République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel-

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Dérivation fractionnaire et applications aux inclusions différentielles

Présenté par :

Tamouza Aicha.

Younes Selma.

Devant le jury :

Président	: D. Azzam-Laouir	Prof. Université de Jijel
Encadreur	: F. Aliouane	M.C.B. Université de Jijel
Examinateur	: M. Benguessoum	M.A.A. Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, louange à **Dieu** qui nous a guidé et donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Nous remercions chaleureusement notre encadreur **Mlle Fatine Aliouane** pour la pertinence de ses remarques et sa patience durant la réalisation de ce travail. Nous admirons beaucoup son sérieux et sa manière de diriger qui furent pour nous une grande source d'inspiration et de motivation.

Nous adressons également nos vifs remerciements à **Mme Dalila Azzam-Laouir** d'avoir présidé le jury de soutenance.

Nous remercions l'examinatrice **Mme Messaouda Benguessoum** pour avoir accepter d'être membre de ce jury.

Nous voulons aussi remercier tous les enseignants qui ont contribué à notre formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématiques.

Enfin, nous tenons à remercier très sincèrement tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur. Celui qui n'a pas pu voir l'aboutissement de ce travail. Je sais que tu aurais pu être fière de moi. Que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi **mon père**.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, **maman** que j'adore.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à tous mes très chers frères : **Karim, Abd Elbaki, Youcef et leurs femmes.** A **Ali, Mohammed, Abd Elmalek**, sans oublier les petits **Mehdi et Ritadj**.

A mes tantes, mes oncles et leurs enfants. A ma chère amie et binôme **Selma**, toutes mes amies, notamment : **Khaoula, Khadija, Rachda, Nadira, Salima, Meriem, Lamia et Fatima.** Elles n'ont cessé de consentir pour moi, par leur encouragement et leur profonde affection. Qu'elles m'ont donné l'avantage de me consacrer entièrement et uniquement à mes études. Je vous souhaite du fond de mon cœur une belle vie pleine de joie, de bonheur et de succès. A toute personne que j'ai une place dans son cœur que je connais, j'estime et j'aime.

Tamouza Aicha

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes chers **parents**, aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être. Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours. Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.

A mes chers frères **Mohammed, Wail** et **Hosni** pour leur appui et leurs encouragements.

A mon fiancé **Lamine** pour ses précieux encouragements.

A mes oncles, tantes, cousins et cousines. En particulier **Lile Bardisse**, ma plus grande source de bonheur, j'espère que la vie lui réserve le meilleur.
A toute ma famille pour son soutien tout au long de mon parcours universitaire.
A ma chère binôme **Aicha** et sa famille. A mes amies qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

Younes Selma

Table des matières

Notations

Espaces

$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{N}^*$	L'ensemble des nombres naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	L'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
$[a,b]$	Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b.
$\big(T,\Sigma\big)$	Espace mesurable.
(T,Σ,μ)	Espace mesuré.
(X,d)	Espace métrique.
$\mathcal{B}(X)$	Tribu borélienne.
$L^p\big([a,b],\mathbb{R}\big)$	L'ensemble $\{f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ mesurable, $\|f\|_p<+\infty\}$ muni de la norme $\|f\|_p=\left(\int_{[a,b]}\|f(t)\|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}$.
$L^\infty\big([a,b],\mathbb{R}\big)$	L'ensemble $\{f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ mesurable, $\|f\|_\infty<+\infty\}$ muni de la norme $\|f\|_\infty=\inf\{c\geq 0\ /\|f(x)\|\leq c\ \mu-p.p.\}$.
$C\big([a,b]\big)$	L'espace des fonctions continues sur [a,b].
$C^n\big([a,b]\big)$	L'espace des fonctions continument différentiables sur [a,b].
$AC\big([a,b]\big)$	Espace des fonctions absoluments continues sur [a,b].

Symboles et fonctions

$\mathcal{R}e(z)$	Partie réelle d'un nombre complexe z.
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$	Ensemble des parties de $\mathbb{R}$.
$\dfrac{df}{dx}$ où f'	Dérivée d'une fonction f.
$\dfrac{d^n f}{dx^n}$ où $f^{(n)}(\cdot)$	Dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.
$\big(I_a^\alpha f\big)(x)$	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f au point x.
$\big(\mathrm{D}_a^\alpha f\big)(x)$	Dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville d'ordre α de la fonction f au point x.
$\big({}^c\mathrm{D}_a^\alpha f\big)(x)$	Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction f au point x.
$\mathcal{L}\big\{;s\big\}$	Transformée de Laplace.
$\mathcal{L}^{-1}\big\{.;x\big\}$	Transformée inverse de Laplace.
Γ	Fonction Gamma.
β	Fonction bêta.
$E_{\alpha,\gamma}$	Fonction de Mittage-Leffler.

Distances

Soient A et B deux sous ensemble de X,

$\overline{B}(0,r)$	Boule fermée de centre 0 et le rayon r.
$d(x,A)$	Distance entre x et l'ensemble $A \subset X$ définie par $d(x,A) = \inf\limits_{y\in A} \\|x-y\\|$.
$e(A,B)$	Ecart entre A et B défini par $e(A,B) = \sup\limits_{x\in A} d(x,B)$.
$\mathcal{H}(A,B)$	Distance de Hausdorff entre l'ensemble A et B donnée par $\mathcal{H}(A,B) = \max\big(e(A,B), e(B,A)\big)$.

Introduction

Le calcul fractionnaire est une théorie des intégrales et des dérivées d'ordre réel arbitraire ou même complexe. C'est une généralisation du calcul classique et par conséquent préserve beaucoup des propriétés de base. En tant que zone de développement intensif du calcul au cours des deux dernières décennies, elle offre de formidables nouvelles caractéristiques de la recherche et devient ainsi de plus en plus utilisée dans diverses applications.

Le terme calcul fractionnaire a plus de 300 ans. Le sujet est aussi vieux que le calcul de la différenciation et remonte à des temps où Leibniz, Gauss et Newton ont inventé ce genre de calcul. Dans une lettre adressée à L'Hôpital en 1695, Leibniz a posé la question suivante (Miller et Ross 1993 [22]) : " Peut le sens de dérivées avec ordres entiers se généralisent aux dérivées avec des ordres non entiers." L'histoire raconte que L'Hôpital était quelque peu curieux à propos de cette question et a répondu par une autre question à Leibniz : "Et si la commande sera de $1/2$?" Dans une lettre datée du 30 septembre 1695, Leibniz répond : "Cela conduira à un paradoxe, dont un jour des conséquences utiles seront tirées." La question soulevée par Leibniz pour une dérivée fractionnaire était un sujet récurrent au cours des 300 dernières années.
Les mathématiciens ont contribué à ce sujet au fil des années : Laplace (1812), Fourier (1822), Abel (1823-1826), Liouville (1832-1837), Riemann (1847), Grünwald (1867-1872), Letnikov (1868-1872), Heaviside (1892-1912), Weyl (1917) et

Erdélyi (1939-1965) et plusieurs (Voir Gorenflo and Mainardi [15]) ont apporté des contributions majeures à la théorie du calcul fractionnaire. La première conférence spécialisée sur le calcul fractionnaire et ses applications en 1974 à l'université de New Haven, aux états-Unis, initie les livres les plus récents de (Miller and Ross [22], Podlubny [26], etc).

Les dérivées d'ordre entier ont une interprétation physique claire et sont utilisées pour décrire différents concepts en physique classique. Par exemple, la position d'un objet en mouvement peut être représentée en fonction du temps, la vitesse de l'objet est alors la dérivée première de la fonction, l'accélération est la dérivée seconde et ainsi de suite. Les dérivées et les intégrales fractionnaires, étant la généralisation des dérivées et des intégrales classiques, devraient avoir une signification encore plus large. Malheureusement, il n'y a pas de résultat dans la littérature jusqu'à maintenant. Certains auteurs (Moshrefi-Torbati and Hammond [23]) considèrent les opérateurs fractionnaires comme des filtres linéaires et cherchent aussi l'interprétation géométrique des opérateurs fractionnaires dans la géométrie fractale, dont la géométrie classique est une sous-classe. Un autre auteur (Podlubny [27]) fournit une interprétation physique de l'intégration fractionnaire en fonction de deux échelles de temps différents, à savoir l'échelle homogène, à débit équilibré et l'échelle de temps inhomogène.

La première application d'une semi-dérivée (dérivée d'ordre $1/2$) est faite par Abel en 1823 (voir [22]). Cette application du calcul fractionnaire est en relation avec la solution de l'équation intégrale pour le problème de la tautochrone. Ce problème concerne la détermination de la forme de la courbe telle que le temps de descente de la masse ponctuelle sans frottement glisse le long de la courbe sous l'action de la gravité indépendamment du point de départ.

Les dernières décennies prouvent que les dérivés et les intégrales d'ordre arbitraire sont très commodes pour décrire les propriétés des matériaux réels, par exemple les polymères. Les nouveaux modèles d'ordre fractionnaire sont plus satisfaisants que les anciens modèles d'ordre entier. Les dérivées fractionnaires sont un excellent outil pour décrire la mémoire et les propriétés héréditaires de divers matériaux et processus alors que dans des modèles d'ordre entier, ces effets sont négligés. Le calcul fractionnaire trouve aussi des applications dans différents domaines de la science, y compris la théorie des fractales, l'analyse numérique, la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie et la finance. Certaines propriétés de la visco-élasticité sont formulées et résolues par M. Caputo avec sa propre définition de la différenciation fractionnaire. Les intégrales et les dérivées fractionnaires apparaissent aussi dans la théorie du contrôle des systèmes dynamiques pour la description du système contrôlé et les équations différentielles fractionnaires contrôlées.

Il existe deux approches du calcul fractionnaire, à savoir les approches continue et discrète. L'approche continue est basée sur l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, qui a comme point de départ la formule intégrale de Cauchy. L'approche discrète est basée sur les dérivées fractionnaires de Grunwald-Letnikov (Plus sur l'approche de Grunwald-Letnikov peut être trouvé dans le papier de Gorenflo et Mainardi [15] et le livre de Podlubny [26]).

Ce travail est principalement répartie en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous présentons certains résultats de base qui concernent des fonctions spéciales entre autre fonction Gamma, bêta et la fonction Mettag-Laffler, les fonctions absolument continues. Ainsi que quelques notions sur les multi-applications mesurables qui nous seront utiles dans le deuxième chapitre, où on s'intéresse à l'étude des propriétés principales des intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo. On termine par donner quelques exemples de résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Enfin, le troisième chapitre est consacré à l'étude d'une inclusion différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites. Autrement dit, on se focalise à traiter le problème suivant ([9])

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\mathrm{D}_a^{\alpha}x(t) \in F(t,x(t)) \qquad p.p.\ t \in [0,1], \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous citons des notions d'analyse multivoque. D'abord, nous présentons quelques fonctions spéciales qui sont fréquemment utilisées pour définir les intégrales et les dérivées fractionnaires.

1.1 Applications absolument continues

Définition 1.1. *[10] Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow E$ est dite absolument continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k - a_k) < \delta$$

on a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f(b_k) - f(a_k)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.2. *[10] Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$ est absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée i.e.,*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f^{'}(t)dt.$$

Remarque 1.3. *[10]*

- *Une fonction absolument continue est continue.*
- *Si f est absolument continue, il existe une fonction Lebesgue intégrable g sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$,*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt.$$

L'espace de toutes les fonctions absolument continues définies sur $[a, b]$ est notée $\mathrm{AC}\big([a, b]\big)$.

Définition 1.4. *[20] Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $AC^m\big([a, b]\big)$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(m-1)$ continues sur $[a, b]$ telles que $f^{(m-1)} \in AC\big([a, b]\big)$ c'est à dire*

$$AC^m\big([a, b]\big) = \big\{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ et } f^{m-1} \in AC\big([a, b]\big)\big\}. \tag{1.1}$$

En particulier,

$$AC^1\big([a, b]\big) = AC\big([a, b]\big).$$

Définition 1.5 (Fonction localement intégrable). *[10]*
Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite localement intégrable si sa restriction à tout segment $[a, b]$ est intégrable, c'est à dire si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge pour tout couple de réels (a, b) avec $a < b$.
On a toute fonction continue est localement intégrable.

1.2 Fonctions spéciales

Le nombre "factoriel z" défini par $z! = z(z-1)...1$, ne semble pas pouvoir exister pour un z autre qu'entier. Existe-il une fonction qui prolonge la notion du factoriel aux réels, et aux complexes ?

En 1729, Euler a introduit la fonction Gamma notée Γ, qui intervient dans le calcul de nombreuses transformées de Laplace.

Plus que 70 ans avant Euler, Wallis a tenté de calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-z^2}dz = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-z)^{1/2}(1+z)^{1/2}.$$

Puisque cette intégrale donne l'air d'un quart de cercle. Le but de Wallis était d'obtenir une expression de π. La seule intégrale qu'il a pu évoluer était

$$\int_0^1 z^p(1-z)^q dz,$$

où p et q sont des entiers avec $q = 0$ et p est rationnel.

Ce résultat a conduit Euler à considérer la relation entre la fonction Gamma et l'intégrale de la forme

$$\int_0^1 z^p(1-z)^q dz$$

où p et q ne sont nécessairement pas entiers.
Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [3]

Lemme 1.6. *Soit z un nombre complexe. La fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si $\mathcal{R}e(z) > 0$.*

Définition 1.7 (Fonction Gamma).
Pour tout nombre z tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$, on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{1.2}$$

Cette fonction est appelée "fonction Gamma d'Euler".

Remarque 1.8. *La fonction Γ ne s'annule pas sur $\{z \in \mathbb{C}/\ \mathcal{R}e(z) > 0\}$.*

En utilisant la méthode d'intégration par parties, on aura le lemme suivant

Lemme 1.9. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$, nous avons*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{1.3}$$

et plus généralement, nous avons

$$\Gamma(z+n+1) = \prod_{0 \leq j \leq n} (z+j)\Gamma(z). \tag{1.4}$$

Lemme 1.10. *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{1.5}$$

Cas particuliers.

$$\Gamma(1) = 1.$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Définition 1.11 (**Fonction bêta**).
Soient p, $q \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{R}e(p) > 0$ et $\mathcal{R}e(q) > 0$, on définit la fonction bêta par

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \tag{1.6}$$

Remarque 1.12. *Par le changement de variable $y = 1-t$, on remarque que*

$$\beta(p,q) = \beta(q,p). \tag{1.7}$$

Théorème 1.13. *Soient $p, q \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{R}e(p) > 0$ et $\mathcal{R}e(q) > 0$, on a*

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.8}$$

Définition 1.14 (**Fonction de Mittag-Leffler**). *[32]*
Soit $z \in \mathbb{C}$. La fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie comme suit

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \; \alpha > 0. \tag{1.9}$$

La fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\gamma}(z)$ est donnée par

$$E_{\alpha,\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\gamma)}, \; \alpha > 0 \text{ et } \gamma > 0. \tag{1.10}$$

Exemple 1.15. *Pour des valeurs spéciales de α et γ on a*
1) $E_1(z) = E_{1,1}(z) = \exp(z)$.
2) $E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\big(\exp(z) - 1\big)$.

1.3 Notions sur les multi-applications

Définition 1.16. *[10] Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle multi-application définie sur X à valeurs dans Y toute application F définie sur X à valeurs dans $\mathcal{P}(Y)$ et on note $F : X \rightrightarrows Y$. Alors, pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un sous ensemble de Y.*
Le domaine de F noté par $dom(F)$ est défini par

$$dom(F) = \{x \in X / F(x) \neq \varnothing\}.$$

Remarque 1.17. *[10] Si D est un sous ensemble de X, on appelle $F(D)$ l'image de D par F qu'on définit par*

$$F(D) = \bigcup_{x \in D} F(x).$$

Définition 1.18. *[10] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application et soit V un ouvert de Y.*
• *On appelle image réciproque large de V qu'on note par $F^{-1}(V)$ le sous ensemble de X défini par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \bigcap V \neq \varnothing\}.$$

• *On appelle image réciproque étroite de V qu'on note par $F_+^{-1}(V)$ le sous ensemble de X défini par*

$$F_+^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \subseteq V\}.$$

Définition 1.19. *[9] Soit (X, d) un espace métrique et considérons la multi-application définie de T dans X à valeurs non vides fermées. On dit que T est une λ-contraction s'il existe $0 < \lambda < 1$ tel que pour tous x, $y \in X$*

$$\mathcal{H}(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

1.4 Les multi-applications mesurables

Définition 1.20. *[5] Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $F : T \rightrightarrows X$ un multi-application.*
On dit que F est Σ-mesurable si et seulement si pour tout ouvert V de X,
$F^{-1}(V) \in \Sigma$.

Proposition 1.21. *[5] Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes*
1) F est Σ-mesurable.
2) Pour chaque $x \in X$, la fonction

$$\begin{aligned} g_x : T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ T &\longrightarrow d(x, F(t)) \ est\ \Sigma - mesurable. \end{aligned}$$

Théorème 1.22. *[5] Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré avec μ σ-finie, on suppose que Σ est μ-complète et X un espace métrique séparable.*
Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées, alors les assertions suivante sont équivalentes
1) F est Σ-mesurable.
2) $gph(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.
3) $F^{-1}(B) \in \Sigma$, pour tout borélien B de X.
4) $F^{-1}(C) \in \Sigma$, pour tout fermé C de X.

Proposition 1.23. *[8]*

• *Si* Γ_1 *et* Γ_2 *sont des multi-applications mesurables à valeurs non vides compactes, la multi-application* $t \longmapsto \Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t)$ *est mesurable.*

• *Si* $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de multi-applications mesurables à valeurs non vides compactes, alors* $t \longmapsto \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n(t)$ *est mesurable, et si* $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n(t)}$ *est compact,*
la multi-application $t \longmapsto \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n(t)}$ *est mesurable.*

Définition 1.24. *[5] Soit* (T, Σ) *une espace mesurable et soit* $F : T \rightrightarrows X$ *une multi-application. On dit que l'application* $f : T \longrightarrow X$ *est une sélection de* F *si et seulement si* $f(t) \in F(t)$*, pour tout* $t \in T$.

Théorème 1.25. *[5] Soient* (T, Σ) *une espace mesurable,* (X, d) *un espace métrique complet séparable et soit* $F : T \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides fermées. Si* F *est* $\Sigma-$ *mesurable alors, elle admet une sélection* $\Sigma-$ *mesurable i.e., pour tout* $x \in dom(F)$, $f(x) \in F(x)$.

Théorème 1.26. *[8]*

Soit (T, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique séparable et* $F : T \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides.*
Si F *est mesurable, alors* F *admet une suite de sélections mesurables* (σ_n) *telle que* $F(t) = \{\overline{\sigma_n(t)}\}_n$.

Chapitre 2

Intégrales et Dérivées Fractionnaires

2.1 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

Dans ce chapitre, nous regardons la définition des intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ainsi que ceux de Caputo. Nous décrivons un certain nombre de leurs propriétés principales et on montre en particulier la relation entre ces deux notions. Nous terminons par la résolution de quelques équations différentelles d'ordre fractionnaire tout en évoquant la transformée de Laplace des dérivées de Riemann-Liouville.

Définition 2.1. *[18] Soit $f \in L^1\big([a,b]\big)$, les intégrales de Riemann-Liouville (en abrégé R.L.) à droite (resp. à gauche) d'ordre $\alpha > 0$ notées $I^\alpha_{a^+}f$ (resp. $I^\alpha_{b^-}f$) sont définies par*

$$\big(I^\alpha_{a^+}f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\ \ x > a \tag{2.1}$$

$$\big(I^\alpha_{b^-}f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt,\ \ x < b. \tag{2.2}$$

Dans la suite, on va opter pour l'équation (2.1) et on note $I^\alpha_a f$ au lieu de $I^\alpha_{a^+}f$.

Théorème 2.2 (Existence de l'intégrale). *[31]*
Si $f \in L^1\big([a,b]\big)$ et $\alpha > 0$, alors $(I_a^\alpha f)(x)$ existe pour tout $x \in]a,b]$ et on a

$$I_a^\alpha f \in L^1\big([a,b]\big).$$

Démonstration.
Soit $x \in [a,b]$, on a

$$\begin{aligned}\int_a^x \big|(x-t)^{\alpha-1} f(t)\big| dt &\leq \int_a^x (x-a)^{\alpha-1} \big|f(t)\big| dt \\ &= (x-a)^{\alpha-1} \int_a^x \big|f(t)\big| dt \\ &\leq (x-a)^{\alpha-1} \|f\|_1 < +\infty, \; si \; x \in]a,b].\end{aligned}$$

Donc $\big(I_a^\alpha f\big)(x)$ existe presque partout sur $[a,b]$.
En utilisant la définition (2.1) puis le théorème de Fubini, on trouve

$$\begin{aligned}\int_a^b \big|(I_a^\alpha f)(x)\big| dx &= \int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \big|f(t)\big| dt dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \big|f(t)\big| dt dx.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b \big|(I_a^\alpha f)(x)\big| dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_t^b |x-t|^{\alpha-1} \big|f(t)\big| dx dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \big|f(t)\big| \left[\int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx \right] dt.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $x = t+y(b-t)$ et moyennant la relation (1.8) $\big($sachant que $\Gamma(1) = 1\big)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big|(I_a^\alpha f)(x)\big|dx &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \big|f(t)\big| \bigg[\int_0^1 y^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}(b-t)dy\bigg]dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \big|f(t)\big| \bigg[\int_0^1 y^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha}dy\bigg]dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \big|f(t)\big|(b-t)^\alpha \bigg[\int_0^1 y^{\alpha-1}dy\bigg]dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \big|f(t)\big|(b-t)^\alpha \beta(\alpha,1)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \big|f(t)\big|(b-t)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}dt
\end{aligned}$$

$$\int_a^b \big|(I_a^\alpha f)(x)\big|dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b \big|f(t)\big|(b-t)^\alpha dt.$$

D'où

$$\int_a^b \big|I_a^\alpha f)(x)\big|dx \le \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b \big|f(t)\big|dt,$$

et puisque $f \in L^1\big([a,b]\big)$, on déduit que

$$\int_a^b \big|(I_a^\alpha f)(x)\big|dx < +\infty,$$

i.e. $I_a^\alpha f \in L^1([a,b])$. ■

Exemple 2.3.

Soit $f(x) = c$, on a

$$\begin{aligned}
\big(I_a^\alpha f\big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt.
\end{aligned}$$

Par le changement de variable $t = a + s(x-a)$, *on trouve*

$$\begin{aligned}
\big(I_a^\alpha f\big)(x) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \big(x-a-s(x-a)\big)^{\alpha-1}(x-a)ds \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^\alpha (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \beta(1,\alpha) \\
&= \frac{c(x-a)^\alpha \Gamma(1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.4.

Soient $\alpha > 0$, $\gamma > -1$ *et* $f(x) = (x-a)^\gamma$ *alors,*

$$\begin{aligned}
\big(I_a^\alpha f\big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\gamma dt.
\end{aligned}$$

Posons $t = a + s(x-a)$, *nous arrivons à*

$$\begin{aligned}
\big(I_a^\alpha f\big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \big(x-a-s(x-a)\big)^{\alpha-1} \big(a+s(x-a)-a\big)^\gamma (x-a)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \big((x-a)(1-s)\big)^{\alpha-1} s^\gamma (x-a)^\gamma (x-a) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1}(x-a)^{\gamma+1} \int_0^1 s^\gamma (1-s)^{\alpha-1} ds.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de la fonction bêta et de la relation (1.8), il vient que

$$\big(I_a^\alpha f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\gamma} \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma+1+\alpha)}$$

d'où

$$\big(I_a^\alpha f\big)(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+\alpha)} (x-a)^{\alpha+\gamma}.$$

Exemple 2.5.

Soit $f(x) = x^\gamma$ *avec* $\gamma > -1$. *On a*

$$\big(I_a^\alpha f\big)(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+\alpha)} x^{\alpha+\gamma}.$$

Théorème 2.6. *[30] Soient* α, $\gamma > 0$, *pour toute fonction* $f \in L^1\big([a,b]\big)$. *On a*

$$I_a^\alpha\big(I_a^\gamma f\big) = I_a^{\alpha+\gamma} f = I_a^\gamma\big(I_a^\alpha f\big) \tag{2.3}$$

pour presque tout $x \in [a,b]$. *Si de plus* $f \in C([a,b])$, *alors cette identité est vraie pour tout* $x \in [a,b]$.

Démonstration.

Supposons d'abord que $f \in L^1\big([a,b]\big)$, on a

$$\begin{aligned}
\big[I_a^\alpha(I_a^\gamma f)\big](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (I_a^\gamma f)(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t (t-y)^{\gamma-1} f(y) dy dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-y)^{\gamma-1} f(y) dy dt.
\end{aligned}$$

Les deux intégrales figurant dans cette dernière égalité existent (en vertu du Théorème 2.2) pour presque tout $x \in [a,b]$, et le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\big[I_a^\alpha(I_a^\gamma f)\big](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-y)^{\gamma-1} f(y) dy dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x \int_y^x (x-t)^{\alpha-1} (t-y)^{\gamma-1} f(y) dt dy.
\end{aligned}$$

Posons $t = y + s(x-y)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\big[I_a^\alpha(I_a^\gamma f)\big](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}\int_a^x\int_0^1 (x-y)^{\alpha+\gamma-1}(1-s)^{\alpha-1}s^{\gamma-1}f(y)dsdy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}\int_a^x (x-y)^{\alpha+\gamma-1}f(y)\int_0^1 s^{\gamma-1}(1-s)^{\alpha-1}dsdy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}\int_a^x (x-y)^{\alpha+\gamma-1}f(y)\beta(\gamma,\alpha)dy \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_a^x (x-y)^{\alpha+\gamma-1}f(y)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_a^x (x-y)^{\alpha+\gamma-1}f(y)dy \\
&= \big(I_a^{\alpha+\gamma}f\big)(x).
\end{aligned}$$

Si $f \in C([a,b])$, en utilisant la densité de $C\big([a,b]\big)$ dans $L^1\big([a,b]\big)$, la relation (2.3) reste vraie. ■

Remarque 2.7. *[2]*
1) La relation (2.1) peut s'écrire en posant $t' = x - t$ sous la forme

$$\big(I_a^\alpha f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} t^{\alpha-1}f(x-t)dt. \tag{2.4}$$

2) Nous avons

$$\big(I_a^\alpha f\big)(x+h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}f(t)dt.$$

Posons $t = h + u$, par suite

$$\begin{aligned}
\big(I_a^\alpha f\big)(x+h) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a-h}^{x}(x-u)^{\alpha-1}f(h+u)du \\
&= \big(I_{a-h}^\alpha f\big)(x+h).
\end{aligned}$$

Proposition 2.8. *[2, 6]*

Soit $f \in C\big([a,b]\big)$, et soient α, $\gamma > 0$. On a pour tout $x \in [a,b]$

1)

$$\lim_{\alpha\to 0}(I_a^\alpha f)(x) = f(x). \tag{2.5}$$

2) Si $p < \gamma$, alors

$$\frac{d^p}{dx^p}\big(I_a^\gamma f\big)(x) = \big(I_a^{\gamma-p} f\big)(x). \tag{2.6}$$

Démonstration.

1) Par la relation (2.1), on a pour $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
\left|\big(I_a^\alpha f\big)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(x)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(x)dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\big(f(t)-f(x)\big)dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\big|f(t)-f(x)\big|dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1}\big|f(t)-f(x)\big|dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1}\big|f(t)-f(x)\big|dt.
\end{aligned}$$

Puisque $f \in C\big([a,b]\big)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\left|\big(I_a^\alpha f\big)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(x)\right| &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1}\big(\big|f(t)\big| + \big|f(x)\big|\big)dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1}\big|f(t)-f(x)\big|dt \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1}\big(\big|f(t)\big| + \big|f(x)\big|\big)dt \\
&+ \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1}dt,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\left(I_a^\alpha f\right)(x)-\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(x)\right| &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta}(x-t)^{\alpha-1}\left(\sup_{t\in[a,x-\delta]}|f(t)|+\sup_{x\in[a,x-\delta]}|f(x)|\right)dt\\ &+\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\delta}^{x}(x-t)^{\alpha-1}dt\\ &=\frac{2M}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(-\delta^\alpha+(x-a)^\alpha\right)+\frac{\varepsilon}{\alpha\Gamma(\alpha)}\delta^\alpha\\ &=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(2M\big((x-a)^\alpha-\delta^\alpha\big)+\varepsilon\delta^\alpha\right),\end{aligned}$$

où $M=\sup_{x\in[a,x-\delta]}|f(x)|$, donc lorsque $\alpha\longrightarrow 0$, on trouve

$$\lim_{\alpha\to 0}\left|\left(I_a^\alpha f\right)(x)-\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(x)\right|\leqslant \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(2M\big((x-a)^\alpha-\delta^\alpha\big)+\varepsilon\delta^\alpha\right).$$

Par conséquent,

$$\left|\lim_{\alpha\to 0}\left(I_a^\alpha f\right)(x)-\lim_{\alpha\to 0}\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(x)\right|\leqslant\varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(I_a^\alpha f\right)(x)=f(x).$$

2) Nous avons, par le théorème des intégrales paramétrées

$$\begin{aligned}\frac{d^p}{dx^p}\left(I_a^\gamma f\right)(x) &= \frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x (x-t)^{\gamma-1}f(t)dt\right)\\ &=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x\frac{d^p}{dx^p}(x-t)^{\gamma-1}f(t)dt.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Or l'équation fonctionnelle (1.3) donne

$$\begin{aligned}\Gamma(\gamma)&=(\gamma-1)\Gamma(\gamma-1)\\ &=(\gamma-1)(\gamma-2)\Gamma(\gamma-2)\\ &=(\gamma-1)(\gamma-2)...(\gamma-p)\Gamma(\gamma-p).\end{aligned}$$

Par itération sur p, on trouve aisément que (puisque $p<\gamma$,)

$$\frac{d^p}{dx^p}\left(x-t\right)^{\gamma-1}=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}(x-t)^{\gamma-p-1}.$$

Revenons à l'équation (2.7), on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d^p}{dx^p}\Big(I_a^{\gamma} f\Big)(x) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)\Gamma(\gamma)}\int_a^x (x-t)^{\gamma-p-1} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma-p)}\int_a^x (x-t)^{\gamma-p-1} f(t)dt \\
&= \big(I_a^{\gamma-p} f\big)(x).
\end{aligned}$$

■

Exemple 2.9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\exp(kx)$, $k>0$. On a par la relation (2.1)

$$\big(I_{-\infty}^{\alpha} f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x (x-u)^{\alpha-1}\exp(ku)du.$$

Posons $t=x-u$,

$$\begin{aligned}
\big(I_{-\infty}^{\alpha} f\big)(x) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}\int_{+\infty}^0 t^{\alpha-1}\exp\big(k(x-t)\big)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\exp\big(k(x-t)\ big)dt \\
&= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\exp(-kt)dt.
\end{aligned}$$

Maintenant pour $y=kt$, on aura

$$\begin{aligned}
\big(I_{-\infty}^{\alpha} f\big)(x) &= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{k}\right)^{\alpha-1}\exp(-y)\frac{1}{k}dy \\
&= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\frac{1}{k^{\alpha-1}k}\exp(-y)dy \\
&= k^{-\alpha}\frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\exp(-y)dy \\
&= k^{-\alpha}\frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha) \\
&= k^{-\alpha}\exp(kx).
\end{aligned}$$

Remarque 2.10. *[6] Nous avons, pour tout $x \in [a, b]$*

$$\begin{aligned}
\left(I_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dt}\left(\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha}\right) f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\left(\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha}\right) f(t)\right]_a^x - \int_a^x \left(\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha}\right) f^{'}(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha f(a) + \left(I_a^{\alpha+1} f^{'}\right)(x). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

D'où l'en déduit

Pour $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned}
\left(I_a^0 f\right)(x) &= f(a) + \left(I_a^1 f^{'}\right)(x) \\
&= f(a) + \int_a^x f^{'}(t)dt \\
&= f(x). \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = -1$,

$$\begin{aligned}
\left(I_a^{-1} f\right)(x) &= f^{'}(x) \\
&= \frac{d}{dx} f(x),
\end{aligned}$$

i.e.

$$I_a^{-1} f = \frac{df}{dx}.$$

Proposition 2.11. *[2] Soit r un entier naturel et supposons que $f^{(r)}$ est intégrable alors,*

$$f^{(r-1)}(x) = \left(I_a^1 f^{(r)}\right)(x) + f^{(r-1)}(a). \qquad (2.10)$$

$$f(x) = \left(I_a^r f^{(r)}\right)(x) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a). \qquad (2.11)$$

Démonstration.

1) Soit r un entier naturel et supposons que $f^{(r)}$ est intégrable, on a (sachant que $\Gamma(1) = 1$),

$$\begin{aligned}
\left(I_a^1 f^{(r)}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x (x-t)^0 f^{(r)}(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f^{(r)}(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} \left[f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(a) \right] \\
&= f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(a).
\end{aligned}$$

D'où

$$f^{(r-1)}(x) = \left(I_a^1 f^{(r)}\right)(x) + f^{(r-1)}(a).$$

2) D'après la relation (2.10) (moyennant la relation (2.3))

$$\left(I_a^1 f^{(r-1)}\right)(x) = \left(I_a^2 f^{(r)}\right)(x) + \left(I_a^1 f^{(r-1)}(a)\right)(x),$$

alors

$$f^{(r-2)}(x) - f^{(r-2)}(a) = \left(I_a^2 f^{(r)}\right)(x) + \left(I_a^1 f^{(r-1)}(a)\right)(x).$$

D'après l'Exemple 2.3, on a

$$\left(I_a^1 f^{(r-1)}(a)\right)(x) = f^{(r-1)}(a)(x-a)$$

donc,

$$f^{(r-2)}(x) - f^{(r-2)}(a) = \left(I_a^2 f^{(r)}\right)(x) + (x-a) f^{(r-1)}(a)$$

ce qui entraine que

$$f^{(r-2)}(x) = \left(I_a^2 f^{(r)}\right)(x) + (x-a) f^{(r-1)}(a) + f^{(r-2)}(a).$$

Par suite,

$$\left(I_a^1 f^{(r-2)}\right)(x) = \left(I_a^3 f^{(r)}\right)(x) + \left(I_a^1 (x-a) f^{(r-1)}(a)\right)(x) + \left(I_a^1 f^{(r-2)}(a)\right)(x)$$

et on a

$$\begin{aligned}\left(I_a^1(x-a)f^{(r-1)}(a)\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^x (x-t)^0(t-a)f^{(r-1)}(a)dt\\ &= \frac{(x-a)^2}{2}f^{(r-1)}(a).\end{aligned}$$

C'est à dire, $\big($sachant (2.10)$\big)$

$$f^{(r-3)}(x) - f^{(r-3)}(a) = \left(I_a^3 f^{(r)}\right)(x) + \frac{(x-a)^2}{2}f^{(r-1)}(a) + (x-a)f^{(r-2)}(a).$$

Il s'avère que

$$f^{(r-3)}(x) = \left(I_a^3 f^{(r)}\right)(x) + \frac{(x-a)^2}{2}f^{(r-1)}(a) + (x-a)f^{(r-2)}(a) + f^{(r-3)}(a).$$

Par induction sur n, on déduit que

$$f(x) = \left(I_a^r f^{(r)}\right)(x) + \sum_{i=0}^{r-1}\tfrac{(x-a)^i}{i!}f^{(i)}(a).$$

■

Remarque 2.12. *[26] Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, I_a^α coïncide avec l'intégrale itérée n fois de la forme*

$$\begin{aligned}\left(I_a^n f\right)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt.\end{aligned}$$

En effet, soit f une fonctions continue sur l'intervalle $[a,b]$. On considère l'intégrale

$$\begin{aligned}(I_a^1 f)(x) &= \int_a^x f(t)dt.\\ (I_a^2 f)(x) &= I_a^1\left(I_a^1 f\right)(x)\\ &= \int_a^x \left(I_a^1 f\right)(u)du\\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t)dt\right)du\\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du\right)f(t)dt\\ &= \int_a^x (x-t)f(t)dt.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\big(I_a^n f\big)(x) &= I_a^1\big(I_a^{n-1} f\big)(x)\\ &= \int_a^x \big(I_a^{n-1} f\big)(t_1)dt_1\\ &= \int_a^x \left[\int_a^{t_1} \big(I_a^{n-2} f\big)(t_2)dt_2\right]dt_1\end{aligned}$$

$$\big(I_a^n f\big)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} \big(I_a^0 f\big)(t_n)dt_n.$$

Plus généralement la n ième itération de l'opérateur I_a^n *peut s'écrire*

$$\begin{aligned}(I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt.\end{aligned}$$

Théorème 2.13. *[31] Soit* $\alpha > 0$ *et soit* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *une suite de fonction continue uniformément convergente sur* $[a, b]$*, alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et le signe limite comme suit*

$$\lim_{k\to\infty} (I_a^\alpha f_k)(x) = \big[I_a^\alpha(\lim_{k\to\infty} f_k)\big](x). \tag{2.12}$$

En particulier, la suite $(I_a^\alpha f_k)_{k=1}^{\infty}$ *est uniformément convergente .*

Démonstration.

Soit $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}\big|(I_a^\alpha f_k)(x)\big| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f_k(t)dt\right|\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\big|f_k(t)dt\big|\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \sup_{t\in[a,x]}\big|f_k(t)\big|(x-t)^{\alpha-1}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|f_k\|_\infty \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\\ &= \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f_k\|_\infty < +\infty.\end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence dominée, il vient que

$$\lim_{k\to\infty}(I_a^\alpha f_k)(x) = \big[I_a^\alpha(\lim_{k\to\infty} f_k)\big](x).$$

Soit f la limite de la suite (f_k). Il est clair que f est continue et on a l'estimation

$$\begin{aligned}
\big|(I_a^\alpha f_k)(x) - (I_a^\alpha f)(x)\big| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f_k(t)dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\big(f_k(t)-f(t)\big)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\big|f_k(t)-f(t)\big|dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in[a,x]}\big|f_k(t)-f(t)\big|\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|f_k - f\|_\infty \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = a + s(x-a)$

$$\begin{aligned}
\big|(I_a^\alpha f_k)(x) - (I_a^\alpha f)(x)\big| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|f_k - f\|_\infty \int_a^x (x-a)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}(x-a)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|f_k - f\|_\infty (x-a)^\alpha \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|f_k - f\|_\infty (x-a)^\alpha \beta(1,\alpha) \\
&\leq \frac{\Gamma(1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\|f_k - f\|_\infty (b-a)^\alpha \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|f_k - f\|_\infty (b-a)^\alpha.
\end{aligned}$$

D'où la convergence uniforme lorsque $k \longrightarrow \infty$ sur $[a,b]$. ■

2.2 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 2.14. *[18] Soit f une fonction intégrable définie sur [a,b], les dérivées fractionnaires à droite (resp. à gauche) d'ordre $0 < \alpha < 1$ sont définies respectivement par*

$$\left(\mathrm{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)(x-t)^{-\alpha} dt. \tag{2.13}$$

$$\left(\mathrm{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b f(t)(x-t)^{-\alpha} dt. \tag{2.14}$$

Dans la suite, on utilisera l'équation (2.13), et on note simplement $\left(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)$.

Exemple 2.15.

1) La dérivée fractionnaire d'une fonction constante $f \equiv c$ est

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)(x-t)^{-\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x c(x-t)^{-\alpha} dt \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left(\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

2) Soit $f(x) = (x-a)^{\gamma}$, $\gamma > -1$ on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)(x-t)^{-\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (t-a)^{\gamma}(x-t)^{-\alpha} dt.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = a + s(x-a)$ donne

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 (x-a)^{-\alpha}(1-s)^{-\alpha} s^{\gamma}(x-a)^{\gamma}(x-a) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[(x-a)^{\gamma-\alpha+1} \int_0^1 s^{\gamma}(1-s)^{-\alpha} ds \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\big(\mathrm{D}_a^\alpha f\big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\Big[(x-a)^{\gamma-\alpha+1}\beta(\gamma+1,-\alpha+1)\Big] \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha+2)}\frac{d}{dx}(x-a)^{\gamma-\alpha+1} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+2)}(\gamma-\alpha+1)(x-a)^{\gamma-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma-\alpha+1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(\gamma-\alpha+1)(x-a)^{\gamma-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Remarque 2.16. *[19]*
Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas les règles suivantes des dérivées usuelles.
1)

$$\mathrm{D}_a^\alpha(fg) \neq f\mathrm{D}_a^\alpha(g) + g\mathrm{D}_a^\alpha(f).$$

Contre exemple. *On pose $f(x) = g(x) = c$. D'après l'Exemple 2.15, on a*

$$(\mathrm{D}_a^\alpha f)(x) = (\mathrm{D}_a^\alpha g)(x) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_a^\alpha(fg) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x c^2(x-t)^{-\alpha}dt \\
&= \frac{c^2}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x (x-t)^{-\alpha}dt\right) \\
&= \frac{c^2}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
f(\mathrm{D}_a^\alpha g)(x) + g(\mathrm{D}_a^\alpha f)(x) &= c\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \\
&\quad + c\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \\
&= \frac{2c^2}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$\mathrm{D}_a^\alpha(fg) \neq f\mathrm{D}_a^\alpha(g) + g\mathrm{D}_a^\alpha(f).$$

2)

$$\mathrm{D}_a^\alpha\left(\frac{f}{g}\right) \neq \frac{g\mathrm{D}_a^\alpha(f) - f\mathrm{D}_a^\alpha(g)}{g^2}.$$

Contre exemple. *On pose* $f(x) = (x-a)^\gamma$, $\gamma > -1$, *et* $g(x) = c$. *On a*

$$(\mathrm{D}_a^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha},$$

$$(\mathrm{D}_a^\alpha g)(x) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha},$$

et

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{D}_a^\alpha\left(\frac{f}{g}\right)\right)(x) &= \left(\mathrm{D}_a^\alpha\frac{(x-a)^\gamma}{c}\right)(x)\\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{c\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha}.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned}\frac{g(\mathrm{D}_a^\alpha f)(x) - f(\mathrm{D}_a^\alpha g)(x)}{g^2(x)} &= \frac{1}{c^2}\left[c\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha} - (x-a)^\gamma\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}\right]\\ &= \frac{(x-a)^{\gamma-\alpha}}{c}\left[\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\right].\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathrm{D}_a^\alpha\left(\frac{f}{g}\right) \neq \frac{g\mathrm{D}_a^\alpha(f) - f\mathrm{D}_a^\alpha(g)}{g^2}.$$

Définition 2.17. *[28] Soit* $f \in L^1\big([a,b]\big)$. *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $n-1 < [\alpha] < n$. *On définit la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* α *comme suit*

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{D}_a^\alpha f\big)(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left(I_a^{n-\alpha}f\right)(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt,\ x > a. \qquad (2.15)\end{aligned}$$

Si $\alpha = 0$ et $n = 1$, nous avons une dérivée conventionnelle,

$$\left(\mathrm{D}_a^0 f\right)(x) = \frac{d}{dx}\left(I_a^1 f\right)(x) = f(x). \tag{2.16}$$

Exemple 2.18.

1) Soit $f(x) = (x-a)^\gamma$ tel que $\gamma > -1$. Soit α un nombre non entier tel que $n-1 < [\alpha] < n$. On a

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt.\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^\beta dt.\end{aligned}$$

On fait le changement de variable suivant $t = a + s(x-a)$,

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^1 \big(x-a-s(x-a)\big)^{n-\alpha-1}\big(s(x-a)^\gamma\big)(x-a)ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha+\gamma}\int_0^1 s^\gamma(1-s)^{n-\alpha-1}ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha+\gamma}\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n-\alpha+1)} \qquad (2.17)\\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha+\gamma}. \qquad (2.18)\end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n+\gamma-\alpha} &= (\gamma-\alpha+n)(\gamma-\alpha+n-1)...(\gamma-\alpha+2)(\gamma-\alpha+1)(x-a)^{\gamma-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\gamma-\alpha+n+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha}.\end{aligned}$$

Remplaçant cette dernière relation dans (2.18), on aura

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha+n+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+n+1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha}.\end{aligned}$$

Remarque 2.19 (**Dérivée de la fonction exponentielle**). *[6]*
La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$, de la fonction e^{bx} où b est une constante, est donnée par l'expression suivante

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{bx} = b^n e^{bx}$$

Liouville a étendu cette définition pour inclure les dérivées d'ordre arbitraire α

$$\mathrm{D}_a^\alpha e^{bx} = b^\alpha e^{bx}. \tag{2.19}$$

Il a aussi utilisé le développement en série pour collecter toutes les fonctions exponentielles

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x},$$

où $b_n > 0$ et $c_n \in \mathbb{R}$. D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_a^\alpha(f(x)) &= \mathrm{D}_a^\alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n b^\alpha e^{b_n x},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Remarque 2.20 (**Dérivée de fonctions trigonométriques**). *[6]*
On a d'après (2.17),

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_a^\alpha\big(e^{ibx}\big) &= (ib)^\alpha e^{ibx}\\ &= i\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big)b^\alpha\\ &= b^\alpha\left[\cos\left(bx + \alpha\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(bx + \alpha\frac{\pi}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

D'où l'en déduit les identités suivantes

$$\mathrm{D}_a^\alpha\big(\cos(bx)\big) = b^\alpha\cos\left(bx + \alpha\frac{\pi}{2}\right). \tag{2.20}$$

$$\mathrm{D}_a^\alpha\big(\sin(bx)\big) = b^\alpha\sin\left(bx + \alpha\frac{\pi}{2}\right). \tag{2.21}$$

Remarque 2.21. *[17]*

1) La dérivée fractionnaire $\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)$ *est indépendante de l'entier* n *et se réduit à la dérivée ordinaire pour* α *entier. En effet, si* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n-1<\alpha<n$ *on a,*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \left(I^{n-\alpha} f\right)(x).
\end{aligned}$$

Quand $\alpha \to n$*, alors nous avons une dérivée conventionnelle*

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to n} (\mathrm{D}_a^\alpha f)(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \left(I^{n-n} f\right)(x) \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \left(I_a^0 f\right)(x)
\end{aligned}$$

Par la relation (2.5) il vient que

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to n} (\mathrm{D}_a^\alpha f)(x) &= \frac{d^n}{dx^n} f(x) \\
&= f^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

2) Par convention on a, pour $m \geq n$

$$\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} I_a^{m-n} = id. \tag{2.22}$$

Théorème 2.22. *[1] Soient* f *et* g *deux fonctions intégrables dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre* α *existent. Alors pour* λ_1*,* $\lambda_2 \in \mathbb{R}$*,* $D_a^\alpha\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right)$ *existe et on a*

$$\left(D_a^\alpha\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right)\right)(x) = \lambda_1 \left(D_a^\alpha f\right)(x) + \lambda_2 \left(D_a^\alpha g\right)(x). \tag{2.23}$$

Démonstration.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies sur $[a, b]$. Moyennant la définition de la dérivée de Riemann-Liouville, on aura

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{D}_a^\alpha\big(\lambda_1 f + \lambda_2 g\big)\big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(t)dt\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\big(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)\big)dt\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\lambda_1 f(t)dt\right)\\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\lambda_2 g(t)dt\right)\\
&= \frac{\lambda_1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt\right)\\
&+ \frac{\lambda_2}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t)dt\right)\\
&= \lambda_1\big(\mathrm{D}_a^\alpha f\big)(x) + \lambda_2\big(\mathrm{D}_a^\alpha g\big)(x).
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.23. *[20] Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 < [\alpha] < n$ et $m-1 < [\beta] < m$.*

1) Pour $f \in L^1([a, b])$, l'égalité

$$\mathrm{D}_a^\alpha\big(I_a^\alpha f\big)(x) = f(x). \tag{2.24}$$

est vraie pour presque tout $x \in [a, b]$.

2) Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a, b])$ la relation

$$\mathrm{D}_a^\beta\big(I_a^\alpha f\big)(x) = \big(I^{\alpha-\beta} f\big)(x). \tag{2.25}$$

est vraie presque partout sur $[a, b]$.

3) Si $\beta \geq \alpha > 0$, et si la dérivée fractionnaire $\mathrm{D}_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a

$$\mathrm{D}_a^\beta\big(I_a^\alpha f\big)(x) = \big(\mathrm{D}_a^{\beta-\alpha} f\big)(x). \tag{2.26}$$

4) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $r-1 < [\alpha] < r$

$$\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = I_a^{r-\alpha} f^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+1-\alpha)} f^{(i)}(a). \tag{2.27}$$

Démonstration.

1) Soit $f \in L^1([a,b])$. Par la relation (2.15) on a,

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{D}_a^\alpha\left(I_a^\alpha f\right)\right](x) &= \left[\frac{d^n}{dx^n}\left(I_a^{n-\alpha}\left(I_a^\alpha f\right)\right)\right](x)\\ &= \left[\frac{d^n}{dx^n}\left(I_a^n f\right)\right](x).\end{aligned}$$

La relation (2.22), nous donne

$$\left[\mathrm{D}_a^\alpha\left(I_a^\alpha f\right)\right](x) = f(x).$$

2) Soient $\alpha > \beta > 0$. En vertus des relations (2.3) et (2.15). Pour presque tout $x \in [a,b]$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_a^\beta\left(I_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left(I_a^{n-\beta}\left(I_a^\alpha f\right)(x)\right)\\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\left(I_a^{n+\alpha-\beta} f\right)(x)\right)\\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left(I_a^n\left(I_a^{\alpha-\beta} f\right)(x)\right)\\ &= \left(I_a^{\alpha-\beta} f\right)(x).\end{aligned}$$

3) Si $\beta \geq \alpha > 0$. On a pour presque tout $x \in [a,b]$, et les relations (2.3), (2.15)

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_a^\beta\left(I_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{d^m}{dx^m}\left(I_a^{m-\beta}\left(I_a^\alpha f\right)(x)\right)\\ &= \frac{d^m}{dx^m}\left(\left(I_a^{m+\alpha-\beta} f\right)(x)\right)\\ &= \frac{d^m}{dx^m}\left(\left(I_a^{m-(\beta-\alpha)} f\right)(x)\right)\\ &= \left(\mathrm{D}_a^{\beta-\alpha} f\right)(x).\end{aligned}$$

4) Par la linéarité de D_a^α et les relation (2.11) et (2.26)

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) &= \mathrm{D}_a^\alpha\left(I_a^r f^{(r)}\right)(x) + \mathrm{D}_a^\alpha\left(\sum_{i=0}^{r-1} \tfrac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)\right) \\ &= \mathrm{D}_a^\alpha\left(I_a^\alpha\left(I_a^{-\alpha}\left(I_a^r f^{(r)}\right)\right)\right)(x) + \mathrm{D}_a^\alpha\left(\sum_{i=0}^{r-1} \tfrac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)\right).\end{aligned}$$

Alors

$$\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = \left(I_a^{r-\alpha} f^{(r)}\right)(x) + \sum_{i=0}^{r-1} \tfrac{(x-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+1-\alpha)} f^{(i)}(a).$$

■

Définition 2.24. *[29]*

1) Soit f une fonction localement intégrable définie sur $[a,+\infty)$ et soit $\alpha > 0$. L'intégrale d'ordre α de f de borne inférieure a est définie par l'expression suivante

$$\left(I_a^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt,\ x > a. \tag{2.28}$$

2) Soit f une fonction localement intégrable définie sur $[a,+\infty)$. On pose $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha > 0$, et $a \in \mathbb{R}$. La dérivée d'ordre α de f de borne inférieure a au sens de Riemann-Liouville est définie par

$$\left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \tag{2.29}$$

telle que n est un nombre entier $n-1 < \alpha < n$.

3) Si f est de classe $C^k\big([a,+\infty[\big)$, alors en faisant des intégration par partie et des différentiations répété on obtient

$$\left(I_a^\alpha f\right)(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(t)dt. \tag{2.30}$$

2.3 Dérivées fractionnaires de Caputo

Définition 2.25. *[32] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha < n$ et $f \in C^n\big([a,b]\big)$, la dérivée fractionnaire de Caputo (Caputo 1967) d'ordre α de f notée ${}^C\mathrm{D}_a^\alpha f$ est donnée par*

$$\big({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\big)(x) = \big(I_a^{n-\alpha} f^{(n)}\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt, \ x > a. \quad (2.31)$$

Exemple 2.26.

Soit $f(x) = (x-a)^\gamma$ avec $\gamma > 0$. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}\big({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} ((t-a)^\gamma)^{(n)} dt. \qquad (2.32)\end{aligned}$$

Sachant que $(\gamma > n)$

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^\gamma &= \gamma(\gamma-1)(\gamma-2)...(\gamma-n+1)(t-a)^{\gamma-n} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-n+1)}(t-a)^{\gamma-n}.\end{aligned}$$

Remplaçant cette dernière relation dans (2.32), on aura

$$\big({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-n+1)}(t-a)^{\gamma-n} dt$$

Faisant le changement de variable $t = a + s(x-a)$

$$\begin{aligned}\big({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\big)(x) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n+1)} \int_0^1 (x-a)^{n-\alpha-1}(1-s)^{n-\alpha-1} s^{\gamma-n}(x-a)^{\gamma-n}(x-a)ds \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha} \int_0^1 s^{\gamma-n}(1-s)^{n-\alpha-1}ds \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n+1)} \frac{\Gamma(\gamma-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\gamma-n+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-n+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha}.\end{aligned}$$

Exemple 2.27.

1) La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante $f \equiv c$.

$$\begin{aligned}\left({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\frac{d^n}{dx^n}\Big(c\Big)dt\\ &= 0\end{aligned}$$

d'où

$$\left({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = 0.$$

2) Soit $a=0$, $\alpha = 1/2$, $(n=1)$, $f(t)=t$. On a

$$\left({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\left({}^C\mathrm{D}_0^{1/2} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-1/2)}\int_0^x (x-t)^{-1/2} t^{(1)}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-t)^{-1/2}dt\end{aligned}$$

Posons $u=(x-t)^{1/2}$,

$$\begin{aligned}\left({}^C\mathrm{D}_0^{1/2} f\right)(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{2u}{u}du\\ &= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.\end{aligned}$$

Lemme 2.28. *[17] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $n-1<\alpha<n$ et soit f une fonction intégrable telle que $\left({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x)$ existe alors on a la propriétés suivantes pour l'opérateur de Caputo,*

$$\lim_{\alpha\to n}\left({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = f^{(n)}(x). \tag{2.33}$$

Démonstration. Par la Définition 2.25

$$\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt,\ x>a.$$

Une intégration par partie et l'utilisation de la formule classique $\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)$ entrainent que

$$\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha}f^{(n)}(a)+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha}f^{(n+1)}(t)dt. \tag{2.34}$$

Quant $\alpha\to n$ on déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to n}\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}f\right)(x)&=f^{(n)}(a)+\int_{a}^{x}f^{(n+1)}(t)dt\\&=f^{(n)}(x).\end{aligned}$$

■

Lemme 2.29. *[17] Soient $m,n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que $n-1<\alpha<n$. Soit f une fonction telle que $\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}f\right)(\cdot)$ existe. En général*

$$\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}\left(\frac{d^m}{dx^m}f\right)\right)(x)=\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha+m}f\right)(x)\neq\frac{d^m}{dx^m}\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}f\right)(x). \tag{2.35}$$

Remarque 2.30. *[17] Soit la fonction f telle que $f^{(s)}(a)=0,\ s=0,1,2,...m$. Alors la dérivée fractionnaire de Caputo est commutative avec la dérivée d'ordre $m\in\mathbb{N}$ i.e.,*

$$\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}\left(\frac{d^m}{dx^m}f\right)\right)(x)=\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha+m}f\right)(x)=\frac{d^m}{dx^m}\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}f\right)(x). \tag{2.36}$$

Définition 2.31. *[4] Soient $\alpha>0$ un nombre réel, $n=[\alpha]+1$ et $x\in AC^{n}\big([a,b]\big)$. La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α est donnée par*

$$\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt,\ x>a. \tag{2.37}$$

Théorème 2.32. *[1] Soient f et g deux fonctions intégrables définies sur [a,b] telles que ${}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}f$ et ${}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}g$ existent presque partout. De plus, soient λ_1 et $\lambda_2\in\mathbb{R}$ alors, ${}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}\big(\lambda_1 f+\lambda_2 g\big)$ existe presque partout et on a*

$$\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}\big(\lambda_1 f+\lambda_2 g\big)\right)(x)=\lambda_1\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}f\right)(x)+\lambda_2\left({}^{C}\mathrm{D}_{a}^{\alpha}g\right)(x). \tag{2.38}$$

Démonstration.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies sur $[a, b]$, on a

$$\begin{aligned}
\big({}^{C}\mathrm{D}_a^{\alpha}\big(\lambda_1 f + \lambda_2 g\big)\big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (\lambda_1 f + \lambda_2 g)^{(n)}(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \big(\lambda_1 f^{(n)}(t) + \lambda_2 g^{(n)}(t)\big)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \lambda_1 f^{(n)}(t)dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \lambda_2 g^{(n)}(t)dt \\
&= \frac{\lambda_1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt \\
&+ \frac{\lambda_2}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g^{(n)}(t)dt \\
&= \lambda_1 \big({}^{C}\mathrm{D}_a^{\alpha} f\big)(x) + \lambda_2 \big({}^{C}\mathrm{D}_a^{\alpha} g\big)(x).
\end{aligned}$$

∎

Corollaire 2.33. *[17] Supposons que $n = [\alpha] + 1$ et $\gamma = \alpha - (n-1)$, avec $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in]0, 1[$, et une fonction f tels que*

$$\big({}^{C}\mathrm{D}_a^{\alpha} f\big)(x) = \left({}^{C}\mathrm{D}_a^{\gamma}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f\right)\right)(x). \tag{2.39}$$

Démonstration.

Substituant α, γ et $n-1$ dans (2.35) il s'ensuite que

$$\begin{aligned}
\left({}^{C}\mathrm{D}_a^{\gamma}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f\right)\right)(x) &= \big({}^{C}\mathrm{D}_a^{\gamma+n-1} f\big)(x) \\
&= \big({}^{C}\mathrm{D}_a^{\alpha-(n-1)+n-1} f\big)(x) \\
&= \big({}^{C}\mathrm{D}_a^{\alpha} f\big)(x).
\end{aligned}$$

∎

Théorème 2.34. ***(Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Caputo)*** *[17]*
Soit $\alpha > 0$ et soit $n = [\alpha] + 1$. Si f possède (n-1) dérivées en a et si $\mathrm{D}_a^\alpha f$ existe. Alors, les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo sont liées par les formules suivantes

$$\left({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = \left(\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} \tag{2.40}$$

$$\left({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\right)(x) = \mathrm{D}_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]. \tag{2.41}$$

Démonstration.
1) La série de Taylor de f au voisinage de 0 est

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + ... + \frac{x^n - 1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1} \end{aligned}$$

En tenant compte à,

$$\begin{aligned} R_{n-1} &= \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt \\ &= \left(I_0^n f^{(n)}\right)(x). \end{aligned}$$

Utilisant les relations (2.3), (2.15) et l'Exemple 2.15 on trouve

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{D}_0^\alpha f\right)(x) &= \mathrm{D}_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{\mathrm{D}_0^\alpha (x^k)}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + \left(\mathrm{D}_0^\alpha R_{n-1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{\Gamma(k+1)x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + \left(\mathrm{D}_0^\alpha \left(I_0^n f^{(n)}\right)\right)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + \tfrac{d^n}{dx^n}\left(\left(I_0^{n-\alpha}\left(I_0^n f^{(n)}\right)\right)(x)\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\big(\mathrm{D}_0^\alpha f\big)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + \tfrac{d^n}{dx^n}\Bigg(\big(I_0^n\big(I_0^{n-\alpha} f^{(n)}\big)\big)(x)\Bigg).$$

Évoquant la relation (2.22)

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{D}_0^\alpha f\big)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + \big(I_0^{n-\alpha} f^{(n)}\big)(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + \big({}^C\mathrm{D}_0^\alpha f\big)(x).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\big({}^C\mathrm{D}_0^\alpha f\big)(x) = \big(\mathrm{D}_0^\alpha f\big)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0).$$

2) D'autre part,

$$\begin{aligned}\big({}^C\mathrm{D}_0^\alpha f\big)(x) &= \big(\mathrm{D}_0^\alpha f\big)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0)\\ &= \big(\mathrm{D}_0^\alpha f\big)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{\Gamma(k+1)x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0)\\ &= \big(\mathrm{D}_0^\alpha f\big)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{\mathrm{D}_0^\alpha x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0)\\ &= \mathrm{D}_0^\alpha\Bigg(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0)\Bigg).\end{aligned}$$

■

Remarque 2.35. *[17] La relation avec la définition originale de la dérivée de Caputo i.e.,* $\mathrm{D}_a^\alpha f = {}^C\mathrm{D}_a^\alpha f$, *quand* $f^{(k)}(a) = 0,\ \ k = 0, ..., n-1.$

Le théorème suivant nous montre que la dérivée de Caputo n'est pas l'inverse à droite de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville .

Théorème 2.36. *[7, 20] Si* $f \in C([a,b])$ *et* $n-1 < \alpha \leq n$ *tel que* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors*

$$\big[{}^C\mathrm{D}_a^\alpha(I_a^\alpha f)\big](t) = f(t). \tag{2.42}$$

Démonstration.

En utilisant la propriété précédente ($\mathrm{D}_a^\alpha f = {}^C\mathrm{D}_a^\alpha f$ si $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, ..., n-1$) et la relation (2.26). ■

Théorème 2.37. *[7, 20] Si $f \in AC^m([a,b])$ et si $\alpha > 0$ alors, pour tout $x \in [a,b]$*

$$\left[I_a^\alpha\left({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f\right)\right](x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{2.43}$$

Démonstration.

Par les relations (2.3), (2.14), (2.22) et (2.41) nous avons

$$\begin{aligned}
\left[I_a^\alpha({}^C\mathrm{D}_a^\alpha f)\right](x) &= \left[I_a^\alpha\left(\mathrm{D}_a^\alpha\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right)\right)\right] \\
&= I_a^\alpha\left(\frac{d^n}{dx^n} I_a^{n-\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right)\right) \\
&= \frac{d^n}{dx^n} I_a^n\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right) \\
&= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

■

2.4 Résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Définition 2.38. *(**Transformée de Laplace de Riemann-Liouville**) [26]*
Si $f \in L^1([0,b])$, $b > 0$ alors, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de f est

$$\mathcal{L}\{D_0^\alpha f(x); s\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(x); s\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[D_0^{\alpha-k-1} f(x)\right]_{x=0}.$$

avec $n-1 < \alpha < n$. Cette transformée de Laplace est bien connue.

Proposition 2.39. *[14] Si $n = 1$ et $n = 2$, on a respectivement,*

$$\mathcal{L}\{\big(D_0^\alpha f(x); s\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(x); s\} - D_0^{\alpha-1} f(0),\ 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.44}$$

$$\mathcal{L}\{D_0^\alpha f(x); s\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(x); s\} - D_0^{\alpha-1} f(0) - sD_0^{\alpha-2} f(0),\ 1 < \alpha \leq 2. \tag{2.45}$$

Exemple 2.40.
1) Soit l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$D_0^{\frac{4}{3}} y(x) = 0. \tag{2.46}$$

On a $1 < \alpha = \frac{4}{3} < 2$. Nous pouvons donc utiliser la formule (2.45). En prenant la transformée de Laplace des deux cotés de cette équation, il vient que

$$\mathcal{L}\{D_0^{\frac{4}{3}} y(x); s\} = 0.$$

Ce qui nous donne,

$$s^{\frac{4}{3}} \mathcal{L}\{y(x); s\} - sD_0^{\frac{4}{3}-2} y(0) - D^{\frac{4}{3}-1} y(0) = 0. \tag{2.47}$$

Si nous supposons que $D_0^{\frac{-2}{3}} y(0)$ et $D_0^{\frac{1}{3}} y(0)$ existe et nous l'appelons c_1, c_2 respectivement alors l'équation (2.47) devient

$$s^{\frac{4}{3}} \mathcal{L}\{y(x); s\} - c_1 s - c_2 = 0.$$

Donc

$$\mathcal{L}\{y(x);s\} = \frac{c_1 s}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}}\cdot$$

Finalement grâce au tableau (2.1), en introduisant l'inverse de la transformée de Laplace de $\mathcal{L}\{y(x);s\}$ *et on conclut que*

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{c_1 s}{s^{\frac{4}{3}}};x\Big\} + \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}};x\Big\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{c_1}{s^{\frac{1}{3}}};x\Big\} + \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}};x\Big\} \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\frac{1}{3})}x^{\frac{-2}{3}} + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{4}{3})}x^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

2) Soit l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$D_0^{\frac{2}{3}} y(x) = ay(x) \tag{2.48}$$

où a est une constante réelle. Puisque $0 < \alpha = \frac{2}{3} \leq 1$, *nous pouvons utiliser donc la formule (2.44). En prenant la transformée de Laplace des deux membres de cette équation on obtient,*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D_0^{\frac{2}{3}} y(x);s\} &= \mathcal{L}\{ay(x);s\} \\ &= a\mathcal{L}\{y(x);s\}, \end{aligned}$$

il s'ensuite que

$$s^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}\{y(x);s\} - D_0^{\frac{2}{3}-1} y(0) = a\mathcal{L}\{y(x);s\}$$

i.e,

$$s^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}\{y(x);s\} - D_0^{\frac{-1}{3}} y(0) = a\mathcal{L}\{y(x);s\}. \tag{2.49}$$

Si nous supposons que cette valeur $\mathrm{D}_0^{\frac{-1}{3}} y(0)$ *existe, et nous l'appelons* c_1, *alors l'équation (2.49) devient*

$$s^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}\{y(x);s\} - c_1 = a\mathcal{L}\{y(x);s\}.$$

Par conséquent

$$\mathcal{L}\{y(x);s\} = \frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$

Enfin grâce au tableau (2.1), on déduit

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a};x\} = c_1 x^{\frac{-1}{3}} E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}(a x^{\frac{2}{3}}).$$

$\mathcal{L}\{f(x);s\}$	$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(x);s\};x\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp^{-ax}$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(a x^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+a)}$	$E_\alpha(-a x^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha+a)}$	$1 - E_\alpha(-a x^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$x^\alpha E_{1,\alpha+1}(ax)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(a x^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(\exp^{ax} - \exp^{bx})$

TABLE 2.1 – Transformée de Laplace de quelques fonctions

Propriétés	Riemann-Liouville	Caputo
Représentation	$\big(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\big)(x)= \frac{d^n}{dx^n} I_a^{n-\alpha} f(x).$	$\big({}^{C}\mathrm{D}_a^{\alpha} f\big)(x)=I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x).$
Interpolation	$\lim\limits_{\alpha\to n} \big(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\big)(x)= f^{(n)}(x).$	$\lim\limits_{\alpha\to n} \big({}^{C}\mathrm{D}_a^{\alpha} f\big)(x) = f^{(n)}(x).$
Linéarité	$\big(\mathrm{D}_a^{\alpha}(\lambda_1 f + \lambda_2 g\big)(x) = \lambda_1\big(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\big)(x) + \lambda_2(\mathrm{D}_a^{\alpha} g\big)(x).$	${}^{c}\mathrm{D}_a^{\alpha}(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = \lambda_1\big(\mathrm{D}_a^{\alpha} f\big)(x) + \lambda_2\big(\mathrm{D}_a^{\alpha} g\big)(x).$
Non-commutative	$\left(\frac{d^m}{dx^m}(\mathrm{D}_a^{\alpha} f)\right)(x) = \big(\mathrm{D}_a^{\alpha+m} f\big)(x) \neq \left(\mathrm{D}_a^{\alpha}(\frac{d^m}{dx^m} f)\right)(x).$	$\left({}^{c}\mathrm{D}_a^{\alpha}(\frac{d^m}{dx^m} f)\right)(x) = \big({}^{c}\mathrm{D}_a^{\alpha+m} f\big)(x) \neq \left(\frac{d^m}{dx^m}(\mathrm{D}_a^{\alpha} f)\right)(x).$
$f(x) = c, c = const$	$\mathrm{D}_a^{\alpha} c = \dfrac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0.$	${}^{c}\mathrm{D}_a^{\alpha} c = 0.$

TABLE 2.2 – Comparaisons entre Riemann-Liouville et Caputo

Chapitre 3

Application aux inclusions différentielles

Les équations différentielles d'ordre fractionnaire se sont récemment révélées forts outils dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques (pour une bibliographie complète sur ce sujet nous référons à [25]). En conséquence, il y a eu un développement intensif de la théorie des équations différentielles d'ordre fractionnaire ([11, 22, 16] etc.)
L'étude des inclusions différentielles fractionnaires a été initiée par El-Sayed et Ibrahim ([12]). Très récemment, plusieurs résultats qualitatifs pour les inclusions différentielles fractionnaires ont été obtenus dans [16].
La présente note est motivée par un récent article de Ouahab ([25]) où plusieurs résultats d'existence concernant le problème $(\mathcal{P})$ sont obtenus. Notre but dans ce chapitre est d'étudier un résultat d'existence supplémentaire pour le problème $(\mathcal{P})$

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\mathrm{D}_0^{\alpha} x(t) \in F(t, x(t)) & p.p.\ t \in\ I = [0,1], \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

Plus exactement, nous présentons un résultat de type Filippov concernant l'existence de solutions pour le problème avec conditions aux limites $(\mathcal{P})$. Nous rappelons que pour une inclusion différentielle définie par une multi-application Lipschitzienne avec des valeurs non convexes, le théorème de Filippov consiste à prouver l'existence d'une solution à partir d'un "quasi" ou "presque" solution. De plus, le résultat fournit une estimation entre la solution "quasi" et la solution obtenue.

3.1 Préliminaires

Dans la suite, on désigne par (X, d) un espace métrique et $T : X \rightrightarrows \mathcal{P}(X)$ une multi-application à valeurs non vides fermées.

Proposition 3.1. *[9] Si X est complet, toute contraction admet un point fixe, i.e., il existe $z \in X$ tel que $z \in T(z)$.*

Nous désignons par $Fix(T)$ l'ensemble de tous les points fixes de la multi-application T.

Évidemment, $Fix(T)$ est un sous ensemble fermé.

Proposition 3.2. *[9] Soit X un espace métrique complet et supposons que T_1, T_2 sont des λ- contractions à valeurs fermées dans X. Alors*

$$\mathcal{H}\big(Fix(T_1), Fix(T_2)\big) \leq \frac{1}{1-\lambda} \sup_{z \in X} d\big(T_1(z), T_2(z)\big).$$

Définition 3.3. *[9] Une fonction $x(\cdot) \in C(I, \mathbb{R})$ est appelée solution du problème $(\mathcal{P})$ s'il existe une fonction $v(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R})$ avec*

$$v(t) \in F(t, x(t)) \ p.p.\ sur I$$

telle que $-\mathrm{D}_0^\alpha x(t) = v(t)$ p.p. $sur I$ avec $x(0) = x(1) = 0$.
Nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 3.4. *[21] Supposons que $x \in C\big(]0,1[,\mathbb{R}\big) \cap L^1\big(]0,1[,\mathbb{R}\big)$ avec une dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ qui appartient à $C\big(]0,1[,\mathbb{R}\big) \cap L^1\big(]0,1[,\mathbb{R}\big)$. Nous avons*

$$I_a^\alpha\big(\mathrm{D}_a^\alpha x(t)\big) = x(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + ... + c_n t^{\alpha-n}, \tag{3.1}$$

pour certains $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, où n est le plus petit entier supérieur ou égal à α.

3.2 Existence de solution pour une inclusion différentielle.

Dans la suite, on suppose les conditions suivantes F.

Hypothèses

($\mathbf{H}_1$) $F(\cdot,\cdot) : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a valeurs non vides fermées et pour chaque $x \in \mathbb{R}$ $F(\cdot, x)$ est mesurable.

($\mathbf{H}_2$) Il existe $L(\cdot) \in L^1(I,\mathbb{R})$ tel que pour presque tout $t \in I$, $F(t,\cdot)$ est $L(t)$-Lipschitzienne dans le sens où

$$\mathcal{H}\big(F(t,x), F(t,y)\big) \leq L(t)|x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

et $d(0, F(t,0)) \leq L(t)$.

Lemme 3.5. *[9] Soit $f(\cdot) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $x(\cdot)$ est l'unique solution du problème aux limites*

$$\big(\mathrm{D}_0^\alpha x\big)(t) + f(t) = 0, \ t \in I \tag{3.2}$$

$$x(0) = x(1) = 0, \tag{3.3}$$

si et seulement si

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds, \tag{3.4}$$

où

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}\big(t(1-s)\big)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1} & si \quad 0\leq s<t\leq 1\\ \big(t(1-s)\big)^{\alpha-1} & si \quad 0\leq t<s\leq 1.\end{cases}$$

Notons que

$$|G(t,s)|\leq\frac{2}{\Gamma(\alpha)}, \quad \forall\ t,s\in I.$$

Démonstration. Puisque $f\in L^1\big([0,1]\big)$, par la Définition 3.3 et le Lemme 3.4, nous avons

$$I_0^\alpha\big(\mathrm{D}_0^\alpha x\big)(t)=x(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}. \tag{3.5}$$

Par (3.2), on a

$$I_0^\alpha\big(\mathrm{D}_0^\alpha x\big)(t)=-\big(I_0^\alpha f\big)(t).$$

De la relation (3.5), il vient que

$$x(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}-\big(I_a^\alpha f\big)(t) \tag{3.6}$$

pour certains $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Par conséquent, la solution générale est

$$x(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds.$$

Supposons que $c_2=0$, les conditions aux limites $x(0)=x(1)=0$, impliquent que

$$c_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}f(s)ds.$$

La relation (3.6), devient

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}f(s)ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds$$

Si $0\leq s<t\leq 1$, alors

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}f(s)ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\Big(\big[t(1-s)\big]^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}\Big)f(s)ds.\end{aligned}$$

Si $0 \leq t < s \leq 1$, alors

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} f(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \big[t(1-s)\big]^{\alpha-1} f(s)ds.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \big(t(1-s)\big)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} & \text{si} \quad 0 \leq s < t \leq 1 \\ \big(t(1-s)\big)^{\alpha-1} & \text{si} \quad 0 \leq t < s \leq 1 \end{cases}$$

et

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s)ds,$$

avec si $0 \leq s < t \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
|G(t,s)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(|t(1-s)|^{\alpha-1} + |(t-s)|^{\alpha-1} \Big) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(|(1-s)|^{\alpha-1} + |(1-s)|^{\alpha-1} \Big) \\
&= \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \big(|1-s|^{\alpha-1} \big) \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)},
\end{aligned}$$

et si $0 \leq t < s \leq 1$,

$$\begin{aligned}
|G(t,s)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [t(1-s)]^{\alpha-1} \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \big| t(1-s) \big|^{\alpha-1} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \big| t(1-t) \big|^{\alpha-1} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|G(t,s)| \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}, \ \forall \ t,s \in I.$$

■

Théorème 3.6. *[9] Supposons que les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)$ *et* $(\mathbf{H}_2)$ *sont satisfaites et* $\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1 < 1$.
Soit $y(\cdot) \in C(I,\mathbb{R})$ *tel qu'il existe* $q(\cdot) \in L^1(I,\mathbb{R})$ *avec*

$$d(-\mathrm{D}_0^\alpha y(t), F(t,y(t)) \leq q(t)$$

et $y(0) = y(1) = 0$.
Alors pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $x(\cdot)$ *une solution de* $(\mathcal{P})$ *satisfaisant pour tout* $t \in I$,

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha) - 2\|L\|_1} \int_0^1 q(t)dt + \varepsilon. \tag{3.7}$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème se fait en quelques étapes
Etape 1. Pour tout $u \in L^1(I,\mathbb{R})$, on définit les multi-applications suivantes

$$M_u(t) = F\left(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds\right), t \in I,$$

$$T(u) = \left\{\phi(.) \in L^1(I,\mathbb{R}), \phi(t) \in M_u(t) \ p.p. \ sur \ I\right\}.$$

Il vient de la Définition 3.3 et le Lemme 3.5 que $x(\cdot)$ est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\big(-\mathrm{D}_0^\alpha x(\cdot)\big)$ est un point fixe de $T(\cdot)$.
On doit montrer que $T(u)$ est non vide et fermé pour tout $u \in L^1(I,\mathbb{R})$.

Posons

$$K(t) = \left\{v \in F\big(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds\big), |v(t)| \leq d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big) p.p.t \in I\right\}$$

Montrons que $K(\cdot)$ est à valeurs non vides. On a

$$d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big) = \inf_{u \in F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s))} d(0,u).$$

Utilisant la caractérisation de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s))$ tel que

$$\inf_{u \in F(t,\int_0^1 G(t,s)u(s))} \|u\| \leqslant |u_\varepsilon| < d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big) + \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1-\varepsilon'}{\varepsilon'} d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big)$,

$$\begin{aligned}
|u'| &< d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big) \\
&\quad + \frac{1-\varepsilon'}{\varepsilon'} d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big) \\
&= \left(1 + \frac{1-\varepsilon'}{\varepsilon'}\right) d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big) \\
&= \frac{1}{\varepsilon'} d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big) \\
&\leq d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big).
\end{aligned}$$

Donc, il existe $u' \in F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s))$ tel que $|u'| \leq d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big)$. Ainsi $u' \in K(t)$ d'où la non vacuité des valeurs de K.

Montrons que $K(\cdot)$ est mesurable, pour cela il suffit de montrer que son graphe est mesurable (Théorème 1.22 car à valeurs fermées). Nous avons

$$\begin{aligned}
gph(K) &= \Big\{(t,v) \in I \times L^1(I,\mathbb{R}), v \in K(t)\Big\} \\
&= \Big\{(t,v) \in I \times L^1(I,\mathbb{R}), v \in F\big(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds\big)\Big\} \\
&\cap \Big\{(t,v) \in I \times L^1(I,\mathbb{R}),\ |v(t)| \leq d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big)\ p.p.\Big\} \\
&= gph\big(M_u\big) \cap gph\big(\overline{B}(0, \Gamma(t))\big)
\end{aligned}$$

où

$$\Gamma(t) = d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big).$$

La fonction $M_u(\cdot)$ est mesurable donc $gph(M_u)$ l' est aussi.

D'autre part, la fonction $t \longrightarrow d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big)$ est mesurable.
Montrons que $t \longmapsto \overline{B}(0, \Gamma(t))$ est Σ-mesurable. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $\overline{B}(0,1)$.
On pose

$$\sigma_n(t) = \Gamma(t)v_n$$

Il est clair que $\sigma_n(\cdot)$ est Σ- mesurable car $\Gamma(\cdot)$ l'est aussi et

$$\begin{aligned}
\overline{B}(0, \Gamma(t)) &= \Gamma(t)\overline{B}(0,1) \\
&= \Gamma(t)\overline{\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}} \\
&= \overline{\{\Gamma(t)v_n,\ n \in \mathbb{N}\}} \\
&= \{\overline{\sigma_n(t)}\}.
\end{aligned}$$

D'après la représentation de Castaing (Théorème 1.25) la multi-application $t \longrightarrow \overline{B}(0, \Gamma(t))$ est Σ- mesurable donc, $gph(\bar{B}(0, \Gamma(\cdot)))$ l'est aussi.
Par conséquent, $gph(K(\cdot))$ est Σ -mesurable, il s'ensuit que $K(\cdot)$ est mesurable.
Appliquant le Théorème 1.25, il existe une sélection mesurable $\phi(\cdot)$ de $K(\cdot)$ i.e.,

$$\forall\ t \in I, \phi(t) \in K(t).$$

Autrement dit,

$$\phi(t) \in M_u(t)\ et\ |\phi(t)| \leq d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big).$$

Or,

$$\begin{aligned}
|\phi(t)| &\leq d\big(0, F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big)\\
&\leq d\big(0, F(t,0)\big) + \mathcal{H}\big(F(t,0), F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds)\big)\\
&\leq L(t) + L(t)\left|\int_0^1 G(t,s)u(s)ds\right|\\
&\leq L(t)\left(1 + \int_0^1 |G(t,s)||u(s)|ds\right)\\
&\leq L(t)\left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |u(s)|ds\right)\\
&= L(t)\left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|u\|_1\right).
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\phi \in L^1(I,\mathbb{R})$ et $T(u) \neq \varnothing$.

$T(u)$ étant aussi fermé. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\phi_n \in T(u)$ et $\|\phi_n - \phi\|_1 \longrightarrow 0$. Puisque $(\phi_n)_n$ converge vers ϕ dans $L^1(I,\mathbb{R})$, on peut lui en extraire une sous suite $(\phi_{n_k}(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge presque par tout dans $\mathbb{R}$ vers $\phi(\cdot)$ i.e.,

$$\phi_{n_k}(t) \longrightarrow \phi(t) \ p.p.$$

Pour tout $n_k \in \mathbb{N}$,

$$\phi_{n_k}(t) \in M_u(t) \ p.p. \ t \in I \ i.e., \ \phi_{n_k}(t) \in F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds).$$

Puisque F est à valeurs fermées, un passage à la limite quand $k \longrightarrow +\infty$, nous donne

$$\phi(t) \in F(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds) \ p.p.$$

c'est à dire,

$$\phi(t) \in M_u(t) \ et \ \phi(\cdot) \in L^1(I,\mathbb{R}).$$

On conclut que , $\phi \in T(u)$ et donc $T(u)$ est fermé dans $L^1(I,\mathbb{R})$.

Maintenant, vérifions que $T(\cdot)$ est une contraction sur $L^1(I,\mathbb{R})$.
Étant donnés $u,\ v \in L^1(I,\mathbb{R})$ *et* $\phi \in T(u)$. Soit $\delta > 0$ et considérons la multi-application H définie comme suit

$$H(t) = M_u(t) \cap \left\{ x \in \mathbb{R},\ |\phi(t) - x| \leq L(t) \left| \int_0^1 G(t,s)(u(s) - v(s))ds \right| + \delta \right\}.$$

On a $t \longmapsto M_u(t)$ est une fonction mesurable et
$C(t) = \left\{ x \in \mathbb{R},\ |\phi(t) - x| \leq L(t) \left| \int_0^1 G(t,s)\big(u(s) - v(s)\big)ds \right| + \delta \right\}$ l'est aussi.
En effet,

$$\begin{aligned} gph\big(C\big) &= \{(t,x) \in I \times \mathbb{R},\ x \in C(t)\} \\ &= \left\{ (t,x) \in I \times \mathbb{R}, |\phi(t) - x| \leq L(t) \left| \int_0^1 G(t,s)\big(u(s) - v(s)\big)d \right| + \delta \right\} \\ &= gph\big(\overline{B}(\phi(\cdot), f(\cdot)\big) \end{aligned}$$

où

$$f(t) = L(t) \left| \int_0^1 G(t,s)\big(u(s) - v(s)\big)ds \right| + \delta,$$

qui est une fonction mesurable.
Puisque F est à valeurs fermées, d'après la Proposition 1.23, on déduit que $H(\cdot)$ est mesurable et par l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$, $H(\cdot)$ est à valeurs non vides et fermées. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}\left(F\left(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds\right), F\left(t, \int_0^1 G(t,s)v(s)ds\right) \right) \\ &\qquad \leq L(t) \left| \int_0^1 G(t,s)u(s)ds - \int_0^1 G(t,s)v(s)ds \right| \\ &\qquad = L(t) \left| \int_0^1 G(t,s)(u(s) - v(s))ds \right|. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &e\left(F\left(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds\right), F\left(t, \int_0^1 G(t,s)v(s)ds\right) \right) \\ &\qquad = \sup_{z \in F\left(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds\right)} d\left(z, F\big(t, \int_0^1 G(t,s)v(s)ds\big) \right). \end{aligned}$$

Donc pour tout $\phi \in T(u)$,

$$\begin{aligned} d\Big(\phi(t), F\Big(t, \int_0^1 G(t,s)v(s)ds\Big)\Big) &\leq \sup_{z \in F\left(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds\right)} d\Big(z, F\Big(t, \int_0^1 G(t,s)v(s)ds\Big)\Big) \\ &\leq L(t)\Big|\int_0^1 G(t,s)(u(s)-v(s))ds\Big|. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $x_\varepsilon \in F\big(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds\big)$

$$\begin{aligned} |\phi(t) - x_\varepsilon| &< d\Big(\phi(t), F\Big(t, \int_0^1 G(t,s)v(s)ds\Big)\Big) + \delta \\ &< L(t)\Big|\int_0^1 G(t,s)(u(s)-v(s))ds\Big| + \delta. \end{aligned}$$

D'où la non vacuité de $\Big\{x \in \mathbb{R},\ |\phi(t) - x| \leq L(t)\Big|\int_0^1 G(t,s)(u(s)-v(s))ds\Big| + \delta\Big\}$ et par suite puisque F est à valeurs non vides fermées. On en déduit que $H(\cdot)$ l'est aussi.

Par conséquent, il existe $\psi(\cdot)$ une sélection mesurable de $H(\cdot)$. et donc $\psi \in T(v)$, par le Théorème de Fubini, on trouve

$$\begin{aligned} \|\phi - \psi\|_1 &= \int_0^1 |\phi(t) - \psi(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 \Big(L(t)\Big|\int_0^1 G(t,s)\big(u(s)-v(s)\big)ds\Big| + \delta\Big)dt \\ &\leq \int_0^1 L(t)\Big|\int_0^1 G(t,s)\big(u(s)-v(s)\big)ds\Big|dt + \int_0^1 \delta dt \\ &\leq \int_0^1 L(t)\Big(\int_0^1 \big|G(t,s)\big|\big|u(s)-v(s)\big|ds\Big)dt + \int_0^1 \delta dt \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 L(t)\big|G(t,s)\big|dt\Big)\big|u(s)-v(s)\big|ds + \delta \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 L(t)dt \int_0^1 \big|u(s)-v(s)\big|ds + \delta \\ &= \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1\|u-v\|_1 + \delta. \end{aligned}$$

On a pour tout $\delta > 0$, il existe $\psi \in T(v)$ tel que

$$\|\phi - \psi\|_1 \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1\|u-v\|_1 + \delta.$$

D'où,

$$d(\phi, T(v)) \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1\|u-v\|_1.$$

Donc,

$$\sup_{\phi\in T(u)} d(\phi, T(v)) \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1\|u-v\|_1$$

Remplaçant u par v, on trouve

$$\sup_{\phi\in T(v)} d(\phi, T(u)) \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1\|u-v\|_1$$

il vient que

$$\mathcal{H}(T(u), T(v)) \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1\|u-v\|_1.$$

Alors, T est une contraction sur $L^1(I,\mathbb{R})$.

Étape 2. Considérons maintenant la multi-application

$$F_1(t,x) = F(t,x) + q(t)[-1,1],\ (t,x)\in I\times\mathbb{R}.$$

$$M_u^1(t) = F_1\left(t, \int_0^1 G(t,s)u(s)ds\right),\ t\in I, u(\cdot)\in L^1(I,\mathbb{R}).$$

$$T_1(u) = \{\psi(\cdot)\in L^1(I,\mathbb{R}),\ \psi(t)\in M_u^1(t)\ p.p.\ (I)\}.$$

Il est claire que $F_1(\cdot,\cdot)$ satisfait les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$. avec l'estimation suivante

$$d(0, F(t,0)) \leq L(t) + |q(t)|,\ p.p.\, t\in I.$$

Procédant de même pour montrer que T_1 est $\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1$-contraction sur $L^1(I,\mathbb{R})$ à valeurs non vides fermées.

Étape 3. Soient $u\in L^1(I,\mathbb{R})$ et $\phi\in T(u)$ et soit $\delta>0$. On définit la multi-application $H_1(\cdot)$ comme suit

$$H_1(t) = M_u^1(t)\cap\big\{z\in\mathbb{R},\ |\phi(t)-z|\leq q(t)+\delta\big\}.$$

Par les mêmes arguments, on constate que $H_1(\cdot)$ est mesurable.

Posons

$$N(t) = \big\{z \in \mathbb{R}, |\phi(t) - z| \leq q(t) + \delta\big\}.$$

N est mesurable puisque

$$\begin{aligned} gph(N) &= \big\{(t,z) \in I \times \mathbb{R}, z \in N(t)\big\} \\ &= \big\{(t,z) \in I \times \mathbb{R}, |\phi(t) - z| \leq q(t) + \delta\big\} \\ &= gph\big(\overline{B}\big(\phi(\cdot), w(\cdot)\big)\big) \end{aligned}$$

qui est mesurable d'après la représentation de Castaing.

Par la Proposition 1.23, $H_1(.)$ est mesurable et de l'hypothèse $\mathbf{H}_2$, $H_1(\cdot)$ est à valeurs non vides fermées .

Par conséquent, il existe $\psi(\cdot)$ une sélection mesurable de H_1 et on a
$\psi(\cdot) \in T_1(u)$.
D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\phi - \psi\|_1 &= \int_0^1 |\phi(t) - \psi(t)| dt \\ &\leq \int_0^1 \big(q(t) + \delta\big) dt \\ &= \int_0^1 q(t)dt + \int_0^1 \delta dt \\ &= \int_0^1 q(t)dt + \delta. \end{aligned}$$

Puisque $\delta > 0$ est arbitrairement choisi et par la définition de la distance de Hausdorff, on trouve

$$\mathcal{H}\big(T(u), T(v)\big) \leq \int_0^1 q(t)dt. \tag{3.8}$$

Nous appliquons la Proposition 3.2, on a T, T_1 sont $\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1$-contractions à valeurs non vides fermées

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\big(Fix(T), Fix(T_1)\big) &\leq \frac{1}{1-\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1} \sup_{u\in L^1(I,\mathbb{R})} H(T(u), T_1(u)) \\ &\leq \frac{1}{1-\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1} \sup_{u\in L^1(I,\mathbb{R})} \int_0^1 q(t)dt. \\ &= \frac{1}{1-\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1} \int_0^1 q(t)dt. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Puisque $-\mathrm{D}_0^\alpha y(\cdot) \in Fix(T_1)$, on a

$$d\big(-\mathrm{D}_0^\alpha y(\cdot), Fix(T)\big) = \inf_{u\in Fix(T)} \| - D_0^\alpha y(\cdot) - u\|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in Fix(T)$, tel que

$$\begin{aligned} d\big(-\mathrm{D}_0^\alpha y(\cdot), Fix(T)\big) &\leq \| - \mathrm{D}_0^\alpha y(\cdot) - u_\varepsilon\|_1 < d(-\mathrm{D}_0^\alpha y(\cdot), Fix(T)) + \varepsilon \\ &< \mathcal{H}\big(Fix(T_1), Fix(T)\big) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\| - \mathrm{D}_0^\alpha y(\cdot) - u_\varepsilon\|_1 \leq \frac{1}{1-\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1} \int_0^1 q(t)dt + \frac{\Gamma(\alpha)}{2}\varepsilon. \tag{3.10}$$

Nous définissons pour tout $t \in I$

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)u(s)ds.$$

On a

$$\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s)u(s) + \int_0^1 G(t,s)D_0^\alpha y(s)ds \right| \\
&= \left| \int_0^1 G(t,s)\Big(u(s) + D_0^\alpha y(s)\Big)ds \right| \\
&\leq \int_0^1 \big|G(t,s)\big|\big|u(s) + D_0^\alpha y(s)\big|ds \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |u(s) + D_0^\alpha y(s)|ds \\
&= \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \|u + D_0^\alpha y\|_1 \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{1 - \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\|L\|_1} \int_0^1 q(t)dt + \frac{\Gamma(\alpha)}{2}\varepsilon \right] \\
&= \frac{2}{\Gamma(\alpha) - 2\|L\|_1}\|q\|_1 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci complète la démonstration du théorème. ■

Remarque 3.7. *L'assertion dans le Théorème 3.6 est satisfaite, en particulier, pour* $y(\cdot) = 0$ *et donc, par l'hypothèse* $(\mathbf{H}_2)$ *avec* $q(\cdot) = L(\cdot)$*. Dans ce cas, le Théorème 3.6 donne un résultat d'existence du problème* $(\mathcal{P})$ *avec une majoration particulière de la solution. Plus précisément, l'estimation (3.7) devient dans ce cas*

$$|x(t)| \leq \frac{2\|L\|_1}{\Gamma(\alpha) - 2\|L\|_1} + \varepsilon, \ \forall\ t \in I.$$

Conclusion

L'objectif principal de ce mémoire est de fournir une vue générale sur la théorie de la différentiation fractionnaire, notamment celle de Riemann-Liouville et de Caputo.

Une attention particulière a été accordée à la fourniture des exemple illustratifs faciles à suivre concernant le calcul des intégrables et des dérivées d'ordre fractionnaire ainsi que leurs applications à la résolutions des équations et même des inclusions différentielles avec des dérivées d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

[1] **B. M. Agnieszka and D. F. M. Torres,** Introduction to the fractional calculus of variations. Bialystok Univ. of technology, Poland, Univ of Aveiro, Portugal (2012).

[2] **M. Aissaoui and M. Ben-Aissa**, L'integrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Mémoire soutenu (2012-2013), Univ. Aboubekre Belkad Tlemcen.

[3] **F. Aliouane,** Cours Fonctions spéciales. Département de mathématiques, Univ. de jijel.

[4] **R. Almeida, P. Shakoor and D. F. M. Torres**, Compulation methods in fractional calculs of variation. Imperial college press, (2015).

[5] **D. Azzam-Laouir,** Cours d'analyse multivoques. LMPA (2009).

[6] **A. Benlabbes,** Sur des problèmes aux conditions aux limites et à dérivées fractionnaires. Thèse (2016), Univ. Sidi Bel Abbès.

[7] **A. Bouaziz**, Sur la théorie des équations différentielles fractionnaires. Thèse (2015), Univ. Badji Mokhtar-Annaba-.

[8] **C. Castaing and M. Valadier,** Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1977).

[9] **A. Cernea,** On a fractional differential inclusion with boundary conditions. Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica,Volume Lv, (2010), 105-113.

[10] **S. Djebali, L. Gorniewicz and A. Ouahab,** Solution sets for differential equations and inclusions. Berlin Boston (2013).

[11] **A. M. A. El-Sayed,** Nonlinear functional differential equations of arbitrary orders. Nonlinear Anal. 33, (1998), 181-186.

[12] **A. M. A. El-Sayed and A.G. Ibrahim,** Multivalued functional differential equations of arbitrary orders. Appl. Math. comput. 68, (1995), 15-25.

[13] **A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi,** Higher transcendental functions. Vol.III, Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).

[14] **D. N. Guermit** , Sur quelques operateurs de dérivations fractionnaires théorie et applications. Mémoire soutenu (2015-2016). Univ. Kas Di Merbah - Ouargla-.

[15] **R. Gorenflo and F. Mainardi,** Essentials of fractional calculus. Preprint submitted to MaPhySto Center, preliminary version, (2000).

[16] **J. Henderson and A. Ouahab,** Fractional functional differential inclusions with finite delay. Nonlinear Anal. Theory, Methods and Applications 70 (5), (2009), 2091-2105.

[17] **M. K. Ishteva,** Properties and applications of the Caputo fractional operators. Thèse (2015). Univ. Karlsruhe.

[18] **K. K. Y. M. Kostiantyn Ralchenko,** Parameter estimation in fractional diffusion models. Mathematics, Statistics, Finance and Economics, Bocconi Univ. Press, (2017)

[19] **R. R. Khalil, M. Al Horani Horani, A. Youcef and M. Sababheh,** A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 264 (2014) 65-70.

[20] **A. A. A. Kilbas, H. M. Srivastara and J. J. Trujillo,** Theory and applications of fractional differential equations. North-holland mathematical studies 204, Ed jan van mill amsterdam, (2006).

[21] **C. F. Li, X. N. Luo and Y. Zhou,** Existence of positive solutions of boundary value problem for nonlinear fractional differential equations. Computers and mathematics with applications, 59 (2010) 1363-1375.

[22] **K. Miller and B. Ross,** An introduction to the fractional clculus and fractional differential equations. John Wiley and Sons Inc., New York, (1993).

[23] **M. Moshrefi-Torbati and J. K. Hammond,** Physical and geometrical interpretation of fractional operators. Elsevier Science, Great Britain, (1998).

[24] **K. B. Oldam and J. Spanier,** The fractional calculs. Academic Press. Inc, (1974).

[25] **A. Ouahab,** Some results for fractional boundary value problem of differential inclusions. Nonlinear Anal. Theory, Methods and Applications 69 (11), (2008), 3877-3896.

[26] **I. Podlubny,** Fractional differential equations, Academic Press, San Diego, (1990).

[27] **I. Podlubny,** Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. Fractional Calculus and Applied Analysis, Vol. 5, (2002), 367-386.

[28] **Y. Rabegh,** Etude de quelques inclusions différentielles d'ordre fractionnaire. Mémoire soutenu (2016-2017). Univ. Dr Tahar Moulay -Saïda-.

[29] **M. D. Slimani,** Dérivation non entiére applications en traitement d'image. Mémoire soutenu (2012). Univ. Mouloud Mammeri -Tizi-ouzou-.

[30] **S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev,** Fractional integrals and derivatives theory and applications. CRC Press, (1993).

[31] **M. Wellbeer,** Efficient numerical methods for fractional differential equations and their Analytical Bachground. Univ. Braunschwei, (2010).

[32] **S. Yessad Mokhtari,** Analyse fractionnaire appliquée aux systèmes différentiels non linéaire. Mémoire soutenu (2012). Univ. Badji Mokhtar -Annaba-.