leq 1$, et pour $n = 1$; on a $|n| = |1| = 1 \leq 1$.

On suppose que $|n| \leq 1$ et vraie pour $n \geq 0$, et on montre que $|n+1| \leq 1$.

On a

$$|n+1| \leq \max\{|n|, |1|\} \leq 1,$$

d'où

$$|n+1| \leq 1,$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}\ |n| \leq 1$.

ii) Pour la dexième implication on suppose que $|n| \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on montre que $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ pour tout $x, y \in \mathbb{K}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} |x+y|^n = |(x+y)^n| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left|\binom{n}{k}\right| \left|x^k\right| \left|y^{n-k}\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} 1 |x|^k |y|^{n-k}. \end{aligned}$$

Et comme

$$|x| \leq \max(|x|, |y|) \qquad \text{et} \qquad |y| \leq \max(|x|, |y|),$$

alors

$$|x|^k \leq (\max(|x|,|y|))^k \quad \text{et} \quad |y|^{n-k} \leq (\max(|x|,|y|))^{n-k}$$

d'où

$$\begin{aligned} |x+y|^n &\leq \sum_{k=0}^{n} (\max(|x|,|y|))^n \\ &\leq (n+1)(\max(|x|,|y|))^n , \end{aligned}$$

donc

$$|x+y| \leq (n+1)^{\frac{1}{n}} (\max(|x|,|y|)) ,$$

par passage à la limite de n on obtient

$$|x+y| \leq \max(|x|,|y|). \qquad \blacksquare$$

Remarques :

- S'il existe un entier $n \geq 0$ *telque* $|n| > 1$, on dit que la valeur absolue sur $\mathbb{K}$ est archimédienne.
- Si $\sup\{|n|, n \in \mathbb{N}\} = +\infty$, on dit que la valeur absolue est archimédienne. (Voir [12])
- On peut remplace $n \in \mathbb{N}$ par $n \in \mathbb{Z}$ (car $|-n| = |n|$).

1.2 Construction analytique du corps des nombres p-adiques

Soit p un nombre premier ($p = 2, 3, 5, ...$).

1.2.1 Valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$

Définition 1.3. *Soit $x \in \mathbb{Z}$, on appelle valuation p-adique de x notée $v_p(x)$ le plus grand entier naturel α telle que p^α divise x i.e*

$$v_p(x) = max\{\alpha \in \mathbb{N}, p^\alpha \setminus x\}.$$

Par convention on a : $v_p(0) = +\infty$.

- $v_p(x) = \text{ord}_p(x)$.

Exemple 1.2.

1) $x = 5 + 5p^2 + 5p^5 + 5p^8, \quad pour \quad p > 5,$

$v_p(x) = 0.$

2) $x = 5p^2 + 5p^5, \quad pour \quad p > 5,$

$v_p(x) = 2.$

3) $v_p(-1) = 0, \ \forall p \geq 0.$

En effet

$2v_p(-1) = v_p(-1 \times -1) = v_p(1) = 0$, *d'où* $v_p(-1) = 0.$

Définition 1.4. *La valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$ est l'étendre de la valuation p-adique sur $\mathbb{Z}$ de la façons suivante*

$$v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b),$$

avec $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$

Exemple 1.3. *Soit* $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, *tels que*

- $a \ = 2 + 2p^4 + p^5, \quad pour \quad p > 2,$
- $b \ = 2p^3 + p^6, \quad pour \quad p > 2.$

On a $\quad v_p(a) = 0$ *et* $v_p(b) = 3$, *alors*

$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b) = 0 - 3 = -3.$

Proposition 1.1. *Pour tout* $x, y \in \mathbb{Z}$, *on a*

1) $v_p(x) = +\infty \Longleftrightarrow x = 0\,,$

2) $v_p(x.y) = v_p(x) + v_p(y)\ ,$

3) $v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y)).$

Preuve.

1) D'après la définition 1.3.

2) On a (2) est trivial, si $x = 0$ où bien $y = 0$, et pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\begin{cases} x = p^{v_p(x)}.\ n, \ n \in \mathbb{Z}^* \ et \ (n, p) = 1, \\ y = p^{v_p(y)}.\ m, \ m \in \mathbb{Z}^* \ et \ (m, p) = 1, \end{cases}$$

on a

$$xy = p^{v_p(x)+v_p(y)}.nm, \ (nm, p) = 1.$$

D'où $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y).$

3) On a 3) est trivial, si $x = 0$ où bien $y = 0$, et pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\begin{cases} x = p^{v_p(x)}.\ n,\ n \in \mathbb{Z}^* \ et\ (n,p) = 1, \\ y = p^{v_p(y)}.\ m,\ m \in \mathbb{Z}^* \ et\ (m,p) = 1, \end{cases}$$

on a $x + y = p^{v_p(x)}.n + p^{v_p(y)}.m$.

- Si $v_p(x) \le v_p(y)$, on a

$$x + y = p^{v_p(x)} \underbrace{(n + p^{v_p(y)-v_p(x)}.m)}_{k},\ (k,p) = 1,$$

d'où

$$v_p(x+y) = v_p(x) = \min \{v_p(x), v_p(y)\}.$$

- Si $v_p(x) \ge v_p(y)$, on a

$$x + y = p^{v_p(y)} \underbrace{(m + p^{v_p(x)-v_p(y)}.n)}_{k},\ (k,p) = 1,$$

d'où

$$v_p(x+y) = v_p(y) = \min \{v_p(x), v_p(y)\}.$$

■

Remarque. Pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^*$

$$v_p(x) \neq v_p(y) \Longrightarrow v_p(x+y) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

En effet

On prend $v_p(x) < v_p(y)$ on a

$$v_p(x+y) \ge \min\{v_p(x), v_p(y)\},\ \ \forall x, y \in \mathbb{Z}^*,$$

c'est-à-dire $v_p(x+y) \ge v_p(x)$.

Il reste à montrer que $v_p(x) \ge v_p(x+y)$, on a

$$v_p(x) = v_p(x+y-y) \ge \min\{v_p(x+y), v_p(y)\}.$$

Si $\min\{v_p(x+y), v_p(y)\} = v_p(y)$, alors $v_p(x) \ge v_p(y)$, c'est une contraction avec les données, donc $v_p(x) \ge v_p(x+y)$.

D'où on montre l'inégalité.

Proposition 1.2. *La valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$ définit bien une valuation discrète.*

Preuve.

1) Il est claire d'après la définition de la valuation.
2) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ et $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}^*$.
   On a $xy = \frac{ac}{bd}$,
   donc

$$\begin{aligned} v_p(xy) = v_p(\frac{ac}{bd}) &= v_p(ac) - v_p(bd) \\ &= v_p(a) + v_p(c) - v_p(b) - v_p(d) \\ &= v_p(a) - v_p(b) + v_p(c) - v_p(d) \\ &= v_p(x) + v_p(y). \end{aligned}$$

3) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ et $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}^*$,
   on a $x + y = \frac{ad + bc}{bd}$, donc

$$\begin{aligned} v_p(x+y) &= v_p(\frac{ad+bc}{bd}) \\ &= v_p(ad+bc) - v_p(bd) \\ &= v_p(ad+bc) - v_p(b) - v_p(d) \\ &\geq min\{v_p(a) + v_p(d), v_p(b) + v_p(c)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &\geq min\{v_p(a) + v_p(d) - v_p(b) - v_p(d), v_p(b) + v_p(c) - v_p(b) - v_p(d)\} \\ &= min\{v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)\} \\ &= min\{v_p(\tfrac{a}{b}), v_p(\tfrac{c}{d})\} \\ &= min\{v_p(x), v_p(y)\}. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.3. *La valuation p-adique de la suite $(n!)_{n\geq 0}$ est donnée par*

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

où $S_p(n)$ désigne la somme de chiffres de l'écriture de n en base p.

Preuve.

Si $n = 0$, on a $0! = 1$, $v_p(1) = 0$. Sinon
$n! = \prod_{j=1}^{n} j$, $\ v_p(n!) = \sum_{j=1}^{n} v_p(j)$, tel que $j = a_{i_j}p^{i_j} + \cdots + a_{s_j}p^{s_j}$.

Où $a_{i_j} \neq 0,\ v_p(j) = i_j$ et $S_p(j) = \sum\limits_{l=i_j}^{s_j} a_l$, donc

$$v_p(n!) = \sum_{j=1}^{n} i_j.$$

Alors

$$\begin{aligned} j &= a_{i_j} p^{i_j} + a_{i_j+1} p^{i_j+1} + \cdots + a_{s_j} p^{s_j} \\ &= p^{i_j} + (a_{i_j} - 1) p^{i_j} + \sum_{l=i_j+1}^{s_j} a_l p^l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j - 1 &= p^{i_j} - 1 + (a_{i_j} - 1) p^{i_j} + \sum_{l=i_j+1}^{s_j} a_l p^l \\ &= (p-1) \sum_{l=0}^{i_j - 1} p^l + (a_{i_j} - 1) p^{i_j} + \sum_{l=i_j+1}^{s_j} a_l p^l. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_p(j-1) &= (p-1) \sum_{l=0}^{i_j - 1} 1 + (a_{i_j} - 1) + \sum_{l=i_j+1}^{s_j} a_l \\ &= i_j (p-1) + a_{i_j} + \sum_{l=i_j+1}^{s_j} a_l - 1 \\ &= i_j (p-1) + \sum_{l=i_j}^{s_j} a_l - 1 \\ &= i_j (p-1) + S_p(j) - 1. \end{aligned}$$

d'où

$$i_j = \frac{S_p(j-1) - S_p(j) + 1}{p-1},$$

$$\begin{aligned} v_p(n!) = \sum_{j=1}^{n} i_j &= \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^{n} \left[S_p(j-1) - S_p(j) + 1 \right] \\ &= \frac{1}{p-1} \left[\sum_{j=1}^{n} S_p(j-1) - \sum_{j=1}^{n} S_p(j) + n \right] \\ &= \frac{n - \sum\limits_{j=1}^{n} \left[S_p(j) - S_p(j-1) \right]}{p-1} \\ &= \frac{n - S_p(n)}{p-1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

1.2.2 Valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$

Définition 1.5. *(**Valeur absolue** p**-adique sur** $\mathbb{Q}$)*

Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on définit la valeur absolue p-adique de x par

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & si\ x \neq 0; \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Exemple 1.4.

1) $x = 5 + 5p^2 + 5p^5 + 5p^8, \quad pour \quad p > 5,$

$|x|_p = p^{-v_p(x)} = p^{-0} = p^0 = 1.$

2) $x = 5p^2 + 5p^5, \quad pour \quad p > 5,$

$|x|_p = p^{-v_p(x)} = p^{-2}.$

3) $x = -1 = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i(p-1),\ \forall p \geq 2,$

$|x|_p = p^{-v_p(x)} = p^0 = 1.$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $|\frac{1}{n!}|_p = p^{\frac{n-s_p(n)}{p-1}}$.

Proposition 1.4. *Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, l'application $|.|_p$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiée les trois proprétés d'une valeur absolue et elle vérifie plus la propriété :*
$|x + y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$(Inégalité triangulaire forte). C'est-a-dire, l'application $|.|_p$ est une valeur absolue ultramétrique.

Preuve*.*

1) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a

$$\begin{aligned} |x|_p = 0 &\iff p^{-v_p(x)} = 0 \\ &\iff v_p(x) = \infty \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

2) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, on a

$$\begin{aligned} |xy|_p &= p^{-vp(xy)} \\ &= p^{-v_p(x) - v_p y} \\ &= p^{-v_p(x)}.p^{-v_p(y)} \\ &= |x|_p.|y|_p. \end{aligned}$$

3) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que :$x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ et $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}^*$

on a

$$\begin{aligned} |x+y|_p = p^{-vp(x+y)} &\leq p^{-min\{v_p(x), v_p(y)\}} \\ &= p^{max\{-v_p(x) - v_p(y)\}} \\ &= max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\} \\ &= max\{|x|_p, |y|_p\}. \end{aligned}$$

D'oú l'application $x \longrightarrow |x|_p$ est une valeur absolue ultramétrique. ■

Proposition 1.5. *Soient a et x deux éléments de $\mathbb{Q}$ on a*

$$|x-a|_p < |a|_p \Longrightarrow |x|_p = |a|_p.$$

Preuve. On suppose que $|x-a|_p < |a|_p$.

On a

$$\begin{aligned} |x|_p &= |x-a+a|_p \\ &\leq \max\{|x-a|_p, |a|_p\} \\ &= |a|_p. \end{aligned} \tag{1.2}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |a|_p &= |a-x+x|_p \\ &\leq \max\{|a-x|_p, |x|_p\}. \end{aligned}$$

Si $\max\{|a-x|_p, |x|_p\} = |x-a|_p$ alors

$|a|_p \leq |x-a|_p$ contraction avec $|x-a|_p < |a|_p$.

Donc $\max\{|x-a|_p, |a|_p\} = |x|_p$.

D'où

$$|a|_p \leq |x|_p. \tag{1.3}$$

De (1.2) et (1.3)

$$|x|_p = |a|_p.$$ ■

1.2.3 Complétion de $\mathbb{Q}$

On sait que $\mathbb{R}$ est la complétion de $\mathbb{Q}$ par rapport à la valeur absolue usuelle, et dans ce cas les éléments de $\mathbb{R}$ sont les classes d'équivalences des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$. La même procédure se fait pour une valeur absolue ultramétrique $|.|_p$. La complétion de $\mathbb{Q}$ par rapport à cette valeur absolue $|.|_p$ donne un corps ultramétrique appelé corps des nombres p-adiques et se note $\mathbb{Q}_p$. Ainsi les éléments de $\mathbb{Q}_p$ sont les classes d'équivalences des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, muni de la relation suivante

$$(a_n) \sim (b_n) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n - b_n|_p = 0.$$

Remarque. Pour la distance p-adique et pour $a \in \mathbb{Q}_p$ on a
la valeur absolue $|.|_p$ peut être prolonger de $\mathbb{Q}$ sur tout $\mathbb{Q}_p$ de la façon suivante $|a|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p$.
Par conséquent : $\forall a \in \mathbb{Q}_p : \exists (a_n)_n \subset \mathbb{Q}; \quad a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Théorème 1.2. ***(D'Ostrowski)**[12]*
Toute norme $|.|$ non trivial sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à une norme p-adique $|.|_p$, ou bien à la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.6. ***(Développement de Hensel)**[1]*
Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un unique développement de Hensel

$$x = \sum_{n\geq n_0} a_n p^n,$$

où $0 \leq a_n \leq p-1$ et $n_0 \in \mathbb{Z}$, si $a_{n_0} \neq 0$ alors $n_0 = v_p(x)$.

Proposition 1.7.
Le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ définit aussi par

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{a}{b} / \quad a \in \mathbb{Z}_p, b \in \mathbb{Z}_p^* \right\},$$

et l'ensemble

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ ; \ |x|_p \leq 1\},$$

est un sous-anneau de $\mathbb{Q}_p$ et de plus $\mathbb{Z}_p$ est l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$.

Le groupe des unités est

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Z}_p \ ; \ |x|_p = 1\}.$$

1.3 Propriétés topologiques et analytiques de $\mathbb{Q}_p$

1.3.1 Propriétés analytiques

Généralement les propriétés analytiques de $\mathbb{Q}_p$ sont analogues à celles de $\mathbb{R}$, mais la différence remarquable entre ses deux corps réside dans les critères de convergence des suites et des séries de puissance.

Théorème 1.3. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$ et par conséquent convergente si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Preuve.

I- Supposons que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0;\ \mid a_m - a_n \mid_p < \varepsilon,$$

donc pour $m = n + 1$ on a

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0; |a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

II- Inversement supposons que
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ on a $|a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon$.
Pour tout $m > n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned} |a_m - a_n|_p &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + a_{m-2} - \cdots + a_{n+1} - a_n|_p \\ &\leq \max\{|a_m - a_{m-1}|_p, \ldots, |a_{n+1} - a_n|_p\}, \end{aligned}$$

et comme

$$\forall k \geq n \geq n_0; |a_{k+1} - a_k|_p < \varepsilon.$$

Alors

$$|a_m - a_n|_p < \varepsilon,\ \forall m > n \geq n_0,$$

par suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$. ∎

Proposition 1.8. *Soit la série* $\sum\limits_{n\geq 0} \mid a_n \mid_p, a_n \in \mathbb{Q}_p$, *alors*

$$\sum_{n\geq 0} \mid a_n \mid_p \textit{ converge dans } \mathbb{R} \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \textit{converge dans } \mathbb{Q}_p.$$

Preuve. Puisque $\sum\limits_{n\geq 0} \mid a_n \mid_p$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{0\leq i\leq n} \mid a_i \mid_p$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq N; \mid S_m - S_n \mid < \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned}
\mid S_m - S_n \mid &= \mid \sum_{n+1\leq i\leq m} |a_i|_p \mid \\
&= \sum_{n+1\leq i\leq m} \mid a_i \mid_p \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $S'_n = \sum\limits_{0\leq i\leq n} a_i$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$ alors $\sum\limits_{i\geq 0} a_i$ converge dans $\mathbb{Q}_p$. ■

Proposition 1.9. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{Q}_p$. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0,\ a \in \mathbb{Q}_p$, *alors il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n|_p = |a|_p.$$

Preuve.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_p$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_o \Longrightarrow |a_m - a_n|_p < \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\forall m, n \geq n_0,\ ||a_m|_p - |a_n|_p| \leq |a_m - a_n|_p.$$

Donc $(|a_n|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et comme $(\mathbb{R}, |.|)$ complet , alors $(|a_n|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

D'après l'hypothèse on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p = l > 0$.

Pour $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$ fixé, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $||a_n|_p - l| < \dfrac{l}{2}$, alors

$$\frac{-l}{2} < |a_n|_p - l < \frac{l}{2},$$

donc

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1;\ |a_n|_p > \frac{l}{2}.$$

De même, d'après la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ on obtient que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, alors

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall (n,m) \geq N_2, |a_n - a_m|_p < \frac{l}{2},$$

quand $n, m \geq \max(N_1, N_2) = n_0$, on a

$$\begin{cases} |a_m|_p & = & |a_m - a_n + a_n|_p & \leq & \max\{|a_m - a_n|_p, |a_n|_p\} & = & |a_n|_p. \\ |a_n|_p & = & |a_n - a_m + a_m|_p & \leq & \max\{|a_n - a_m|_p, |a_m|_p\} & = & |a_m|_p. \end{cases}$$

d'où

$$|a_n|_p = |a_m|_p, \quad \forall n, m \geq n_0,$$

alors, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0\ ; |a_n|_p = |a_{n_0}|_p = |a|_p. \qquad \blacksquare$$

Proposition 1.10. *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, *une série dans* $\mathbb{Q}_p$, *on a*

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{converge dans } \mathbb{Q}_p \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n|_p = 0.$$

De plus, on a : $|\sum\limits_{n\geq 0} a_n|_p \leq \max\limits_{n\geq 0} |a_n|_p$.

Preuve.

1. Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente, alors la suite des sommes partielle $(S_n)_{n\geq 0}$ converge, donc elle est de Cauchy, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p = \lim_{n\to+\infty} |S_n - S_{n-1}|_p = 0.$$

   Dans la réciproque, si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |S_n - S_{n-1}|_p = 0$ donc $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$ et comme $(\mathbb{Q}_p, |\ .\ |)$ est complet, alors $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

   D'où $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente.

2. On montre maintenant l'inégalité

$$\left| \sum_{n\geq 0} a_n \right|_p \leq \max_{n\geq 0} |a_n|_p.$$

   - l'inégalité est évidant si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n = 0$.

- Si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \neq 0$, d'après la proposition 1.9 on a

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \left|\sum_{n\geq 0} a_n\right|_p = \left|\sum_{0\leq n\leq N} a_n\right|_p,$$

donc

$$\left|\sum_{n\geq 0} a_n\right|_p = \left|\sum_{0\leq n\leq N} a_n\right|_p \leq \max_{0\leq n\leq N} |a_n|_p \leq \max_{n\geq 0} |a_n|_p.$$

D'où le résultat. ■

1.3.2 Propriétés topologiques

Dans cette partie nous énonce quelques propriétés topologiques de $\mathbb{Q}_p$.

Lemme 1.1. ***(Principe des triangles isocèles)***
Dans un corps $\mathbb{Q}_p$ muni d'une valeur absolue ultramétrique tout triangle est isocèle.

Preuve. On suppose que $|x-y|_p < |y-z|_p$, et on montre que $|x-z|_p = |y-z|_p$., On a

$$|x-y|_p = |(x-z)-(y-z)|_p < |y-z|_p.$$

D'après la proposition 1.5, on a $|x-z|_p = |y-z|_p$. ■

Notations

Soient $a \in \mathbb{Q}_p$ et r un réel positif, nous notons

- $D^+(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x-a|_p \leq r\}$: Le disque fermé de centre a et de rayon r.
- $D^-(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x-a|_p < r\}$: Le disque ouvert de centre a et de rayon r.
- $D(a,r)$: L'un ou l'autre de ces deux disques.
- $C(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x-a|_p = r\}$: Le cercle de centre a et de rayon r.

Proposition 1.11. *Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et $r \in]0,+\infty[$, on a les propriétés suivantes*

P1 *Le cercle $C(a,r)$ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{Q}_p$.*

P2 *Un disque $D(a,r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé.*

P3 *Tout point d'un disque est un centre de ce disque.*

P4 *Deux disques de $\mathbb{Q}_p$ sont disjoints ou l'un est contenue dans l'autre.*

Preuve.

P1 Soient $a, b \in \mathbb{Q}_p$, et $r \in]0, +\infty[$. Pour montrer que $C(a, r)$ est un ensemble ouvert on montre que

$$\forall x \in C(a, r),\ \exists D^-(x, r_0) \subset C(a, r).$$

Soit $x \in C(a, r)$, on choisit r_0 tel que $r_0 < r$, on a

$$\begin{aligned} y \in D^-(x, r_0) &\implies |y - x|_p < r_0 < r \\ &\implies |y - x|_p < |x - a|_p \\ &\implies |y - a + a - x|_p < |x - a|_p \\ &\implies |(y - a) - (x - a)|_p < |x - a|_p. \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.5, on obtient $|y - a|_p = |x - a|_p = r$ alors $y \in C(a, r)$. Ce qui montre que $C(a, r)$ est un ensemble ouvert.

P2 i. Toute disque ouvert $D^-(a, r)$ est un ensemble ouvert dans un espace métrique quelconque. D'autre part, pour montrer que $D^-(a, r)$ est un ensemble fermé, on montre que $C_{\mathbb{Q}_p}^{D^-(a,r)}$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{Q}_p$. On a

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{Q}_p}^{D^-(a,r)} &= \{x \in \mathbb{Q}_P : |x - a|_p \geq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p > r\} \cup C(a, r) \\ &= C_{\mathbb{Q}_p}^{D^+(a,r)} \cup C(a, r). \end{aligned}$$

D'après **P1** on a $C(a, r)$ est un ensemble ouvert et comme on a $D^+(a, r)$ est un ensemble fermé dans un espace métrique, donc $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}_p}^{D^+(a,r)}$ est un ensemble ouvert dans un espace métrique (en particulier ultramétrique). D'où $C_{\mathbb{Q}_p}^{D^-(a,r)}$ est un ensemble ouvert, donc $D^-(a, r)$ est un ensemble fermé.

ii. On sait que $D^+(a, r)$ est fermé dans un espace métrique (en particulier pour l'espace ultramétrique) pour montrer que $D^+(a, r)$ est un ouvert dans $\mathbb{Q}_p$, on a

$$D^+(a, r) = C(a, r) \cup D^-(a, r),$$

d'après **P1** $C(a, r)$ est un ouvert et $D^-(a, r)$ est un ouvert donc l'union de deux ouvert est ouvert.

P3 Pour montrer cette propriété, il suffit de montrer que

$$\forall x \in D^-(a, r),\ D^-(a, r) = D^-(x, r).$$

i. Soit $y \in D^-(a,r)$, donc $|y-a|_p < r$. D'autre part on a

$$|y-x|_p = |y-a+a-x|_p \leq \max\{|y-a|_p, |x-a|_p\} < r,$$

d'où $y \in D^-(x,r)$, alors $D^-(a,r) \subset D^-(x,r)$.

ii. Soit $y \in D^-(x,r)$, donc $|y-x|_p < r$. D'autre part on a

$$|y-a|_p = |y-x+x-a|_p \leq \max\{|y-x|_p, |x-a|_p\} < r$$

d'où $y \in D^-(a,r)$, alors $D^-(x,r) \subset D^-(a,r)$
donc $D^-(a,r) = D^-(x,r)$.

On fait les même étapes pour montrer que si $x \in D^+(a,r)$, on a $D^+(a,r) = D^+(x,r)$.

P4 Soient $D(a,r)$ et $D(b,r_0)$ deux disques de $\mathbb{Q}_p$, on suppose que $D(a,r) \cap D(b,r_0) \neq \emptyset$, pour tout r et $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et on montre que

$$D(a,r) \subset D(b,r_0) \text{ ou } D(b,r_0) \subset D(a,r).$$

On suppose que $r \leq r_0$: Soit $x \in D(a,r) \cap D(b,r_0)$, on a $x \in D(a,r)$ et $x \in D(b,r_0)$. D'après **P3** on a

$$D(a,r) = D(x,r) \text{ et } D(b,r_0) = D(x,r_0),$$

mais $D(x,r) \subset D(x,r_0)$, donc $D(a,r) \subset D(b,r_0)$. ■

Remarque. Le cercle est un ensemble fermé dans $\mathbb{Q}_p$.
En effet, on sait que

$$\begin{aligned} C(a,r) &= D^+(a,r) \backslash D^-(a,r) \\ &= D^+(a,r) \cap \mathcal{C}_{\mathbb{Q}_p}^{D^-(a,r)}. \end{aligned}$$

On a $D^+(a,r)$ est un fermé dans $\mathbb{Q}_p$, et $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}_p}^{D^-(a,r)}$ est un fermé dans $\mathbb{Q}_p$. D'où $C(a,r)$ est un fermé dans $\mathbb{Q}_p$.

1.4 Corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$

Définition 1.6. ***(Corps algébriquement clôs)***
On dit qu'un corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clôs si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$ de degré n admet n racines dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.7. ***(Extension algébrique L sur un corps*** $\mathbb{K}$***)***
Une extension algébrique L sur un corps $\mathbb{K}$ est une extension de corps dans laquelle tout les éléments sont algébriques sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire sont racines d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$.
*Dans le cas contraire l'extension est dite **transcendante**.*

Définition 1.8. ***(Clôture algébrique d'un corps)***
Une clôture algébrique d'un corps commutatif $\mathbb{K}$ est une extension algébrique L de $\mathbb{K}$ qui est algébriquement clôs, c'est-à-dire que tout polynôme de degré supérieur ou égal à un, à coefficients dans L, admet au moins une racine dans L.

Proposition 1.12. *Le corps des nombres p-adique $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs.*
En effet
Pour montrons que $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs, on considère le polynôme $P(x) = x^2 - p^5 \in \mathbb{Q}_p[x]$.
Supposons que les racines de $P(x)$ sont dans $\mathbb{Q}_p$, donc

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Longleftrightarrow x^2 = p^5 \\ &\Longleftrightarrow |x|_p^2 = p^{-5} \\ &\Longleftrightarrow |x|_p = p^{-\frac{5}{2}} \\ &\Longleftrightarrow v_p(x) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$, $v_p(x) = \dfrac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$, contradiction avec $v_p(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Donc les racines de $p(x)$ ne sont pas dans $\mathbb{Q}_p$ alors $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs.

Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considérer une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on note $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et qui n'est pas complète, donc nous allons besoin de le compléter pour former un plus qrand corps complet, algébriquement clôs que l'on note $\mathbb{C}_p$ est muni d'une valeur absolue p-adique qui prolonge cette définie sur $\mathbb{Q}_p$, que nous notons $|.|_p$.
On prolonge la valeur absolue p-adique de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ à $\mathbb{C}_p$ comme suit,
en posant $\forall x \in \mathbb{C}_p \quad |x|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} |x_n|_p$, où $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\overline{\mathbb{Q}}_p$, qui est dans la classe d'équivalence de x.

Notations

- Le groupe des valeurs de $\mathbb{C}_p^*$(i.e : $|\mathbb{C}^*|_p = \{|x|_p, x \in \mathbb{C}_p, x \neq 0\}$) est l'ensemble de puissances rationnelles de p i.e $|\mathbb{C}^*|_p = \{p^y, y \in \mathbb{Q}\}$.
- $\mathbb{C}_p$ appelé le corps des nombres complexes p-adiques.

Proposition 1.13. *Le corps $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact .*

Preuve. Considérons l'équation $x^n - p = 0$ et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ l'une quelconque de ses racines. Montrons que de cette on ne peut pas extraire une sous suite convergente.

Il est claire que $(x_n)_{n\geq 0}$ est borné, et que la valeur absolue p-adique de x_n est inférieure ou égale à 1.
En effet, $|x_n|_p = p^{\frac{-1}{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} p^{-\frac{1}{n}} = 1$ et $|x_n|_p < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $(x_{n_m})_{n_m}$, $m \in \mathbb{N}$ une suite extraire d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergente et y sa limite, alors

$$|y|_p = 1 \text{ mais } |x_{n_m} - y|_p = \max\{|x_{n_m}|_p, |y|_p\} = |y|_p = 1,$$

et ceci est une contradiction car cette quantité doit tendre vers zéro. ■

Construction du $\mathbb{C}_p$ en comparaison avec la construction de $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcccl}
 & \mathbb{C}_p & \longleftrightarrow & \mathbb{C} & \\
\text{complétion par rapport à}|.|_p\uparrow & & & \| & \\
 & \overline{\mathbb{Q}}_p & & \overline{\mathbb{R}} & \\
\text{clôture algèbrique}\uparrow & & & \uparrow & \text{clôture algèbrique} \\
 & \mathbb{Q}_p & & \mathbb{R} & \\
\text{complétion par rapport à}|.|_p\uparrow & & & \uparrow & \text{completion par rapport à la valeur absolue usuel} \\
 & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} &
\end{array}$$

1.5 Fonctions analytiques complexes p-adiques

Dans cette section nous étudions les séries entières complexes p-adiques et les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_p$.

1.5.1 Séries entières complexes p-adiques

Définition 1.9. *Une série entière dans $\mathbb{C}_p$ est une série dont le terme générale $a_n(x-a)^n$, où n est un entier naturel, $x, a \in \mathbb{C}_p$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes p-adiques appelée suite de coefficients lorsque a est fixé.*

Définition 1.10. ***(Rayon de convergence)***

Le rayon de convergence d'une série entière complexe p-adique $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ qu'on le note R, tel que $0 \leq R \leq +\infty$ définie par

$$R = \sup\{\mid x-a \mid_p;\ x \in \mathbb{C}_p \text{ et } \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n \text{ converge}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Proposition 1.14. ***(Calcule du rayon de convergence)[9]***

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, alors

1) Si les $a_n \in \mathbb{C}_p^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mid a_{n+1} \mid_p}{\mid a_n \mid_p} = l$ on a $R = \dfrac{1}{l}$ (Formule de Alumbert).

2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid_p} = l$ on a $R = \dfrac{1}{l}$ (Formule de Cauchy).

3) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid_p}}$ (Formule d'Hadamard).

Théorème 1.4. *Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ une série entière, où $a_n \in \mathbb{C}_p$ et $0 \leq R \leq +\infty$ on a*

1) Pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x-a|_p < R$ alors $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ converge.

2) Pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x-a|_p > R$ alors $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ diverge.

3) Pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x-a|_p = R$ donc, on peut avoir :

a) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |a_n|_p R^n = 0$ alors, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ est convergent sur la totalité du cercle $C(a, R)$.

b) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |a_n|_p R^n \neq 0$ alors, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ est divergente sur le cercle $C(a, R)$.

Exemple 1.5.

- *Soit la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}(x-a)^n}{n}$.*
  D'après la formule de Cauchy on a

$$R^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|_p^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|n|_p^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p^{\frac{-v_p(n)}{n}}} = 1.$$

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-a)^n}{n}$ *est converge sur le disque* $D^{-}(a,1)$.

Et pour, $R=1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|_p 1\neq 0$ *d'où la série* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-a)^n}{n}$ *diverge sur le cercle* $C(a,1)$.

- *La série* $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^{n}(x-a)^n}{n!}$ *converge sur le disque* $D^{-}(a,p^{\frac{-1}{p-1}})$ *et diverge sur le cercle* $C(a,p^{\frac{-1}{p-1}})$.

  En effet, d'après Hadamard

$$R^{-1}=\lim_{n\to+\infty} sup\sqrt[n]{|a_n|_p}=\lim_{n\to+\infty} sup\left|\frac{(-1)^n}{n!}\right|_p^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty} sup\frac{1}{|n!|_p^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty} sup\,|n!|_p^{-\frac{1}{n}},$$

et d'après 1.3 on a $|n!|_p=p^{-v_p(n!)}=p^{-\frac{n-S_p(n)}{p-1}}$ *donc,*

$$R^{-1}=\lim_{n\to+\infty} supp^{\frac{n-S_p(n)}{n(p-1)}}=\lim_{n\to+\infty} supp^{\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{s_p(n)}{n}\right)},$$

et puisque $S_p(n)$ *est borné, donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}S_p(n)\neq+\infty$ *et* $R^{-1}=p^{\frac{1}{p-1}}$.

i) $|x-a|_p<R=p^{\frac{-1}{p-1}}$, *la série* $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^{n}(x-a)^n}{n!}$ *converge sur le disque* $D^{-}(a,p^{\frac{-1}{p-1}})$.

ii) $|x-a|_p=R=p^{\frac{-1}{p-1}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^n\frac{(x-a)^n}{n!}\right|_p=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|n!|_p}|x-a|_p^n=\lim_{n\to+\infty}p^{v_p(n!)}p^{\frac{-n}{p-1}}=\lim_{n\to+\infty}p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}}p^{\frac{-n}{p-1}},$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^n\frac{(x-a)^n}{n!}\right|_p=\lim_{n\to+\infty}p^{\frac{-S_p(n)}{p-1}}\neq 0.$$

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^{n}(x-a)^n}{n!}$ *diverge sur le cercle* $C(a,p^{\frac{-1}{p-1}})$.

Définition 1.11. ***(Série dérivée d'une série entière complexe*** p***-adique)***
On appelle série dérivée de la série $\sum\limits_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$, *avec* a, $a_n\in\mathbb{C}_p$, *la série* $\sum\limits_{n\geq 1}na_n(x-a)^{n-1}$, *avec* a, $a_n\in\mathbb{C}_p$.

Proposition 1.15. *La série entière* $\sum\limits_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$ *et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Preuve. Soit R_1 est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1}na_n(x-a)^{n-1}$, avec a, $a_n\in\mathbb{C}_p$

$$R_1^{-1}=\limsup_{n\to+\infty}|\,n\,a_n\,|_p^{\frac{1}{n-1}}=\limsup_{n\to+\infty}(|\,n\,|_p^{\frac{1}{n}}|\,a_n\,|_p^{\frac{1}{n}})=(\limsup_{n\to+\infty}|\,n\,|_p^{\frac{1}{n}})(\limsup_{n\to+\infty}|\,a_n\,|_p^{\frac{1}{n}})$$

et comme $\mid n \mid_p^{\frac{1}{n}} = p^{\frac{-v_p(n)}{n}}$, on a

$$R_1^{-1} = (\limsup_{n\to+\infty} p^{\frac{-v_p(n)}{n}})(\limsup_{n\to+\infty} \mid a_n \mid_p^{\frac{1}{n}}).$$

On sait que $v_p(n)$ est bornée ($v_p(n) < n$, pour tout$n \in \mathbb{N}$). D'ou le resultas. ■

Exemple 1.6. *Le rayon de convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(x-a)^n}{n!}, x \in \mathbb{C}_p$ *est* $R_1 = p^{-\frac{1}{p-1}}$, *d'après l'exemple* (1.5), *et le rayon de convergence de sa série dérivée* $\sum_{n\geq 1} \frac{n(-1)^n(x-a)^{n-1}}{n!}$ *est* $R_2 = p^{-\frac{1}{p-1}}$.

Car d'après d'Hadamard

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}(|a_n|_p)^{\frac{1}{n}}} &= \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}(|\frac{n(-1)^n}{n!}|_p)^{\frac{1}{n}}} &= \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}(|n|_p^{\frac{1}{n}}|\frac{1}{n!}|_p)} \\ &= \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}(p^{\frac{-v_p(n)}{n}}p^{\frac{1}{p-1}})} &= \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}(1p^{\frac{1}{p-1}})} &= p^{-\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

D'où $R_1 = R_2$.

Définition 1.12. ***(Fonction développable en série entière)***

Une fonction f de variable complexe p-adique, définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{C}_p$, est dit ***développable en série entière*** *au voisinage de a, s'il existe une série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, *avec $a, a_n \in \mathbb{C}_p$ du rayon de convergence R strictement positif, telle que*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, \quad \forall x \in D^-(a,R).$$

Remarque. Un simple changement de variable permet de se ramener à des développement en série entière au voisinage de zéro.

Exemple 1.7.

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \ \ \forall x \in D^-(0,1).$
- $\exp_p(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \ \ \forall\, x \in D^-(0, p^{\frac{-1}{p-1}}).$

1.5.2 Fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_p$

Définition 1.13. *Une fonction $f : D^+(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ avec $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ est dite analytique sur le disque $D^+(a,r)$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{C}_p$, telle que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mid a_n \mid_p r^n = 0 \text{ et } f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n,$$

pour tout $x \in D^{+}(a,r)$.

Définition 1.14. *Une fonction* $f : D^{-}(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ *avec* $r > 0$ *et* $a \in \mathbb{C}_p$ *est dite analytique sur le disque* $D^{-}(a,r)$ *si pour tout* ρ*, tel que* $0 < \rho < r$ *la restriction de* f *à* $D^{+}(a,\rho)$ *est une fonction analytique sur le disque* $D^{+}(a,\rho)$ *et* $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *pour tout* $x \in D^{-}(a,r)$.

Proposition 1.16. *Une fonction* $f : D^{-}(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ *avec* $r > 0$ *et* $a \in \mathbb{C}_p$*, est analytique sur le disque* $D^{-}(a,r)$ *il faut et il suffit qu'il existe une suite unique* $(a_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments de* $\mathbb{C}_p$ *satisfaisant* $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} |a_n|_p \rho^n = 0$ *pour tout* ρ*, avec* $0 < \rho < r$ *et* $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$.

Preuve.

Condition nécissaire

Supposons que f soit analytique sur le disque $D^{-}(a,r)$ et montrons que $(a_n)_n$et unique. Soient ρ_1, ρ_2 deux réels, tels que $0 < \rho_1 < \rho_2 < r$ et $(a_n)_{n\geq 0}$,$(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}_p$ associées à f, on a par définition. pour tout $0 < \rho_1 < r$ (resp $0 < \rho_2 < r$), la restriction de la fonction f est analytique sur le disque $D^{+}(a,\rho_1)$ (resp sur $D^{+}(a,\rho_2)$) pour $\rho_1 < \rho_2$, on a

$$D^{+}(a,\rho_1) \subset D^{+}(a,\rho_2).$$

D'autre part, on a

$$\forall x \in D^{+}(a,\rho_1),\ f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n,$$

et

$$\forall x \in D^{+}(a,\rho_2),\ f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n(x-a)^n,$$

d'où

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n = \sum_{n\geq 0} b_n(x-a)^n, \quad \forall x \in D^{+}(a,\rho_1),$$

donc

$$\forall x \in D^{+}(a,\rho_1), \sum_{n\geq 0} (a_n - b_n)(x-a)^n = 0.$$

D'où $a_n = b_n,$ pour tout $n \geq 0$.

Alors on montre l'unicité du développement en série des fonctions analytiques sur $D^{+}(a,\rho_1)$.

Condition suffisante

Trivial par la définition , puisque la suite d'éléments de $\mathbb{C}_p$, $(a_n)_{n\geq 0}$ existe, vérifiant $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} |a_n|\rho^n = 0$ pour tout ρ, $0 < \rho < r$ implique que la fonction est analytique sur le disque $D^{+}(a,\rho)$, d'où la résultat sur $D^{-}(a,r)$. ■

Proposition 1.17. *Les fonctions analytiques sur un disque fermé de $\mathbb{C}_p$, forment un anneau commutatif, intègre et stable par dérivation.*

Remarque.

1) Une fonction de variable complexe p-adique définie sur un disque $D(a,r)$ avec $0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$ est dite analytique sur ce disque lorsqu'elle admet un développement en série entière en tout point de $D(a,r)$.

2) Si $R = +\infty$ alors f est analytique sur tout $\mathbb{C}_p$ et on dit que f est entière.

Notation

- On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$, et $\mathcal{A}(D(0,R))$ l'ensemble des fonctions analytiques sur le disque $D(0,R)$.
- On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[x]$ l'ensemble des fonctions entières, qui ne sont pas des polynômes, et qui s'appellent fonctions transcendantes.

Exemple 1.8.

- *La fonction* $\exp_p(x) = \sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{x^n}{n!}$ *est analytique sur le disque ouvert* $D^-(0,p^{\frac{-1}{p-1}})$, *elle n'est pas analytique sur le cercle* $C(0,p^{\frac{-1}{p-1}})$, *et n'est pas entière sur* $\mathbb{C}_p$.

En effet

On sait que $R = p^{\frac{-1}{p-1}}$, *donc, la fonction* $\exp_p(x)$ *est analytique sur le disque ouvert* $D^-(0,p^{\frac{-1}{p-1}})$.

— *Pour* $|x|_p = p^{\frac{-1}{p-1}}$, *on a*

$$\begin{aligned}|a_n|_p r^n &= \left|\frac{1}{n!}\right|_p p^{\frac{-n}{p-1}} = p^{v_p(n!)}p^{\frac{-n}{p-1}} = p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}}p^{\frac{-n}{p-1}}\\ &= p^{\frac{-S_p(n)}{p-1}},\end{aligned}$$

par passage à la limite, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|_p r^n \neq 0$.

D'où $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{x^n}{n!}$ *n'est pas convergente sur* $C(0,p^{\frac{-1}{p-1}})$, *donc* $\exp_p$ *n'est pas analytique sur* $C(0,p^{\frac{-1}{p-1}})$ *et elle n'est pas entier .*

- $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(x-a)^n$ *est analytique sur* $D^-(a,1)$ *et n'est pas analytique sur le cercle* $C(a,1)$.

En effet

On sait que $R = 1$, donc la fonction f est analytique sur le disque $D^-(a, 1)$.

— *Pour $|x - a|_p = 1$ $(r = 1)$, on a*

$$|a_n|_p r^n = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|_p r^n = \left|\frac{1}{n}\right|_p = p^{v_p(n)}.$$

Pour tout $n \geq 1$, $v_p(n) \geq 0$, donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |a_n|_p r^n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} p^{v_p(n)} \neq 0$, d'où $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(x-a)^n$ n'est pas convergente sur $C(a, 1)$, donc f n'est pas analytique sur le cercle $C(a, 1)$ et elle n'est pas analytique sur $C(a, 1)$ et elle n'est pas entier.

Exemple 1.9. *Soit $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} p^{2n^2} x^n$, $\quad (p^{2n^2})_{n \geq 0}$, $x \in \mathbb{C}_p$.*

On a

$$\begin{aligned} R = \quad & \frac{1}{\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} p^{-2n}} \\ = \quad & +\infty. \end{aligned}$$

Alors $\sum\limits_{n \geq 0} p^{2n^2} x^n$ est convergente sur $\mathbb{C}_p$, donc la fonction f est analytique sur $\mathbb{C}_p$ et elle est entier.

Théorème 1.5.

1) *L'ensemble $\mathcal{A}(D^-(a, r))(resp\mathcal{A}(D^+(a, r)))$, $0 < r < R$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}_p$.*

2) *Si la fonction $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n (x - a)^n$ est un élément de $\mathcal{A}(D^-(a, r))(resp\mathcal{A}(D^+(a, r)))$, alors elle est continue, dérivable sur $D^-(a, r)(resp(D^+(a, r)))$, et sa dérivée définie par $f' \in \mathcal{A}(D^-(a, r))(resp\mathcal{A}(D^+(a, r)))$ tel que*

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n (x - a)^{n-1},$$

de plus les deux fonctions f et f' ont le même rayon de convergence.

3) *Plus généralement, pour tout $k \geq 1$ f a une dérivée k fois $f^{(k)}$, et pour $x \in D^-(a, r)(resp(D^+(a, r)))$*

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n \geq k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a_n (x - a)^{n-k}, f^{(k)}(x) \text{ est dans } \mathcal{A}(D^-(a, r))(resp\mathcal{A}(D^+(a, r))).$$

Chapitre 2

Polygône de la valuation et Wronskien p-adique

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de la distribution des zéros d'une fonction analytique p-adique. On commence par la présentation d'une méthode très importante pour cet étude. Puis, on s'étend la méthode d'une manière naturelle sur les fonctions méromorphes p-adiques, et on termine par l'application de cette méthode sur le wronskien p-adique.

2.1 La distributions des zéros d'une fonction analytique p-adique

2.1.1 Zéros d'une fonction analytique p-adique

Définition 2.1. ***(zéros d'une fonction analytique)***
Soit f une fonction analytique non nulle sur un disque $D(a,r)$. On dit que $\alpha \in D(a,r)$ est un zéro de f si $f(\alpha) = 0$.

Définition 2.2. ***(Ordre de multiplicité d'un zéro)***
Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, $\alpha \in \mathbb{C}_p$ et soit $r \in]0, +\infty[$ tel que $D(\alpha, r) \subset \mathbb{C}_p$ et

$$f(x) = \sum_{n \geq q} a_n (x - \alpha)^n, \ a_q \neq 0, \ q > 0.$$

On dit dans ce cas que α est un zéro de f d'ordre de multiplicité q.

Proposition 2.1. *Le point α constitue un zéro d'ordre de multiplicité q d'une fonction f, qui est analytique en ce point, si et seulement si, dans certains voisinage de point α, l'égalité $f(x) = (x-\alpha)^q g(x)$ est vérifiée, oú la fonction g est analytique au point α et $g(\alpha) \neq 0$.*

Preuve. Pour tout $x \in D^+(\alpha, \rho)$,$0 < \rho < r$ et comme α est un zéro d'ordre q de f, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq q} a_n (x-\alpha)^n, \forall x \in D^+(\alpha, \rho), a_q \neq 0,\, q > 0 \\ &= (x-\alpha)^q (a_q + a_{q+1}(x-\alpha) + \cdots), \forall x \in D^+(\alpha, \rho) \\ &= (x-\alpha)^q \sum_{n \geq 0} a_{q+n}(x-\alpha)^n, \forall x \in D^+(\alpha, \rho) \\ &= (x-\alpha)^q g(x), \forall x \in D^+(\alpha, \rho). \end{aligned}$$

Tel que $g(x) = \sum_{n \geq 0} a_{q+n}(x-\alpha)^n$ une fonction analytique sur disque $D^+(\alpha, \rho)$, d'après que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} |a_{q+n}(x-\alpha)^n|_p = \lim_{n \longrightarrow +\infty} |a_{q+n}|_p \rho^n = 0 \text{ et } g(\alpha) = a_q \neq 0. \quad \blacksquare$$

Proposition 2.2. ***(Principe des zéros isolés)***

Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(a, R))$ tel que f est une fonction non nulle et soit $b \in D^-(a, R)$ tel que $f(b) = 0$, alors il existe r assez petit vérifié

$$\forall x \in D^-(b, r) - \{b\}, f(x) \neq 0.$$

Preuve.

Si b est un zéro de f, on peut écrire la fonction non nulle f sous la forme

$$f(x) = \sum_{n \geq q} a_n (x-b)^n,\ a_q \neq 0,\ q \geq 0,$$

on résulte que si $|x-b|_p$ est assez petit et non nul, on a

$$|f(x)|_p = \left| \sum_{n \geq q} a_n (x-b)^n \right|_p = \max_{n \geq q} \left\{ |a_n|_p |x-b|_p^n \right\} = |a_q|_p |x-b|_p^q \neq 0. \quad \blacksquare$$

Lemme 2.1. *[11] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constante, alors f admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}_p$, de plus si f n'est pas un polynôme (i.e $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[x]$) alors f a une infinité de zéros dans $\mathbb{C}_p$.*

Théorème 2.1. ***(Strassman)****[12]*

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$ une série entière non nulle avec des coefficients dans $\mathbb{C}_p$, et supposer que $f(x)$ converge pour tout $x \in D^+(a, 1)$.

Soit N un entier positif défini par les deux conditions

$$\begin{cases} 1)\ |a_N|_p = \max_{n \geq 0} |a_n|_p; \\ 2)\ |a_n|_p < |a_N|_p, \forall n > N. \end{cases}$$

on a dans ce cas $f : D^+(a, 1) \longrightarrow \mathbb{C}_p$, possède au plus N zéros dans $D^+(a, 1)$.

2.1.2 Le module maximum d'une fonction analytique p-adique

Proposition 2.3. *Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$ tels que $0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$, $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, la formule*

$$||f|| = \sup_{x\in D^+(a,r)} |f(x)|_p,$$

est une valeur absolue ultramétrique.

Preuve.

Cette quantité existe car f est analytique sur $D^+(a,r)$ alors la suite $(|a_n|_p r^n)_{n\geq 0}$ a une limite 0 lorsque n tend vers l'infini d'ou $|a_n|_p r^n$ borné.

Montrons que $||f||$ est une valeur absolue ultramétriques

1) Soient $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$, $0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$ et pour tout $x \in D^+(a,r)$, on a

$$\begin{aligned}
||f|| = 0 &\iff \sup_{x\in D^+(a,r)} |f(x)|_p = 0 \\
&\iff |f(x)|_p = 0,\ \forall x \in D^+(a,r) \\
&\iff f(x) = 0,\ \forall x \in D^+(a,r) \\
&\iff f \equiv 0.
\end{aligned}$$

2) Soient $f, g \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$, $0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$ et pour tout $x \in D^+(a,r)$,

on a

$$\begin{aligned}
||fg|| &= \sup_{x\in D^+(a,r)} |(fg)(x)|_p \\
&= \sup_{x\in D^+(a,r)} |f(x)g(x)|_p \\
&= \sup_{x\in D^+(a,r)} |f(x)|_p |g(x)|_p \\
&= \sup_{x\in D^+(a,r)} |f(x)|_p \sup_{x\in D^+(a,r)} |g(x)|_p \\
&= ||f||\ ||g||.
\end{aligned}$$

3) Soient $f, g \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$, $0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $x \in D^+(a,r)$,

on a $||(f+g)(x)|| = \sup\limits_{x\in D^+(a,r)} |(f+g)(x)|_p$

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x)|_p &= |f(x)+g(x)|_p,\ \forall x \in D^+(a,r) \\
&\leq \max\{|f(x)|_p, |g(x)|_p\},\ \forall x \in D^+(a,r).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in D^+(a,r)} |(f+g)(x)|_p &\leq \sup_{x\in D^+(a,r)} \{\max\{|f(x)|_p, |g(x)|_p\}\} \\
&= \max\{\sup_{x\in D^+(a,r)} \{|f(x)|_p, |g(x)|_p\}\} \\
&= \max\{\sup_{x\in D^+(a,r)} |f(x)|_p, \sup_{x\in D^+(a,r)} |g(x)|_p\} \\
&= \max\{||f(x)||, ||g(x)||\}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in D^+(a,r)$

$$\sup_{x\in D^+(a,r)} |(f+g)(x)|_p \leq \max\{||f||, ||g||\},$$

d'où

$$||f+g|| \leq \max\{||f||, ||g||\}.$$

alors $||.||$ est une valeur absolue ultramétrique. ■

Définition 2.3. *Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$ tels que $0 < r < R$ et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, on définit le module maximum de f, par la formule*

$$|f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n.$$

Proposition 2.4. *Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$ tels que $0 < r < R$ et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ l'application*

$$r \longmapsto |f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n (\textbf{\textit{module maximum}}),$$

est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathcal{A}(D^+(a,r))$.

Preuve.

Le module maximum existe car f est analytique sur $D^+(a,r)$ alors la suite $(|a_n|_p r^n)_{n\geq 0}$ a une limite 0, lorsque n tend vers l'infini d 'ou $|a_n|_p r^n$ est borné.

Montrons que $|.|(r)$ est une valeur absolue ultramétrique.

1) Soit$f \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$ telle que $0 < r < R$, $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$. Pour tout $x \in D^+(a,r)$ on a

$$\begin{aligned}
|f|(r) = 0 &\iff \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n = 0 \\
&\iff |a_n|_p r^n = 0, \forall n \geq 0 \\
&\iff |a_n|_p = 0, \forall n \geq 0 \\
&\iff a_n = 0, \forall n \geq 0 \\
&\iff f \equiv 0.
\end{aligned}$$

2) Soient $f, g \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$ tels que $0 < r < R, a \in \mathbb{C}_p$ on pose

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n \text{ et } g(x) = \sum_{n\geq 0} b_n(x-a)^n$$

alors pour tout $x \in D^+(a,r)$, on a

$$f(x)g(x) = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big)(x-a)^k,$$

d'où

$$|fg|(r) = \max_k \Big|\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big|_p r^k.$$

Montrons que $|fg|(r) \leq |f|(r)|g|(r)$ on a

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad \Big|\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big|_p r^k &\leq \Big(\max_{i+j=k} |a_i|_p |b_j|_p\Big) r^k \\ &= \max_{i+j=k}\{(|a_i|_p r^i)(|b_j|_p r^j)\} \\ &\leq \max_i\{|a_i|_p r^i\}\max_j\{|b_j|_p r^j\} \\ &= |f|(r)|g|(r). \end{aligned} \tag{2.1}$$

donc $|fg|(r) = \max\limits_k \big|\sum_{i+j=k} a_i b_j\big|_p r^k \leq |f|(r)|g|(r)$.
Pour montrer l'autre inégalité, choisissons I, J tel que

$$|a_I|_p r^I = |f|(r) \quad et \quad |a_i|_p r^i < |f|(r) \quad pour\ i < I,$$

$$|b_J|_p r^J = |g|(r) \quad et \quad |b_j|_p r^j < |g|(r) \quad pour\ j < J,$$

on va estimer les termes $\sum\limits_{i+j=I+J} a_i b_j$.

a. Si $i < I$ ou bien $j < J$ alors

$$|a_i|_p r^i < |f|(r) \quad \text{ou bien} \quad |b_j|_p r^j < |g|(r),$$

donc

$$\begin{aligned} |a_i b_j|_p &< r^{-i-j}|f|(r)|g|(r) \\ &= r^{-I-J}|f|(r)|g|(r). \end{aligned}$$

b. Si $i = I$ et $j = J$ alors

$$|a_I|_p r^I = |f|(r) \quad et \quad |b_J|_p r^J = |g|(r),$$

alors

$$|a_I b_J|_p = r^{-I-J}|f|(r)|g|(r).$$

donc il y a un terme maximum dans la somme $\sum_{i+j=I+J} a_i b_j$ avec $i = I$ et $j = J$, et comme le corps $\mathbb{C}_p$ un corps ultramétrique, la valeur absolue de la somme sera égale à la valeur absolue de plus grand coefficient de la somme, donc

$$|\sum_{i+j=I+J} a_i b_j|_p = r^{-I-J}|f|(r)|g|(r),$$

alors

$$|\sum_{i+j=I+J} a_i b_j|_p r^{I+J} = |f|(r)|g|(r).$$

pour calculer $|fg|(r)$ on doit prendre le maximum de tous les coefficients du produit. la dernière égalité nous dit que la coefficient $|f|(r)|g|(r) = |\sum_{i+j=I+J} a_i b_j|_p r^{I+J}$. donc le maximum ne peut être que plus grand, ainsi on montré

$$|fg|(r) \geq |f|(r)|g|(r), \tag{2.2}$$

D'après (2.1) et (2.2) on a

$$|fg|(r) = |f|(r)|g|(r).$$

3) Soient $f, g \in \mathcal{A}(D^+(a, r))$ telles que

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n, \quad g(x) = \sum_{n \geq 0} b_n (x-a)^n,$$

On a

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n)(x-a)^n,$$

Donc

$$|f+g|(r) = \max_{n \geq 0} |a_n + b_n|_p r^n.$$

On a

$$\forall n \geq 0 \quad |a_n + b_n|_p \leq \ max\{|a_n|_p, |b_n|_p\},$$

alors

$$\begin{aligned} |a_n + b_n|_p r^n &\leq \max\{|a_n|_p, |b_n|_p\} r^n \qquad \forall n \geq 0 \\ &\leq \max\{|a_n|_p r^n, |b_n|_p r^n\} \qquad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} \max_{n \geq 0} \mid a_n + b_n \mid_p r^n &\leq \max_{n \geq 0}(\max\{\mid a_n \mid_p r^n, \mid b_n \mid_p r^n\}) \\ &\leq \max(\max_{n \geq 0}\{|a_n|_p r^n, |b_n|_p r^n\}) \\ &\leq \max\{\max_{n \geq 0}|a_n|_p r^n, \max_{n \geq 0}|b_n|_p r^n\} \\ &\leq \max\{|f|(r), |g|(r)\}. \end{aligned}$$

donc

$$|f+g|(r) \ \leq \ \max\{|f|(r), |g|(r)\}.$$

donc$|\ .\ |\ (r)$ est une valeur absolue ultramétrique. ■

Remarque. D'après la proposition 2.3 et la proposition 2.4 si f est une fonction analytique sur $D^+(a, r)$,

on a

$$||f|| = \sup_{x \in D^+(a,r)} |f(x)|_p = |f|(r). \tag{2.3}$$

Cette relation est appelée ***égalité de Cauchy***.

Proposition 2.5. *Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(a, r))$ avec $0 < r < R$, $a \in \mathbb{C}_p$ une fonction non nulle, alors*

P1 *La fonction $|f|(r)$ est croissante.*

P2 *Si f a un zéro b dans le disque $D^+(a, r)$, la fonction $|f|(r)$ est strictement croissante pour $r > |b|_p$.*

P3 *La fonction $|f|(r)$ est continue.*

Preuve.

P1 D'après (2.3) on a $|f|(r) = \sup\limits_{x \in D^+(a,r)} |f(x)|_p$

alors si $r_1 < r_2$ on a

$$\begin{aligned} |f|(r_1) \ &= \ \sup_{x \in D^+(a,r_1)} |f(x)|_p \\ &\leq \ \sup_{x \in D^+(a,r_2)} |f(x)|_p \\ &= \ |f|(r_2). \end{aligned}$$

D' où $|f|(r)$ est croissante.

P2 Soit $r_0 > |b|_p$, on a alors $|f|(r_0) = |a_N|r_0^N$, pour$N \geq 1$.

En raison de la présence d'au moins zéro dans le disque fermé de centre a, rayon r_0 comme a_N n'est pas nulle, si $r > r_0$ donc

$$|a_N|_p r^N > |a_N|_p r_0^N,$$

alors $|f|(r) = \max\limits_{n \geq 0} |a_n|_p r^n > |a_N|_p r_0^N$ et on a $|a_N|_p r_0^N = |f|(r_0)$.

D' où $|f|(r)$ est strictement croissante.

P3 Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$, alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |a_n|_p r^n = 0$, pour tout $0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$.

Fixons $\rho \in]0, r[$; alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |a_n|_p \rho^n = 0$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\max_{0 \leq n < n_1} |a_n|_p \rho^n = \max_{n \geq 0} |a_n|_p \rho^n = |f|(\rho),$$

Il en résulte que si $t \in]0, \rho]$, on a aussi

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |a_n|_p t^n = 0,$ il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\max_{0 \leq n < n_1} |a_n|_p t^n = \max_{n \geq 0} |a_n|_p t^n = |f|(t),$$

d'où la fonction $t \longrightarrow \max\limits_{0 \leq n \leq n_1} |a_n|_p t^n$ est clairement continue. ■

Théorème 2.2. ***(spécificité ultramétrique)***

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ *(resp.* $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r)),\ 0 < r < R$*), pour tout* $\rho \in]0, +\infty[$ *(resp.* $\rho \in]0, r[$*), on a*

$$|f'|(\rho) \leq \frac{1}{\rho} |f|(\rho).$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, alors $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$ et $f'(x) = \sum\limits_{n \geq 0} n a_n (x-a)^{n-1},\ a \in \mathbb{C}_p$ pour $\rho \in]0, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} |f'|(\rho) &= \max_{n \geq 0} |a_n n|_p \rho^{n-1} \\ &= \frac{1}{\rho} \max_{n \geq 0} |a_n|_p |n|_p \rho^n \\ &\leq \frac{1}{\rho} \max_{n \geq 0} |a_n|_p \rho^n, (\text{car} |n|_p \leq 1) \\ &\leq \frac{1}{\rho} |f|(\rho). \end{aligned}$$

D'où la résultat, même démonstration pour $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r)),\ \rho \in]0, r[$. ■

Lemme 2.2. *Soit* $P(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_N x^N$*, un polynôme de* $\mathbb{C}_p[x]$*, on suppose que*

$$|b_N|_p r^N = \max_{0 \leq n \leq N} |b_n|_p r^n = |P|(r),$$

donc le polynôme P *a toutes ses racines dans le disque fermé de centre* 0*, rayon* r*,* $r > 0$*.*

Preuve. Montrons que le polynôme $P(x)$ a toutes ses racines sont dans le disque $D^+(0,r), r > 0$. On factorise $P(x)$, soit α_i *pour tout* $i = 1, \cdots, N$ sont des racines de $P(x)$ dans $\mathbb{C}_p$ pas forcément distincts

$$P(x) = b_N (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_N) \text{ où } b_N \neq 0. \tag{2.4}$$

Alors

$$\begin{aligned}|x-\alpha_i|(r) &= \max\{1\times r, |\alpha_i|_p\}, \quad \forall i=1,\ldots,N\\ &= \max\{r,|\alpha_i|_p\}, \quad \forall i=1,\ldots,N.\end{aligned}$$

d'après (2.4)

$$\begin{aligned}|P|(r) &= |b_N(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_N)|(r)\\ &= |b_N|_p \textstyle\prod_{i=1}^N \max\{r,|\alpha_i|_p\}.\end{aligned}$$

donc $|P|(r) = |b_N|_p r^N = |b_N|_p \prod_{i=1}^N \max\{r,|\alpha_i|_p\}$.

D'où $r^N = \prod_{i=1}^N \max\{r,|\alpha_i|_p\}$ et comme $\max\{r,|\alpha_i|_p\} \geq r$ pour tout $i = \{1,\cdots,N\}$, on en conclut que $|\alpha_i|_p \leq r$ pour tout $i \in \{1,\cdots,N\}$ donc on bien montré que toutes les racines de p sont dans le disque $D^+(0,r)$. ■

Théorème 2.3. ***(Théorème de préparation de Weirstrass)****[3]*

Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ une série entière non nulle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, convergente dans le disque $D^+(a,r)$, $0<r<R$ et N un indice tel que l'on ait

$$|a_N|_p r^N = |f|(r) \text{ et } |a_j|_p r^j < |a_N|_p r^N \text{ pour } j > N.$$

Il existe alors un couple (P,H), P étant un polynôme de $\mathbb{C}_p[x]$,
$P(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_Nx^N$ avec $|b_N|r^N = |P|(r) = |f|(r)$ et $H(x)$ une série entière, telle que $|H-1|(r) < 1$, vérifiant

$$f(x) = P(x)H(x).$$

Théorème 2.4. *Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ une série entière, non nulle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ convergente dans le disque $D^+(a,r)$, $0<r<R$, et N un indice tel que l'on ait*

$$|a_N|_p r^N = |f|(r), \text{ et } |a_j|_p r^j < |a_N|_p r^N \text{ pour } j > N, \text{ alors}$$

i. Si $N \geq 1$, alors la fonction f a exactement N zéros dans le disque $D^+(a,r)$ compte tenu des multiplicité.

ii. La fonction f n'a aucun zéro dans le disque $D^+(a,r)$ si et seulement si $N=0$ sa valeur absolue y est alors constante dans ce disque.

Preuve. On va utiliser le théorème 2.3,

i. Comme $|H-1|(r) < 1$, alors

$$|H(x)-1|_p < 1, \forall x \in D^+(a,r).$$

Donc $|H(x)|_p = 1$ pour tout $x \in D^+(a,r)$ et par suite $H(x)$ ne s'annule pas. Comme le polynôme P qui intervient dans la factorisation a toutes ses racines dans le disque $D^+(a,r)$ par le lemme 2.2, il en résulte que f a exactement N zéros compte tenu des multiplicités dans ce disque.

ii. Si f n'a aucun zéro dans le disque $D^+(a,r)$ on doit avoir $N = 0$, si $N = 0$ le polynôme P qui intervient dans la décomposition $f = P.H$ est un polynôme de degré 0, donc P est un constante nom nulle puisque f est non nulle ($f = \lambda H$) est comme $|H - 1|(r) < 1$, on a $|H(x)|_p = 1$ pour tout $x \in D^+(a,r)$, $0 < r < R$, est par suite $|f(x)|_p = |\lambda|_p$. ■

Théorème 2.5. *Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(a,r))$ tel que $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, 0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$ une fonction non nulle et*

$$l = \min\{n \in \mathbb{N} \textit{ tel que } |f|(r) = |a_n|r^n\}$$

Alors

1. *Si $l = 0$, alors la fonction f n'a aucun zéro dans le disque $D^-(a,r)$ et sa valeur absolue p-adique est constante dans ce disque.*
2. *Si $l \geq 1$, alors la fonction f a exactement l zéros dans le disque $D^-(a,r)$, compte tenu avec des multiplicités.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(a,r))$ tel que $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, 0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$ une fonction non nulle et

$$l = \min\{n \in \mathbb{N} \textit{ tel que } |f|(r) = |a_n|r^n\}$$

1. Si $l = 0$, on a

$$\max_{n\geq 1}|a_n|_p r^n \leq |a_0|_p$$

et comme $f \not\equiv 0$, alors $|a_0|_p \neq 0$

d'où pour tout $x \in D^-(a,r)$,on a

$$|f(x) - a_0|_p = \left|\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^n\right|_p \leq \max_{n\geq 1}\{|a_n|_p|x-a|_p^n\} < \max_{n\geq 1}\{|a_n|_p r_p^n\} \leq |a_0|_p.$$

donc $|f(x)|_p = |a_0|_p \neq 0$.

Alors, pour tout $x \in D^-(a,r)$, f n'a pas de zéros dans le disque $D^-(a,r)$.

2. Si $l \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $n < l$, on a

$$|a_n|_p r^n < |a_l|_p r^l \Longrightarrow \left(\frac{|a_n|_p}{|a_l|_p}\right)^{\frac{1}{l-n}} < r$$

posons $\rho_0 = \max\limits_{n\geq 0}\left(\left(\frac{|a_n|_p}{|a_l|_p}\right)^{\frac{1}{l-n}}\right)$, alors pour tout $\rho \in]\rho_0, r[$, on a

$$\left(\frac{|a_n|_p}{|a_l|_p}\right)^{\frac{1}{l-n}} \leq \rho_0 < \rho \Longrightarrow |a_n|_p\rho^n < |a_l|_p\rho^l,\ \forall n < l$$

d'où, pour tout $\rho \in]\rho_0, r[$, on a

$$|a_n|_p\rho^n < |a_l|_p\rho^l,\ \forall n < l \tag{2.5}$$

d'autre part, pour tout $\rho \in]0, r[$, et pour tout $n > l$, on distingue deux cas

- Si $|a_n|_p \neq 0$,on a

$$\begin{aligned} |a_n|_p r^n \leq |a_l|_p r^l \quad &\Longrightarrow \quad r^{n-l} \leq \frac{|a_l|_p}{|a_n|_p} \\ &\Longrightarrow \quad \rho^{n-l} < r^{n-l} \leq \frac{|a_l|_p}{|a_n|_p} \\ &\Longrightarrow \quad |a_n|_p\rho^n < |a_l|_p\rho^l. \end{aligned}$$

- Si $|a_n|_p = 0$, on a

$$|a_n|_p\rho^n = 0 < |a_l|\rho^l$$

d'où

$$|a_n|_p\rho^n < |a_l|\rho^l,\ \forall n > l,\ \forall \rho \in]0, r[\tag{2.6}$$

de (2.5) et (2.6) on a, pour tout $\rho \in]\rho_0, r[$

$$|a_n|_p\rho^n < |a_l|\rho^l,\ \forall n < l,\ \text{ et } |a_n|_p\rho^n < |a_l|\rho^l,\ \forall n > l.$$

D' oú f a exactement l zéros sur $D^+(a, \rho)$, pour tout $\rho \in]\rho_0, r[$.

Donc f a exactement l zéros sur $D^-(a, \rho)$. ■

2.1.3 Polygône de valuation

Définition 2.4. ***(fonction de valuation p-adique)***
Soient $f \in \mathcal{A}(D^+(a, r))$, $0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$ telle que $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, on définit une fonction μ_f sur $]-\infty, \log R[$ par

$$\begin{aligned} \mu_f :\ \ I =]-\infty, \log R[\ &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ \log r \qquad &\longrightarrow \ \mu_f(\log r) = \log|f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log|a_n|_p + n\log r\}. \end{aligned}$$

*Cette fonction est la **fonction de valuation p-adique** de f et son graphe est dit **polygône de valuation p-adique** de f.*

Proposition 2.6. *La fonction μ_f vérifie les propriétés suivantes*

P1 *C'est une fonction convexe, croissante, continue et affine par morceaux.*

P2 *Si f a un zéro b dans $D^-(a,r)$, μ_f est strictement croissante pour $\log r > \log |b|_p$.*

P3 *μ_f admet une dérivée à gauche $\dfrac{d^-\mu_f}{d(logr)}$ et une dérivée à droite $\dfrac{d^+\mu_f}{d(logr)}$ en tout point $\log r \in I$ et on a*

- $\dfrac{d^+\mu_f}{d(logr)} = N(r)$ *le plus grand entier tel que* $\mu_f(\log r) = \log \mid a_l \mid_p + N \log r$ *où $N(r)$ est le nombre des zéros de f dans le disque fermé $D^+(a,r)$.*
- $\dfrac{d^-\mu_f}{d(logr)} = n(r)$ *le plus petit entier tel que* $\mu_f(\log r) = \log \mid a_l \mid_p + n \log r$ *où $n(r)$ est le nombre des zéros de f dans le disque ouvert $D^-(a,r)$*

  Donc $N(r) - n(r)$ est le nombre des zéros de f sur le cercle $C(a,r)$.

Exemple 2.1. *Soit $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ tel que*

$$P(x) = (p^3 + p^5 + p^6) + (p^2 + p^3 + 3p^6)x + (p + p^2 + 5p^4)x^2 + (p + p^2)x^3, \quad pour\, p \geq 2$$

Alors

$$|a_0|_p = |p^3 + p^5 + p^6|_p = p^{-3}$$
$$|a_1|_p = |p^2 + p^3 + 3p^6|_p = p^{-2}$$
$$|a_2|_p = |p + p^2 + 5p^4|_p = p^{-1}$$
$$|a_3|_p = |p + p^2|_p = p^{-1}$$

Calculons $|P|(r)$.

* *Pour $r = \dfrac{1}{p^2}$, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3} \times 1 = p^{-3}$$
$$|a_1|_p r^1 = p^{-2} \times p^{-2} = p^{-4}$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1} \times p^{-4} = p^{-5}$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1} \times p^{-6} = p^{-7}$$

donc

$$|P|(\frac{1}{p^2}) = p^{-3},$$

d'où $N(\frac{1}{p^2}) = n(\frac{1}{p^2}) = 0$*, alors* P *n'a aucun zéro sur le disque fermé* $D^+(0, p^{-2})$ *.*

* *Pour* $r = \dfrac{1}{p}$*, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3} \times 1 = p^{-3}$$
$$|a_1|_p r^1 = p^{-2} \times p^{-1} = p^{-3}$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1} \times p^{-2} = p^{-3}$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1} \times p^{-3} = p^{-4}$$

donc

$$|P|(r) = p^{-3},$$

d'où

$N(\frac{1}{p}) = 2$*, alors* P *a un zéro dans le disque fermé* $D^+(0, \frac{1}{p})$*.*

$n(\frac{1}{p}) = 0$*, alors* P *n'a aucun zéro dans le disque ouvert* $D^-(0, \frac{1}{p})$*.*

$N(\frac{1}{p}) - n(\frac{1}{p}) = 2$*, alors* P *a deux zéros sur le cercle* $C(0, \frac{1}{p})$*.*

* *Pour* $r = 1$*, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3} \times 1 = p^{-3}$$
$$|a_1|_p r^1 = p^{-2} \times 1 = p^{-2}$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1} \times 1 = p^{-1}$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1} \times 1 = p^{-1}$$

donc

$$|P|(1) = p^{-1},$$

d'où

$N(1) = 3$*, alors* P *a deux zéro dans le disque fermé* $D^+(0, 1)$*.*

$n(1) = 2$*, alors* P *a un zéro dans le disque ouvert* $D^-(0, 1)$*.*

$N(1) - n(1) = 1$*, alors* P *a un zéro sur le cercle* $C(0, 1)$*.*

* *Pour* $r = p$*, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3} \times 1 = p^{-3}$$
$$|a_1|_p r^1 = p^{-2} \times p = p^{-1}$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1} \times p^2 = p$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1} \times p^3 = p^2$$

donc

$$|P|(p) = p^2,$$

d'où $N(p) = n(p) = 3$, alors P n'a aucun zéro sur le cercle $C(0, p)$.
Et comme $\mathbb{C}_p$ algébriquement clôs on a

$$|P|(r) \quad = \quad \begin{cases} |a_0|r^0 & 0 < r \leq \frac{1}{p} \\ |a_2|r^2 & \frac{1}{p} \leq r \leq 1 \\ |a_3|r^3 & r \geq 1 \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} p^{-3} & 0 < r \leq \dfrac{1}{p} \\ p^{-1}r^2 & \dfrac{1}{p} \leq r \leq 1 \\ p^{-1}r^3 & r \geq 1 \end{cases}$$

d'où

$$\log |P|(r) = \begin{cases} -3 \log p & -\infty < \log r < -\log p \\ -\log p + 2 \log r & -\log p \leq \log r \leq 0 \\ -\log p + 3 \log r & \log r \geq 0 \end{cases}$$

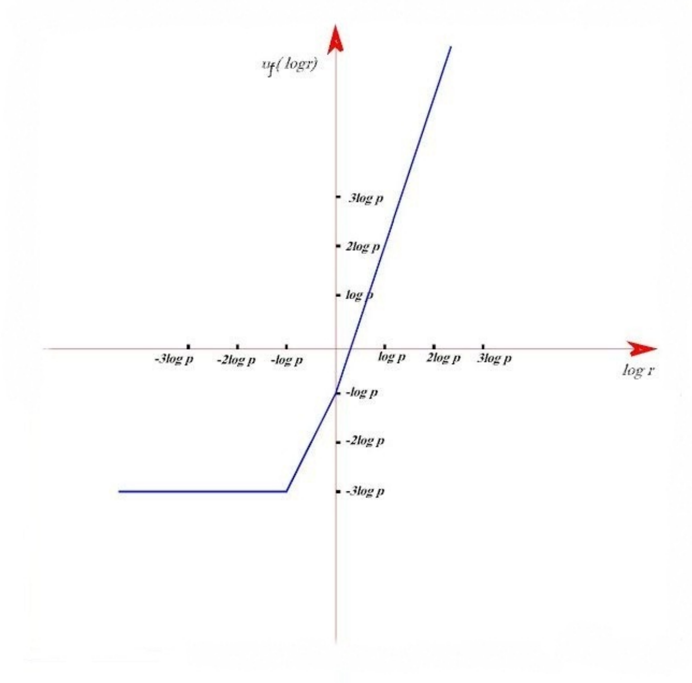

FIGURE 2.1 – Polygone de valuation p-adique de la fonction P.

Exemple 2.2. *Soit* $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ *tel que*

$$P(x) = x^3(x-a_1)^2(x-a_2)(x-a_3)^3(x-a_4)(x-a_5)^4.$$

avec $0 < |a_1|_p = |a_2|_p < |a_3|_p = |a_4|_p < |a_5|_p$,
an a $|P|(r) = |x^3|(r)|(x-a_1)^2|(r)|x-a_2|(r)|x-a_3|^3(r)|(x-a_4)|x-a_5|_p^4|$, *donc*

* *Pour* $0 < r < |a_1|_p$, *on a*

$$\begin{aligned} |x^3|(r) &= r^3 \\ |x-a_1|(r) &= \max\{|a_1|_p, r\} = |a_1|_p \\ |x-a_2|(r) &= \max\{|a_2|_p, r\} = |a_2|_p \\ |x-a_3|(r) &= \max\{|a_3|_p, r\} = |a_3|_p \\ |x-a_4|(r) &= \max\{|a_4|_p, r\} = |a_4|_p \\ |x-a_5|(r) &= \max\{|a_5|_p, r\} = |a_5|_p \end{aligned}$$

donc

$$|P|(r) = r^3|a_1|_p^2|a_2|_p|a_3|_p^3|a_4|_p|a_5|_p^4 = A \times r^3, \ \text{ tel que } A = |a_1|_p^2|a_2|_p|a_3|_p^3|a_4|_p|a_5|_p^4.$$

Alors

$$\log|P|(r) = \log A + 3\log r,$$

donc P *a trois zéros dans le disque fermé* $D^+(0,r)$.

* *Pour* $r = |a_1|_p$, *on a*

$$\begin{aligned} |x^3|(r) &= r^3 \\ |x-a_1|(r) &= \max\{|a_1|_p, r\} = r \\ |x-a_2|(r) &= \max\{|a_2|_p, r\} = r \\ |x-a_3|(r) &= \max\{|a_3|_p, r\} = |a_3|_p \\ |x-a_4|(r) &= \max\{|a_4|_p, r\} = |a_4|_p \\ |x-a_5|(r) &= \max\{|a_5|_p, r\} = |a_5|_p \end{aligned}$$

donc

$$|P|(r) = r^3r^2r|a_3|_p^3|a_4|_p|a_5|_p^4 = A \times r^6, \ \text{tel que } A = |a_3|_p^3|a_4|_p|a_5|_p^4.$$

alors

$$\log|P|(r) = \log A + 6\log r.$$

donc P *a six zéros dans le disque fermé* $D^+(0,r)$.

* *Pour* $|a_2|_p < r < |a_3|_p$, *on a*

$$|x^3|(r) = r^3$$
$$|x - a_1|(r) = \max\{|a_1|_p, r\} = r$$
$$|x - a_2|(r) = \max\{|a_2|_p, r\} = r$$
$$|x - a_3|(r) = \max\{|a_3|_p, r\} = |a_3|_p$$
$$|x - a_4|(r) = \max\{|a_4|_p, r\} = |a_4|_p$$
$$|x - a_5|(r) = \max\{|a_5|_p, r\} = |a_5|_p$$

donc

$$|P|(r) = r^3 r^2 r |a_3|_p^3 |a_4|_p |a_5|_p^4 = A \times r^6, \text{ tel que } A = |a_3|_p^3 |a_4|_p |a_5|_p^4.$$

alors

$$\log |P|(r) = \log A + 6 \log r,$$

donc P *a six zéros dans le disque fermé* $D^+(0, r)$.

* *Pour* $r = |a_3|_p$, *on a*

$$|x^3|(r) = r^3$$
$$|x - a_1|(r) = \max\{|a_1|_p, r\} = r$$
$$|x - a_2|(r) = \max\{|a_2|_p, r\} = r$$
$$|x - a_3|(r) = \max\{|a_3|_p, r\} = r$$
$$|x - a_4|(r) = \max\{|a_4|_p, r\} = r$$
$$|x - a_5|(r) = \max\{|a_5|_p, r\} = |a_5|_p$$

donc

$$|P|(r) = r^{10} |a_5|_p^4 = A \times r^{10}, \text{ tel que } A = |a_5|_p^4.$$

alors

$$\log |P|(r) = \log A + 10 \log r,$$

donc P *a dix zéros dans le disque fermé* $D^+(0, r)$.

* *Pour* $|a_4|_p < r < |a_5|_p$, *on a*

$$|x^3|(r) = r^3$$
$$|x - a_1|(r) = \max\{|a_1|_p, r\} = r$$
$$|x - a_2|(r) = \max\{|a_2|_p, r\} = r$$
$$|x - a_3|(r) = \max\{|a_3|_p, r\} = r$$
$$|x - a_4|(r) = \max\{|a_4|_p, r\} = r$$
$$|x - a_5|(r) = \max\{|a_5|_p, r\} = |a_5|_p$$

donc

$$|P|(r_5) = r^3 r^2 r r^3 r |a_5|_p^4 = A \times r^{10},\ \textit{tel que}\ A = |a_5|_p^4.$$

alors

$$\log |P|(r) = \log A + 10 \log r,$$

donc P a dix zéros dans le disque fermé $D^+(0, r)$.

* *Pour $r = |a_5|_p$, on a*

$$|x^3|(r) = r^3$$
$$|x - a_1|(r) = \max\{|a_1|_p, r\} = r$$
$$|x - a_2|(r) = \max\{|a_2|_p, r\} = r$$
$$|x - a_3|(r) = \max\{|a_3|_p, r\} = r$$
$$|x - a_4|(r) = \max\{|a_4|_p, r\} = r$$
$$|x - a_5|(r) = \max\{|a_5|_p, r\} = r$$

donc

$$|P|(r) = r^{14}.$$

alors

$$\log |P|(r) = 14 \log r.$$

Donc P a quatorze zéros dans le disque fermé $D^+(0, r)$.

2.2 Fonctions méromorphes p-adiques

Définition 2.5. ***(Points singuliers isolés)***
On dit que le point $a \in \mathbb{C}_p$ est un point singulier isolé d'une fonction s'il existe $D^-(a, r)$ telle que f est analytique sur $D^-(a, r) - \{a\}$.

Définition 2.6. ***(Fonctions méromorphes)***
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}_p$. Une fonction f est dite méromorphe sur U s'il existe un ensemble A de points singuliers isolés dans U tel que f est analytique sur $U \backslash A$ et tel que les éléments de A soient des pôles de f.

Notation.

- $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ l'ensemble des fonctions méromorphes définies sur $\mathbb{C}_p$ (le corps des fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$).

- $\mathcal{M}(D^{-}(a,r))$ l'ensemble des fonctions méromorphes définies sur $D^{-}(a,r)$ (le corps des fractions de $\mathcal{A}(D^{-}(a,r))$).
- La valeur absolue $|\ .\ |\ (r)$ qui définie dans $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp. dans $\mathcal{A}(D^{-}(a,R))$) quand $r > 0$ (resp. $0 < r < R$) s'étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (resp. à $\mathcal{M}(D^{-}(a,r))$) on posant $|f|(r) = \dfrac{|h|(r)}{|g|(r)}$ quand $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $h, g \in \mathcal{A}(D^{-}(a,r))$).

Définition 2.7. ***(pôle d'ordre q)***
Soit f une fonction définie sur $D^{-}(a,r), 0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$ sauf au point a. On dit que f a un pôle d'ordre q au point a si la fonction $(x-a)^q f,\ x \in \mathbb{C}_p$, coïncide sur $D^{-}(a,r)-\{a\},\ 0 < r < R$ avec une fonction analytique g sur $D^{-}(a,r),\ 0 < r < R$, tel que $g(a) \neq 0$.

Remarque. Soit $f \in \mathcal{M}(D^{-}(a,r)), a \in \mathbb{C}_p$, telle que $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ et h,g $\in \mathcal{A}(D^{-}(a,r))$.

1) Les zéros de f sont des zéros de h , et les pôles de f sont des zéros de g.
2) Le nombre des pôles de f est fini dans un domaine borné.
3) Toute fonction entière $f(x)$ est une fonction méromorphe, c'est à dire $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$.
4) Tout fonction rationnelle dans $\mathbb{C}_p$ est une fonction méromorphe.
5) Une fonction méromorphe qui n'est pas une fraction rationnel est dit fonction méromorphe transcendante.

Théorème 2.6. ***(Dérivée logarithmique p-adique)***
Soit $f \in \mathcal{M}(D^{-}(a,r)), 0 < r < R$ et $a \in \mathbb{C}_p$ tel que f, f' n'ont pas de zéros communs, alors

$$\frac{|f'|(\rho)}{|f|(\rho)} \leq \frac{1}{\rho}, \forall \rho \in]0, r[$$

Preuve.
Posons $f = \dfrac{h}{g}$, oú $h, g \in \mathcal{A}(D^{-}(a,r)), 0 < r < R, a \in \mathbb{C}_p$
pour tout $\rho \in]0, r[$ on a

$$\frac{|f'|(\rho)}{|f|(\rho)} = \frac{|h'g - hg'|(\rho)}{|hg|(\rho)}$$

et comme $|.|(\rho)$ est une valeur absolue non- archimédienne on a

$$|h'g - hg'|(\rho) \leq \max\{|h'g|(\rho), |hg'|(\rho)\}, \forall \rho \in]0, r[$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{|f'|(\rho)}{|f|(\rho)} &\leq \max\left\{\frac{|h'g|(\rho)}{|hg|(\rho)}, \frac{|hg'|(\rho)}{|hg|(\rho)}\right\}, \forall \rho \in]0, r[\\ &= \max\left\{\frac{|h'|(\rho)}{|h|(\rho)}, \frac{|g'|(\rho)}{|g|(\rho)}\right\}, \forall \rho \in]0, r[\end{aligned}$$

d'après le théorème (2.2) on a

$$\frac{|h'|(\rho)}{|h|(\rho)} \leq \frac{1}{\rho} \quad et \quad \frac{|g'|(\rho)}{|g|(\rho)} \leq \frac{1}{\rho}$$

d'où

$$\frac{|f'|(\rho)}{|f|(\rho)} \leq \frac{1}{\rho}, \forall \rho \in]0, r[. \qquad \blacksquare$$

2.3 Wronskien p-adique

Définition 2.8. *Soient $f_1, \ldots, f_m$ m séries entières à coefficient dans $\mathbb{C}_p$, et $n_1, \ldots, n_m$ des entiers naturels . Nous posons $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ et $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$. Nous appellerons wronskien généralisé et noterons $w(\underline{f}, \underline{n})$ le déterminant*

$$w(\underline{f}, \underline{n}) = \begin{vmatrix} f_1^{(n_1)} & \ldots & f_1^{(n_m)} \\ f_2^{(n_1)} & \ldots & f_2^{(n_m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m^{(n_1)} & \ldots & f_m^{(n_m)} \end{vmatrix}$$

Dans le cas $m = 1$, on a $w(\underline{f}, \underline{n}) = f_1^{(n_1)}$. Comme cas particulier.

Définition 2.9. *Soient $f_1, \ldots, f_m$ m séries entières à coefficient dans $\mathbb{C}_p$. On appelons le wronskien ordinaire (appelons simplement wronskien) où $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, $\underline{q} = (0, \ldots, m-1)$ et on le note $w(\underline{f}, \underline{q})$ le déterminant*

$$w(\underline{f}, \underline{q}) = \begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_1^{(m-1)} \\ f_2 & \ldots & f_2^{(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m & \ldots & f_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

Théorème 2.7. *Soient f_1, f_2 deux séries entières à coefficient dans $\mathbb{C}_p$, de rayon de convergence au moins $\rho > 0$, et n_1, n_2 des entiers naturels, $\underline{f} = (f_1, f_2), \underline{n} = (n_1, n_2)$ et $\underline{q} = (0, 1)$. On a alors pour tout $R \in]0, \rho[$ l'inégalité :*

$$|w(\underline{f}, \underline{n})|(R) \leq \frac{|w(\underline{f}, \underline{q})|(R)}{R^{(n_1+n_2)-1}}.$$

Preuve. Soient f_1, f_2 deux séries entières dans $\mathbb{C}_p$(que l'on peut supposer pour démonter l'assertion linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$) , de rayon de convergence au moins ρ. On a l'équation différentielle vérifiée par ces deux fonctions, qui est

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \end{vmatrix} = 0$$

Elle s'écrit aussi sous la forme

$$B_2(x)y''(x) + B_1(x)y'(x) + B_0(x)y(x) = 0. \tag{2.7}$$

avec pour $\underline{f} = (f_1, f_2)$, $\underline{q_2} = (0,1)$, $\underline{q_1} = (0,2)$ et $\underline{q_0} = (1,2)$, les égalités
$B_2(x) = w(\underline{f}, \underline{q_2}) = (f_1 f_2' - f_2 f_1')(x)$, $B_1(x) = w(\underline{f}, \underline{q_1}) = -(f_1 f_2'' - f_2 f_1'')(x)$ (on voit que $-B_1$est la dérivée de B_2), et $B_0 = w(\underline{f}, \underline{q_0}) = (f_1' f_2'' - f_2' f_1'')(x)$.
On a la relation $|B_1|(R) \leq \dfrac{|B_2|(R)}{R}$ du fait que $-B_1$ est la dérivée de B_2.
En exprimant que f_1 est solution de l'équation différentielle (2.7), on trouve que

$$B_0(x) = -B_2(x)\frac{f_1''(x)}{f_1(x)} - B_1(x)\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}.$$

Il en résulte immédiatement que $|B_0|(R) \leq \dfrac{|B_2|(R)}{R^2}$ car

$$\begin{aligned} |B_0|(R) &= \Big| -(B_2\frac{f_1''}{f_1} + B_1\frac{f_1'}{f_1})\Big|(R) \\ &= \Big|B_2\frac{f_1''}{f_1} + B_1\frac{f_1'}{f_1}\Big|(R) \\ &\leq \max\Big\{\Big|B_2\frac{f_1''}{f_1}\Big|(R), \Big|B_1\frac{f_1'}{f_1}\Big|(R)\Big\}. \end{aligned}$$

Si $\max\Big\{\Big|B_2\dfrac{f_1''}{f_1}\Big|(R), \Big|B_1\dfrac{f_1'}{f_1}\Big|(R)\Big\} = \Big|B_2\dfrac{f_1''}{f_1}\Big|(R)$,
alors

$$\begin{aligned} |B_0|(R) &\leq \Big|B_2\Big|(R)\Big|\frac{f_1''}{f_1}\Big|(R) \\ &\leq \frac{|B_2|(R)}{R^2}\frac{|f_1|(R)}{|f_1|(R)} \quad . \\ &= \frac{|B_2|(R)}{R^2}. \end{aligned}$$

les mêmes étapes pour $\max\Big\{\Big|B_2\dfrac{f_1''}{f_1}\Big|(R), \Big|B_1\dfrac{f_1'}{f_1}\Big|(R)\Big\} = \Big|B_1\dfrac{f_1'}{f_1}\Big|(R)$.

On écrit maintenant l'équation différentielle sous la forme suivante :

$$y''(x) = A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) \tag{2.8}$$

avec $A_1(x) = -\dfrac{B_1(x)}{B_2(x)}$, $A_0(x) = -\dfrac{B_0(x)}{B_2(x)}$. Ce qui précède montre que $|A_1|(R) \leq \dfrac{1}{R}$ et $|A_0|(R) \leq \dfrac{1}{R^2}$ pour $R > 0$.

On exprime maintenant les dérivées n-ième d'une solution y de (2.8) sous la forme

$$y^{(n)}(x) = A_{1,n}(x)y'(x) + A_{0,n}(x)y(x).$$

On a les relations de récurrence suivantes :

$$A_{1,n+1} = A'_{1,n} + A_{1,n}A_1 + A_{0,n},$$

et

$$A_{0,n+1} = A'_{0,n} + A_{1,n}A_0.$$

En effet

pour $n = 2$ la relation elle est vrai.

On suppose la relation vrai pour n et monter pour $n + 1$.

$$\begin{aligned}
y^{(n+1)}(x) &= A'_{1,n}(x)y'(x) + A_{1,n}(x)y''(x) + A'_{0,n}(x)y(x) + A_{0,n}(x)y'(x) \\
&= A'_{1,n}(x)y'(x) + A_{1,n}[A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x)] + A'_{0,n}(x)y(x) + A_{0,n}(x)y'(x) \\
&= [A'_{1,n}(x) + A_{1,n}A_1(x) + A_{0,n}(x)]y'(x) + [A_{1,n}A_0(x) + A'_{0,n}(x)]y(x) \\
&= A_{1,n+1}(x)y'(x) + A_{0,n+1}(x)y(x).
\end{aligned}$$

Donc elle est vrai pour $n + 1$.

Montrons que $|A_{1,n}|(R) \leq \dfrac{1}{R^{n-1}}$ et $|A_{0,n}|(R) \leq \dfrac{1}{R^n}$ pour $n \geq 0$ et $R \in]0, \rho[$.

En effet, pour $n = 0$, $A_{0,0} = 1 \leq \dfrac{1}{R^0}$ et $A_{1,0} = 0 \leq R$, pour $n = 1$ $A_{1,1} = 1 \leq 1$ et $A_{0,1} = 0 \leq 1$, et pour $n = 2$, $A_{1,2} = A_1 \leq \dfrac{1}{R}$ et $A_{0,2} = A_0 \leq \dfrac{1}{R^2}$, donc elle vrai pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$.

Ensuite une récurrence facile utilisant les formules de récurrence démontre l'assertion.

On a maintenant la formule matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} f_1 & f'_1 \\ f_2 & f'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,n_1} & A_{0,n_2} \\ A_{1,n_1} & A_{1,n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1A_{0,n_1} + f'_1A_{1,n_1} & f_1A_{0,n_2} + f'_1A_{1,n_2} \\ f_2A_{0,n_1} + f'_2A_{1,n_1} & f_2A_{0,n_2} + f'_2A_{1,n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^{(n_1)} & f_1^{(n_2)} \\ f_2^{(n_1)} & f_2^{(n_2)} \end{pmatrix}$$

ce qui en prenant le déterminant, donne avec les notations $\underline{f} = (f_1, f_2), \underline{n} = (n_1, n_2)$ et $\underline{q_2} = (0, 1)$ la formule

$$w(\underline{f}, \underline{n}) = (A_{0,n_1}A_{1,n_2} - A_{0,n_2}A_{1,n_1})w(\underline{f}, \underline{q_2}).$$

Donc

$$\begin{aligned}
|w(\underline{f},\underline{n})|(R) &= \Big|(A_{0,n_1}A_{1,n_2}-A_{0,n_2}A_{1,n_1})w(\underline{f},\underline{q_2})\Big|(R)\\
&= |A_{0,n_1}A_{1,n_2}-A_{0,n_2}A_{1,n_1}|(R)|w(\underline{f},\underline{q_2})|(R)\\
&\leq \max\Big(|A_{0,n_1}A_{1,n_2}|(R),|A_{0,n_2}A_{1,n_1}|(R)\Big)|w(\underline{f},\underline{q_2})|(R).
\end{aligned}$$

Si $\max\Big(|A_{0,n_1}A_{1,n_2}|(R),|A_{0,n_2}A_{1,n_1}|(R)\Big)=|A_{0,n_1}A_{1,n_2}|(R)$,
alors

$$|w(\underline{f},\underline{n})|(R)\leq\frac{|w(\underline{f},\underline{q_2})|(R)}{R^{n_1+n_2-1}}.$$

Si $\max\Big(|A_{0,n_1}A_{1,n_2}|(R),|A_{0,n_2}A_{1,n_1}|(R)\Big)=|A_{0,n_2}A_{1,n_1}|(R)$, on a la même majorant, ce qui termine la démonstration. ■

Chapitre 3

Application du Wronskien p-adique sur les équations différentielles

Dans cette partie nous allons considérer quelque propriétés du wronskien p-adique. Puis, nous allons appliquer ces propriétés sur l'étude des équations différentielles linéaires à coefficients polynômes.

3.1 Propriétés du Wronskien p-adique

Théorème 3.1. *Soient $f_1, \ldots, f_m$ des séries entières à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de rayon de convergence au moins $\rho > 0$, et $n_1, \ldots, n_m$ des entiers naturels, $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ et $\underline{q} = (0, \ldots, m-1)$. On a alors pour tout $R \in]0, \rho[$ l'inégalité :*

$$|w(\underline{f}, \underline{n})|(R) \leq \frac{|w(\underline{f}, \underline{q})|(R)}{R^{(n_1+\ldots+n_m)-\frac{m(m-1)}{2}}}.$$

Preuve. Dans tout la suite, le réel R appartient à $]0, \rho[$.

Le cas $m = 1$.

On itère l'inégalité $|f^{(n_1)}|(R) \leq \dfrac{|f|(R)}{R^{n_1}}$, il n'y a pas de difficultés, (D'après le théorème (2.2)).

Le cas m=2.

Elle est vérifiés d'aprés la théorème 2.7.

Le cas général.

Pour prouver le cas général, nous procédons maintenant par récurrence sur m. Nous supposons donc le résultat acquis pour $k \leq m$ séries entières, et des indices quelconques. Nous nous donnons maintenant $m+1$ séries entières $f_1, \ldots, f_{m+1}$, des entièrs $n_1, \ldots, n_{m+1}$, nous posons $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_{m+1})$, $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_{m+1})$, $\underline{q} = (0, \ldots, m)$ et il nous faut donc démontrer que

$$|w(\underline{f}, \underline{n})|(R) \leq \frac{|w(\underline{f}, \underline{q})|(R)}{R^{(n_1+\ldots+n_{m+1})-\frac{m(m+1)}{2}}}.$$

On peut sans de perte de généralité supposer que $f_1, \ldots, f_{m+1}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$. Nous allons suivre essentiellement le schéma de démonstration du théorème 2.7.
Pour cela, nous écrivons l'équation différentielle vérifiée par les fonctions f_j :

$$\begin{vmatrix} y & y' & \ldots & y^{(m+1)} \\ f_1 & f_1' & \ldots & f_1^{(m+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m+1} & f_{m+1} & \ldots & f_{m+1}^{(m+1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation s'écrit sous la forme

$$B_{m+1}y^{(m+1)} + \ldots + B_0 y = 0, \tag{3.1}$$

où, on notant toujours $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_{m+1})$, $\underline{n_j} = (0, \ldots, \widehat{j}, \ldots, m+1)$, (où le terme $\widehat{j}$ est omis, n_j est donc un $m+1$ -uplet) on a au signe prés $B_j = w(\underline{f}, \underline{n_j})$, avec en particulier $B_{m+1} = w(\underline{f}, \underline{q})$, où $\underline{q} = (0, \ldots, m)$.
Nous allons démontrer que l'on a tout d'abord pour $R > 0$ et $j = 0, \ldots, m+1$

$$|B_j|(R) \leq \frac{|B_{m+1}|(R)}{R^{m+1-j}}.$$

C'est évidemment vrai si $j = m+1$. Pour $j = m$, on voit sans peine que $B'_{m+1} = B_m$, de sorte que $|B_m|(R) \leq \dfrac{|B_{m+1}|(R)}{R}$.
On procède ensuite par récurrence descendante finie sur l'indice k pour montrer l'assertion pour $k \geq 1$: On suppose le résultat acquis pour $m+1, m, \ldots, k+1$, et on le montre pour $k \geq 1$ (on peut supposer que $k \leq m-1$).
On utilise l'équation (3.1), on écrit qu'elle est vérifiée pour $f_1, \ldots, f_{k+1}$. On note E_j le premier membre de l'équation (3.1) où l'on a remplacé y par f_j. D'ou $E_j = 0$.

$$\begin{vmatrix} E_1 & f_1' & \ldots & f_1^{(k-1)} \\ E_2 & f_2' & \ldots & f_2^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{k+1} & f_{k+1} & \ldots & f_{k+1}^{(k-1)} \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{car } \ E_j = 0 \ \forall j = 1, \ldots, k+1).$$

En développant la première colonne, on trouve que l'expression (*) suivante est nulle :

$$\sum_{l=k}^{m+1} B_l w(g_k, n_{l,k})$$

où on a noté $\underline{g_k} = (f_1, \ldots, f_{k+1})$, $\underline{n_{l,k}} = (l, 0, \ldots, k-1)$.
En effet, les déterminants $w(\underline{g_k}, \underline{n_{l,k}})$ sont nuls si $l \leq k-1$, car ils ont deux colonnes égales.
On a maintenant puisque $k \leq m-1$, par l'hypothèse de récurrence sur m, que

$$|w(\underline{g_k}, \underline{n_{l,k}}|(R) \leq \frac{|w(\underline{g_k}, \underline{q_k})|(R)}{R^{l+k(k-1)/2-k(k+1)/2}} = \frac{|w(\underline{g_k}, \underline{q_k})|(R)}{R^{l-k}}.$$

avec $\underline{q_k} = (0, \ldots, k)$.
D'autre part, on a $|B_l|(R) \leq \dfrac{|B_{m+1}|(R)}{R^{m+1-l}}$ pour $l \geq k+1$. On en déduit qu'a l'expression du premier terme de l'expression (*), tous ont leur fonction module maximal majorée par l'expression

$$\frac{|B_{m+1}|(R)}{R^{m+1-l}} \frac{|w(\underline{g_k}, \underline{q_k})|(R)}{R^{l-k}} = \frac{|B_{m+1}|(R) w(\underline{g_k}, \underline{q_k})|(R)}{R^{m+1-k}}.$$

Donc il en est de même du premier terme $B_k w(g_k, n_{k,k})$ de l'expression (*), et on notant que $w(\underline{g_k}, \underline{n_{k,k}}) = \pm w(\underline{g_k}, \underline{q_k})$ et que $w(\underline{g_k}, \underline{q_k})$ est non nul,ceci prouve que

$$|B_k|(R) \leq \frac{|B_{m+1}(R)}{R^{m+1-k}}.$$

Il reste à montrer le résultat pour $k = 0$; pour cela on écrit que l'équation différentielle (3.1) est vérifiée par f_1, on exprime B_0 en fonction de f_1 et de ses dérivées, et des $B_k, k \geq 1$, et l'inégalité à prouver en résulte.
On écrit maintenant l'équation (3.1) sous la forme

$$y^{(m+1)} = A_m y^{(m)} + \ldots + A_0 y.$$

Avec $A_j = -\dfrac{B_j}{B_{m+1}}$. On a donc d'après que les A_j sont des fonctions méromorphes dans le disque $D(0, \rho)$ de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $|A_j|(R) \leq \dfrac{1}{R^{m+1-j}}$, car

$$|A_j|(R) \leq \frac{|B_j|(R)}{|B_{m+1}|(R)} \leq \frac{|B_{m+1}|(R)}{R^{m+1-j}|B_{m+1}|(R)} = \frac{1}{R^{m+1-j}}.$$

En dérivant cette égalité, on trouve que l'on a l'expression

$$y^{(n)} = A_{m,n} y^{(m)} + \ldots + A_{0,n} y,$$

où les $A_{j,n}$ sont des fonctions méromorphes dans le disque $D(0,\rho)$ de $\mathbb{C}_p$, qui vérifiant les relations :

$$A_{j,n+1} = A'_{j,n} + A_{m,n}A_j + A_{j-1,n},$$

si $j \geq 1$, et

$$A_{0,n+1} = A'_{0,n} + A_{m,n}A_0.$$

Si $j = 0$.

En effet

pour $n = m+1$ la relation elle est vrai.

On suppose la relation vrai pour n et monter pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
y^{(n+1)} &= A'_{m,n}y^{(m)} + A_{m,n}y^{(m+1)} + A'_{m-1,n}y^{(m-1)} + A_{m-1,n}y^{(m)} + \ldots + A'_{0,n}y + A_{0,n}y' \\
&= A'_{m,n}y^{(m)} + A_{m,n}[A_m y^{(m)} + \ldots + A_0 y] + A'_{m-1,n}y^{(m-1)} \\
&+ A_{m-1,n}y^{(m)} + \ldots + A'_{0,n}y + A_{0,n}y' \\
&= [A'_{m,n} + A_{m,n}A_m + A_{m-1,n}]y^{(m)} + \ldots + [A'_{0,n} + A_{m,n}A_0]y,
\end{aligned}$$

donc elle est vraie pour $n+1$. Nous voulons maintenant démontrer que $|A_{j,n}|(R) \leq \dfrac{1}{R^{n-j}}$. Pour tout j et tout n. On vérifie que c'est vrai si $n \leq m$ (on a alors $A_{j,n} = 0$, et 1 si $j = n$), c'est aussi vrai pour $n = m+1$ par ce que l'on vient de montrer sur les A_j, et on procède par récurrence sur n.

Si on suppose le résultat acquis pour n, en tenant compte que pour une fonction méromorphe f, et on a encore la formule $|f'|(R) \leq \dfrac{|f|(R)}{R}$, les relations liant les $A_{j,n+1}$ aux A_j montrent le résultat, qui est donc vrai en toute généralité.

Nous passons maintenant à la dernière partie de la démonstration, en reprenant $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_{m+1})$, $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_{m+1})$ a la formule matricielle

$$\begin{pmatrix} f_1^{(n_1)} & \ldots & f_1^{(n_{m+1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m+1}^{(n_1)} & \ldots & f_{m+1}^{(n_{m+1})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m+1} & \ldots & f_{m+1}^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,n_1} & \ldots & A_{0,n_{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m,n_1} & \ldots & A_{m,n_{m+1}} \end{pmatrix}$$

qui montre que si D est le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A_{0,n_1} & \ldots & A_{0,n_{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m,n_1} & \ldots & A_{m,n_{m+1}} \end{pmatrix}$$

on a la formule $w(\underline{f},\underline{n}) = Dw(\underline{f},\underline{q})$.

Si l' on note $a_{i,j} = A_{i-1,n_j}$, pour $1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq m+1$, le déterminant D est combinaison linéaire à coefficients ± 1 de termes de la forme $P = \Pi_{i=1}^{m+1} a_{i,\sigma(i)}$, où σ parcourt les permutations de $\{1, 2, \ldots, m+1\}$.

Par ce qui précède, on a $|a_{i,j}|(R) \leq \dfrac{1}{R^{n_j-(i-1)}}$, ce qui donne $|P|(R) \leq \dfrac{1}{R^{(n_1+\ldots+n_{m+1})-\frac{m(m+1)}{2}}}$. On a donc la même majoration pour le déterminant D, ce qui termine la démonstration du théorème. ■

Corollaire 3.1. *[4] Soient $f_1, \ldots, f_m$ des fonctions méromorphes dans un disque $D(0,\rho)$ de $\mathbb{C}_p$, et $n_1, \ldots, n_m$ des entiers naturels, $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m), \underline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ et $\underline{q} = (0, \ldots, m-1)$. On a alors pour tout $R \in]0, \rho[$ l'inégalité :*

$$|w(\underline{f},\underline{n})|(R) \leq \frac{|w(\underline{f},\underline{q})|(R)}{R^{(n_1+\ldots+n_m)-\frac{m(m-1)}{2}}}.$$

Corollaire 3.2. *[4] Soit $m \geq 1, P, \ldots, P_m$ des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, et $n_1, \ldots, n_m$ des entiers. On pose $\underline{P} = (P_1, \ldots, P_m)$, $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, et $\underline{q} = (0, \ldots, m-1)$. Soit d_1 le degré de $w(\underline{P},\underline{n})$, et d_2 le degré de $w(\underline{P},\underline{q})$ (avec la convention que le degré du polynôme nul est $-\infty$). On a alors l'inégalité :*

$$d_2 \leq d_1 - (n_1 + \ldots + n_m) + \frac{m(m-1)}{2}.$$

Théorème 3.2. *Soient $f_1, \ldots, f_m$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$, on note $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ et $\underline{q} = (0, \ldots, m-1)$. Si l'on suppose que le wronskien $w(\underline{f},\underline{q})$ de ces m fonctions est un polynôme non nul, alors toutes les fonctions f_k sont des polynômes.*

Preuve. Nous allons encore faire une récurrence sur m,

- **le cas de m=1 :** étant trivial.
- **le cas où m=2 :** On suppose donc que le wronskien de f_1 et f_2 est un polynôme non nul Q. On commence par le cas où ce polynôme est une constante. On regarde alors l'équation vérifiée par f_1 et f_2, qui est

$$B_2(x)y"(x) + B_1(x)y'(x) + B_0(x)y(x) = 0,$$

avec $B_2(x) = w(\underline{f},\underline{q}) = c \neq 0$.

On a les estimations $|B_1|(R) \leq \dfrac{|B_2|(R)}{R}$ et $|B_0|(R) \leq \dfrac{|B_2|(R)}{R^2}$; par suite

$$\lim_{R \longrightarrow +\infty} |B_1|(R) = \lim_{R \longrightarrow +\infty} |B_0|(R) = 0,$$

les deux fonctions entières B_1 et B_0 sont nulles, l'équation est $cy" = 0$, et f_1 et f_2 sont des polynômes.

On poursuit en faisant une récurrence sur le degré de Q ; on suppose le résulta acquis quand le degré de Q est $\leq h$. Supposons maintenant que le degré de Q est $h+1$.

le wronskien de f_1' et de f_2' est (au signe prés)B_0, et compte tenu de la majoration

$$|B_0|(R) \leq \frac{|B_2|(R)}{R^2},$$

et du théorème de Liouville p-adique, c'est un polynôme de degré $\leq h+1-2 = h-1$. S'il est non nul, l'hypothèse de récurrence montre que f_1' et f_2' sont des polynômes, donc aussi f_1 et f_2. S'il est nul, les fonctions f_1' et f_2' sont dépendantes, on peut supposer qu'il existe des constantes a, b telles que $f_2 = af_1 + b$, et on a $b \neq 0$ car f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes. Alors

$$B_2(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' \\ af_1 + b & af_1' \end{vmatrix} = -bf_1'(x),$$

et comme $-bf_1'$ est un polynôme, donc f_1' en est un aussi, et donc aussi f_1, puis f_2

- **Le cas général de m fonctions :**

On commence par regarder le cas où le wronskien Q est une constante non nulle. On regard l'équation différentielle vérifiée par les fonctions f_j sous la forme

$$B_m(x)y^{(m)}(x) + \ldots + B_0(x)y(x).$$

Les coefficients B_j sont des wronskiens généralisés, et comme on l'a vu dans la prouve du théorème (3.1), on a les estimations

$$|B_j|(R) \leq \frac{|B_m|(R)}{R^{m-j}} \quad \forall j = 0, \ldots, m, \ R > 0.$$

Comme les fonctions B_j s'expriment comme des polynômes en les fonctions f_k et leur dérivées, ce sont des fonctions entières dans $\mathbb{C}_p$, comme B_m est une constante,

$$\lim_{R \longrightarrow +\infty} |B_j|(R) = 0, \quad \forall j < m.$$

Donc

$$B_j = 0, \quad \forall j < m,$$

alors l'équation différentielle s'écrit $cy^{(m)} = 0$, et toutes les fonctions f_j sont des polynômes.

On procède ensuite par récurrence sur le degré de Q. Supposons le résultat acquis si le degré de Q est $\leq h$, et considérons maintenant le cas où le degré de Q est $h+1$.
Le wronskien généralisé $S = w(\underline{f}, \underline{t})$, où $t = (1, \ldots, m)$ (qui est le wronskien des dérivées des f_k) vérifie par le théorème (3.1) l'estimation

$$|S|(R) \leq \frac{|Q|(R)}{R^m}.$$

Par suite, toujours par le théorème de Liouville p-adique, S est un polynôme de degré $\leq h+1-m < h$. Si ce polynôme non nul, alors l'hypothèse de récurrence s'applique, et montre que les f'_k sont des polynômes, et c'est donc aussi le cas des f_k.
Si le polynôme S est nul, c'est que les f'_k sont dépendantes. Le rang r du système des fonctions $f'_1, \ldots, f'_m$ est donc $\leq m-1$. On peut supposer que $f'_1, \ldots, f'_r$ sont linéairement indépendantes. Alors toute dérivée f'_j s'exprime comme combinaison linéaire de $f'_1, \ldots, f'_r$, et il en résulte que toute fonction f_j est combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_r$ et de la fonction constante et égale à 1. Le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $f_1, \ldots, f_m$, qui est de dimension m, est alors inclus dans le sous-espace vectoriel engendré par $f_1, \ldots, f_r, 1$, qui est de dimension $\leq r+1$. On en déduit que $r \geq m-1$, donc finalement $r = m-1$.
On peut donc supposer que f'_m s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ des autres dérivées

$$f'_m = a_1 f'_1 + \ldots + a_{m-1} f'_{m-1},$$

et que $f'_1, \ldots, f'_{m-1}$ sont linéairement indépendantes. On en conclut que

$$f_m = a_1 f_1 + \ldots + a_{m-1} f_{m-1} + b,$$

où la constante b est non nulle puisque les f_k sont linéairement indépendantes. On a

$$\begin{vmatrix} f_1 & f'_1 & \ldots & f_1^{(m-1)} \\ f_2 & f'_2 & \ldots & f_2^{(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m-1} & f'_{m-1} & \ldots & f_{m-1}^{(m-1)} \\ f_m & f'_m & \ldots & f_m^{(m-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f'_1 & \ldots & f_1^{(m-1)} \\ f_2 & f'_2 & \ldots & f_2^{(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m-1} & f'_{m-1} & \ldots & f_{m-1}^{(m-1)} \\ \sum_1^{m-1} a_i f_i + b & \sum_1^{m-1} a_i f'_i + b & \ldots & \sum_1^{m-1} a_i f_i^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & \dots & f_1^{(m-1)} \\ f_2 & f_2' & \dots & f_2^{(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m-1} & f_{m-1}' & \dots & f_{m-1}^{(m-1)} \\ b & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{m+1} b \begin{vmatrix} f_1' & \dots & f_1^{(m-1)} \\ f_2' & \dots & f_2^{(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m-1}' & \dots & f_{m-1}^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

alors que le wronskien de $f_1, \dots, f_m$ est égal (au signe prés) à b multiplié par le wronskien de $f_1', \dots, f_{m-1}'$. Par suite, ce dernier est un polynôme non nul, et l'hypothèse de récurrence (sur m) montre que tous les f_k', $1 \leq k \leq m-1$, sont des polynômes, donc aussi les $f_k, k = 1, \dots, m-1$, c'est donc le cas aussi pour f_m, ce qui termine la démonstration. ■

Remarque. Ce théorème ne marche plus avec des fonctions méromorphes à la place des fonctions entières. Pour cela, soit g une fonction entière non nulle quelconque, et h une primitive de $g(x)^2$. On pose $f_1 = \dfrac{h}{g}$, et $f_2 = \dfrac{1}{g}$. On a alors

$$f_1' = \frac{h'g - g'h}{g^2} \quad \text{et} \quad f_2' = \frac{g'}{g^2},$$

donc

$$f_1' f_2 - f_1 f_2' = \frac{h'}{g^2} = 1.$$

Comme la fonction g est arbitraire, dans le cas méromorphe, le fait que le wronskien soit constant n'implique pas que les fonctions soient des fractions rationnelles.

3.2 Equations différentielles linéaires à coefficients polynômes.

Il est connu que si une fonction f, méromorphe dans tout $\mathbb{C}_p$, vérifie une équation différentielle à coefficients de $\overline{\mathbb{Q}}[x]$, alors f est une fraction rationnelle

Notre but est de démonter un résultat sur des fonctions méromorphes.

Théorème 3.3. *[7] Soit* $s \geq 1$, P_k, $k = 0, \ldots, s$ *des polynômes à coefficients dans* $\overline{\mathbb{Q}}$, *avec* P_s *non nul. Soit* f *une solution méromorphe dans* $\mathbb{C}_p$ *de l'équation différentielle*

$$P_s(x)y^{(s)}(x) + \ldots + P_0(x)y(x) = 0$$

Alors f *est une fraction rationnelle.*

Théorème 3.4. *[8] Il existe des solutions entières transcendantes d'équation différentielles linéaires p-adiques à coefficients polynômes.*

Proposition 3.1. *Soient* $s \geq 1$, *et* $P_0, \ldots, P_s$ *des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{C}_p$, *avec* P_s *non nul.*
Soit l'équation différentielle

$$P_s(x)y^{(s)}(x) + \ldots + P_0(x)y(x) = 0. \tag{3.2}$$

Si l'équation différentielle (3.2) *a un système complet de solutions qui sont des fonctions entières dans* $\mathbb{C}_p$, *alors toutes les solutions de* (3.2) *sont des polynômes.*

Preuve. Soit W le wronskien des solutions données $f_1, \ldots, f_s$, entières et constituant une base de l'espace des solutions. La fonction W est donc une fonction entière non nulle. On a la dérivée de W vérifie $P_sW' + P_{s-1}W = 0$ car

$$P_sW' = P_s\begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_1^{(s-2)} & f_1^{(s)} \\ f_2 & \ldots & f_2^{(s-2)} & f_2^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_s & \ldots & f_s^{(s-2)} & f_s^{(s)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_1^{(s-2)} & P_sf_1^{(s)} \\ f_2 & \ldots & f_2^{(s-2)} & P_sf_2^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_s & \ldots & f_s^{(s-2)} & P_sf_s^{(s)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_1^{(s-2)} & -\sum\limits_{i=1}^{s-1} P_if_1^{(i)} \\ f_2 & \ldots & f_2^{(s-2)} & -\sum\limits_{i=1}^{s-1} P_if_2^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_s & \ldots & f_s^{(s-2)} & -\sum\limits_{i=1}^{s-1} P_if_s^{(i)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{\prod\limits_{i=1}^{s-2} P_i}\begin{vmatrix} P_1f_1 & \ldots & P_{s-2}f_1^{(s-2)} & \sum\limits_{i=1}^{s-1} P_if_1^{(i)} \\ P_1f_2 & \ldots & P_{s-2}f_2^{(s-2)} & \sum\limits_{i=1}^{s-1} P_if_2^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_1f_s & \ldots & P_{s-2}f_s^{(s-2)} & \sum\limits_{i=1}^{s-1} P_if_s^{(i)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{\prod_{i=1}^{s-2} P_i} \begin{vmatrix} P_1 f_1 & \ldots & P_{s-2} f_1^{(s-2)} & P_{s-1} f_1^{(s-1)} \\ P_1 f_2 & \ldots & P_{s-2} f_2^{(s-2)} & P_{s-1} f_2^{(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_1 f_s & \ldots & P_{s-2} f_s^{(s-2)} & P_{s-1} f_s^{(s-1)} \end{vmatrix}$$

$$= -P_{s-1} \begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_1^{(s-2)} & f_1^{(s-1)} \\ f_2 & \ldots & f_2^{(s-2)} & f_2^{(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_s & \ldots & f_s^{(s-2)} & f_s^{(s-1)} \end{vmatrix} = -P_{s-1} W$$

- Si $P_{s-1} = 0$: on a donc $P_s W' = 0 \Longrightarrow W' = 0$, on trouve W constante non nulle, et tous les f_k sont des polynômes d'après le théorème 3.2.

- Si P_{s-1} est non nul.
  Soit T la fraction rationnelle $T = -\dfrac{P_{s-1}}{P_s} = \dfrac{W'}{W}$, qui est non nulle. En prenant le module maximum, on trouve que
  $$|T|(R) = \left|\frac{W'}{W}\right|(R) \leq \frac{1}{R},$$
  il en résulte que T possède des pôles, car autrement T serait un polynôme, donc nul par l'inégalité précédente, et on vient d'exclure ce cas.
  Dans la décomposition en éléments simples de T, il n'y a donc pas de partie entière. Comme elle est égale à $\dfrac{W'}{W}$ avec W non nulle, ses pôles sont tous simples, avec résidus dans $\mathbb{N}$. Il en résulte immédiatement que T s'écrit $\dfrac{S'}{S}$, où S est un polynôme, par suite $W = \mu_p S$ ou μ_p est une constant dans $\mathbb{C}_p$ non nulle, donc W un polynôme.

Le théorème 3.2 montre alors que tous les f_k sont des polynômes, ce qui termine la démonstration. ∎

Théorème 3.5. *Soient $s \geq 1$, et $P_0, \ldots, P_s$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, avec P_s non nul.*
Soit l'équations différentielle

$$P_s(x) y^{(s)}(x) + \ldots + P_0(x) y(x) = 0. \tag{3.3}$$

Si l'équation différentielle (3.3) *a un système complet de solutions qui sont des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}_p$, alors toutes les solutions de* (3.3) *sont des fractions rationnelles.*

Preuve. Soit y une solution méromorphe de l'équation différentielle (3.3). Si w est un pôle de y qui n'est pas un zéro de P_s, car sinon, si un pôle d'ordre N de Y, ca serait un pôle d'ordre $S+N$, qui ne pourrait pas déduit par les termes $P_k(x)y^k(x)$, où w est un pôle d'ordre inférieur. Donc tous les pôles de y sont des zéros de P_s, et par suite sont en nombre fini.

Soient $f_1, \ldots, f_s$ les solutions méromorphes linéairement indépendantes de (3.3). D'après ce qui précède, il existe un polynôme Q non nul tel que les fonctions $g_j(x) = Q(x)f_j(x)$ soient des fonctions entières. Comme les fonctions g_j sont linéairement indépendantes, et vérifient clairement une équation différentielle d'ordre s à coefficients polynômes, ce sont des polynômes par la propositionç 3.1. Il en résulte que les f_j sont des fractions rationnelles, ce qui termine la démonstration. ■

Bibliographie

[1] **Amice Y.**, *Les nombres p-adiques,* Presses Universitaires de France, Collection SUP, "Le mathématicien", 1975.

[2] **Baker A.J.**, *An introduction to p-adic numbers and p-adic analysis*, Departement of mathematics, University of Glasgow, G128QW, Scotland, (2004).

[3] **Bézévin J.P.**, *Dynamique des fractions rationnelles p-adiques*, DEA de mathématique, Université de Caen , (23 mai 2005).

[4] **Bézivin J.P.**,*Wronskien et équations différentielles p-adiques.* Acta Arithmetica 158 no 1 (2013), pp.61-pp.78.

[5] **Boussaf K., J. Ojeda and A.Escassut**, *Zeros of the derivative of a p-adique meromorphic funtion and applications*, Preprint 2011.

[6] **Boutabaa A.**, *Théorie de Nevanlinna p-adique*, Manuscripta Math.67, 251- 269 (1990).

[7] **Boutabaa A.**, *On some p-adic functional equations*, Lecture Notes in Pure and applied Mathematics, 192, Marcel Dekker, 1997,49-59.

[8] **Boutabaa A.**, *A note on p-adic linear differential equations*, J of Number theory, 87, (2001), 301-305.

[9] **Escassut A.**, *Analytic Elements in p-adique Analysis, Word scientific puplishing*(1995).

[10] **Escassut A. and J.Ojeda.** *Exceptional values of p-adique analytic fonctions and derivations, Complex variable and elliptic equations*, 56, no 1-4, (2011), 263-269

[11] **Hayman W.K.**, *Meromorphic functions*, Clarendon press, Oxford, (1964).

[12] **Katok S.**, *Real and p-adic analysis*, Course notes for MATH 497,C mass program, FallL 2000, (2001).

[13] **Koblitz N.**, p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions, springer-Verlag (1984).