RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Option : Analyse et Applications

Thème

Une inclusion différentielle avec second membre à valeurs α-convexes

Présenté par :

Amina Chine

Meriem Bekhli

Devant les membres de Jury :

Président :	S. Izza	M.C.B.	Univ. Jijel
Encadreur :	W. Boukrouk	M.C.B.	Univ. Jijel
Examinateur :	B. Saoudi	M.A.A.	Univ. Jijel

Promotion 2016/2017

Remerciements

*D'abord, nous tenons à remercier **Dieu** qui nous a données la volonté et la santé pour finir ce mémoire.*

Nous tenons à remercier vivement et chaleureusement nos chères familles pour leur soutien, leur patience, leurs encouragement et tout ce qu'elles ont fait pour nous au long de cette période.

*Nous remercions chaleureusement notre encadreur Melle **W. Boukrouk**, pour avoir assumé la responsabilité de nous encadrer, nous orienter et de nous conseiller tout au long de la réalisation de ce travail, Nous la remercions très sincèrement pour sa compétence. Ses remarquables conseils divers et riches, qui nous ont été d'une grande utilité pour mener à bien ce travail.*

*Nous tenons à formuler nos remerciements les plus sincères à Melle **S. Izza**, pour avoir accepté la présidence du jury de ce mémoire et pour l'honneur qu'elle nous a fait par sa présence ainsi que Mr **B. Saoudi**, maitre assistant à l'université de Jijel pour avoir accepté d'être membre du jury, avoir examiné et corrigé notre mémoire et nous les remercions aussi pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail.*

Un grand merci à tous les enseignants du département de Mathématiques.

Meriem** et **Amina

Dédicace

*Premièrement "**Alhamdo-lilah**" qui m'a donneé la force et la volonté pour continuer et réaliser ce travail.*
*Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention, conscient d'un grand nombre de personnes pour ça, je dédie ce modeste travail au ces prersonnes . Je commence par mes chères parents ma mère "**Fatiha**" et mon père "**Youcef**" de leur tendresse et compassion. Je remercie chaleuresement mes frères et mes sœurs qui me donnés toujours la confiance et l'aide, et n'oublie pas ma chère amie "**Amina**" qui j'ai partagé avec elle des belles moments, je la dis merci.*
*Et en fin je remercie tous mes amis et mes collégues particulierement "**Karima**" pour l'encouragement qu'elle m'a donnée durant ces années.*

Meriem

Dédicase

*Au nom du Allah je dédice ce modeste travail à celui qui ma guidée, le sumbole de la tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma trés chère **Mère**.*

***À** mon cher Père **Iliess**, rahimaho allah. (Que dieu l'accueil dans son vaste paradis).*

***À** mon cher frère **Khaled**, et mon fiancé **Aimad**.*
***À** mes chers oncles, tantes, leurs epoux et epouses, A mes chers cousins cousines et toute la **famille**.*

*Une spécialle dédicace à mon binôme **Meriem** et tous mes amies, en souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble.*
À** tous mes collégues de **Analyse
À** tous mes collégues de **Mathématiques

***À** tous ce qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer.*

Amina

Table des matières

Notations générales

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$\mathbb{R}^d$	L'ensemble des vecteurs de dimension d, à coordonnées réelles.
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\parallel x \parallel$	La norme de $x \in \mathbb{R}^d$ définie par : $\parallel x \parallel = \sum\limits_{i=0}^{n} \mid x_i \mid$.
(X, d_X)	l'espace métrique X muni de la distance d_X.
$\mathcal{V}_X(x_0)$	Le voisinage de x_0 dans l'espace métrique X.
$\overline{A}$	L'adhérence de A.
∂A	La frontière de A.
$diam(A)$	Le diamètre de A définit par $diam(A) = \sup\limits_{a,a' \in A} (a, a')$.
C_X^A	Le complémentaire de l'ensemble A dans X.
$F_{\mid I}$	La restriction de F à I.
$D(F)$	Le domaine effectif de la multi-application F.
$Im(F)$	L'image de la multi-application F.
$gph(F)$	Le graphe de la multi-application F.
Σ	La tribu $(\sigma -$ algèbre).
$d\mu(t)$ ou dt	La mesure de Lebesgue.
$\mathcal{B}(X)$	La tribu borélienne sur X.
$\mathcal{P}_f(X)$	L'ensemble des parties fermées de X.
$Comp(X)$	La famille des sous ensembles non vides compacts de X.
$S(F)$	L'ensemble des séléctions intégrables de F.
$\mathcal{F}(X, Y)$	L'ensemble de toutes les applications définies de X dans Y
$C_X([a, b])$	L'espace de toutes les applications continues $U : [a, b] \to X$, muni de la distance de la convergence uniforme définie pour tous U, V par $d_\infty(U, V) = \sup\limits_{t \in [a,b]} d_X(U(t), V(t))$.

$C^1_X([a,b])$	L'espace de toutes les applications continues $U:[a,b]\to X$, qui sont dérivables au sens de Hukuhara, et leurs dérivées sont continues.
$\mathcal{X}^1_X([a,b])$	L'espace de toutes les applications absolument continues de $[a,b]$ dans X.
$cc(X)$	La famille des sous ensembles non vides, compacts et convexes de X (si X est un espace espace vectoriel normé).
$\overline{B}_{cc(X)}(A_0,r)$	La boule fermée de centre A_0 et de rayon r tel que $\overline{B}_{cc(X)}(A_0,r)=\{A\in cc(X);\mathcal{H}(A_0,A)\leq r\}$.
$Co(A)$	L'enveloppe convexe de A.
$A+B$	L'addition de Minkowski définit par $A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$.
λA	La multiplication de Minkowski définit par $\lambda A=\{\lambda a:a\in A,\lambda\in\mathbb{R}\}$.
$\overline{B}_X(B_X)$	La boule fermée (ouverte) unité de X.
$\overline{B}_X(x_0,r)(B_X(x_0,r))$	La boule fermée (ouverte) de centre x_0 et de rayon r.
$\overline{\mathcal{N}}_X(\mathcal{A},r)(\mathcal{N}_X(\mathcal{A},r))$	Le r-voisinage fermé (ouvert) de $\mathcal{A}$ tel que $\overline{\mathcal{N}}_X(\mathcal{A},r)=\{A\in X;d(A,\mathcal{A})=\inf\limits_{B\in\mathcal{A}}d_X(A,B)\leq r\}$.

Introduction générale

Au cours des dernières années, le developpement du calcul dans les espaces métriques a attiré une certaine attention ([1], [16]). Plusieurs concepts de l'analyse vectorielle ont été étendus à l'analyse dans les espaces métriques, y compris celle de "convexité" puisque cette dernière joue un rôle fondamental dans différents problèmes Mathématiques. Dans le cas des espaces non vectoriels, en l'absence d'une notion naturelle d'ensemble convexe, plusieurs approches de convexité "abstraite" sont apparues en litérature pour généraliser la notion naturelle, motivés la plupart du temps par le problème d'existence de points fixes et aussi la construction de sélections continues pour les applications, donc la résolution des équations et des inclusions différentielles. Notons que la première équation différentielle dans le cadre d'un espace non vectoriel a été considéré en 1969 par De Blasi et Iervolino ([10]) comme un point de départ d'une nouvelle théorie. Les résultats en général sont analogues aux résultats obtenus dans la théorie classique, dans le cas des espaces vectoriels. Ceci a mené aussi à l'apparition des inclusions différentielles dans les espaces métriques puisque celles ci représentent une généralisation des équations différentielles et aussi des alternatives en ce qui concerne la modélisation des phénomènes en mode Mathématique.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à une inclusion différentielle du premier ordre où le second membre prend ces valeurs dans un espace métrique, il s'agit de l'espace constitué des parties non vides, convexes, compactes de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$ noté $cc(\mathbb{R}^d)$. Celui-ci possède une structure de convexité abstraite appellée "α-convexe". On y trouve aussi de notion de dérivée et une intégrale appropriées.

Ce mémoire est composé de trois chapitres, dans le premier, nous présentons quelques notions et propriétés concernant l'espace $cc(\mathbb{R}^d)$, et nous rappelons quelques notions de l'analyse multivoque, tous ces concepts nous les utilisons au long de notre travail. En suite, dans le deuxième chapitre, nous présentons la notion de convexité abstraite d'une manière générale et dans notre espace $cc(\mathbb{R}^d)$ en particulier, ainsi que la dérivée et l'intégrale que nous avons utilisées. Nous terminons, par appliquer toutes ces notions dans le dernier chapitre, en présentons un théorème d'existence de solution pour une inclusion différentielle du premier ordre dans l'espace $cc(\mathbb{R}^d)$. Il s'agit d'un résultat donné par F.S De Blasi,V.Lakshmikantham et T.Gnana Bhaskar dans [9] dont nous détaillons la démonstration.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre, nous présentons quelques notions concernant l'espace constitué des parties non vides convexes compactes de l'éspace $\mathbb{R}^d$, noté $cc(\mathbb{R}^d)$ en passant par ses propriétés en tant qu'un espace métrique semi-vectoriel. Nous rappellons aussi quelques définitions et théorèmes concernant l'analyse multivoque. Tous ces concepts nous permeterons d'établir la notion d'une inclusion différentielle dans l'espace métrique $cc(\mathbb{R}^d)$.

1.1 L'espace $cc(\mathbb{R}^d)$

La distance de Hausdorff

Définition 1.1.1 *Soient A, B deux ensembles d'un espace métrique (X, d_X), l'écart entre A et B est définit par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d_X(a, B),$$

avec

$$d_X(a,\, B) = \inf_{b \in B} d_X(a,\, b),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définit par

$$\mathcal{H}(A,\, B) = \max\{e(A,\, B),\, e(B,\, A)\}.$$

Propriétés élémentaires.

1. $e(A,\, \emptyset) = \infty$ si $A \neq \emptyset$,

2. $e(\emptyset,\, B) = 0$,

3. $e(A,\, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$,

4. $e(A,\, B) \leq e(A,\, C) + e(C,\, B)$, C un sous ensemble de X,

5. $\mathcal{H}(A,\, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,

6. $\mathcal{H}(A,\, B) \leq \mathcal{H}(A,\, C) + \mathcal{H}(C,\, B)$.

$P_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$, est un espace métrique. Où $P_f(X)$ est l'ensemble des parties fermées de X.

• Si (X, d_X) est complet, alors $(P_f(X), \mathcal{H})$ et $(Comp\ (X), \mathcal{H})$ le sont aussi.

• Si X est séparable, alors $(Comp\ (X), \mathcal{H})$ l'est aussi.

Définition 1.1.2 ([*21*]) *Pour un ensemble $A \in cc(\mathbb{R}^d)$, on appelle fonction d'appui de A, la fonction $\delta^*(., A) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\delta^*(x, A) = \sup\{\langle x, y\rangle \,:\, y \in A\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

$\langle ., .\rangle$ est le produit scalaire Euclidien.

Proprietés

Pour $x \in \mathbb{R}^d,\ A, B \in cc(\mathbb{R}^d)$, on a

- $\delta^*(x, A + B) = \delta^*(x, A) + \delta^*(x, B)$.
- $\delta^*(x, \alpha A) = \alpha\delta^*(x, A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Lemme 1.1.1 ([*23*], *Théorème* 1.1.9) *Pour tous $A,\, B \in cc(\mathbb{R}^d)$ nous avons*

1. $e(A, B) = \sup\limits_{x \in \overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{\delta^*(x, A) - \delta^*(x, B)\}$.

2. $\mathcal{H}(A, B) = \sup\limits_{x \in \overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{|\delta^*(x, A) - \delta^*(x, B)|\}$.

Définition 1.1.3 *Pour $A \in Comp(\mathbb{R}^d)$, on définit la magnitude de A, notée $|||A|||$, par*

$$|||A||| := \mathcal{H}(A, \{0_{\mathbb{R}^d}\}).$$

Il est clair que

$$|||A||| = e(A, \{0_{\mathbb{R}^d}\}) = \sup_{x \in A} ||x||.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} e(A,\{0_{\mathbb{R}^d}\}) &= \sup_{x\in A} d(x,\{0_{\mathbb{R}^d}\}) \\ &= \sup_{x\in A} \inf_{y\in\{0_{\mathbb{R}^d}\}} d(x,y) \\ &= \sup_{x\in A} d(x,0_{\mathbb{R}^d}) \\ &= \sup_{x\in A} ||x||, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e(\{0_{\mathbb{R}^d}\},A) &= \sup_{y\in\{0_{\mathbb{R}^d}\}} d(y,A) \\ &= d(0_{\mathbb{R}^d},A) \\ &= \inf_{x\in A} d(0_{\mathbb{R}^d},x) \\ &= \inf_{x\in A} ||x||, \end{aligned}$$

donc nous obtenons,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A,\{0_{\mathbb{R}^d}\}) &= \max\Big(e(A,\{0_{\mathbb{R}^d}\}), e(\{0_{\mathbb{R}^d}\},A)\Big) \\ &= \max\Big(\sup_{x\in A}(||x||), \inf_{x\in A}(||x||)\Big) \\ &= \sup_{x\in A}(||x||) = e(A,\{0_{\mathbb{R}^d}\}). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lemme 1.1.2 *Pour tous A, B, C, $D \in cc(\mathbb{R}^d)$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$, nous avons*

P1) $\mathcal{H}(A+C,B+C) = \mathcal{H}(A,B)$.

P2) $\mathcal{H}(A+B,C+D) \le \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(B,D)$.

P3) $\mathcal{H}(\alpha A,\alpha B) = |\alpha|\mathcal{H}(A,B)$.

P4) $\mathcal{H}(\alpha A,\beta A) = |\alpha-\beta|\mathcal{H}(A,\{0_{\mathbb{R}^d}\})$.

Démonstration.

P1) Par (2) du Lemme 1.1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(A+C,B+C) &= \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{|\delta^*(x,A+C)-\delta^*(x,B+C)|\} \\
&= \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{|\delta^*(x,A)+\delta^*(x,C)-\delta^*(x,B)-\delta^*(x,C)|\} \\
&= \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{|\delta^*(x,A)-\delta^*(x,B)|\} = \mathcal{H}(A,B).
\end{aligned}$$

P2) Par la relation $P1$), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(A+B,C+D) &\leq \mathcal{H}(A+B,C+B)+\mathcal{H}(C+B,C+D) \\
&= \mathcal{H}(A,C)+\mathcal{H}(B,D).
\end{aligned}$$

P3) Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\alpha A,\alpha B) &= \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{|\delta^*(x,\alpha A)-\delta^*(x,\alpha B)|\} \\
&= \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{|\alpha\delta^*(x,A)-\alpha\delta^*(x,B)|\} \\
&= |\alpha| \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{|\delta^*(x,A)-\delta^*(x,B)|\} \\
&= |\alpha|\mathcal{H}(A,B).
\end{aligned}$$

P4) Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\alpha A,\beta A) &= \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{|\delta^*(x,\alpha A)-\delta^*(x,\beta A)|\} \\
&= \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{|\alpha\delta^*(x,A)-\beta\delta^*(x,A)|\} \\
&= \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}} |\alpha-\beta|\delta^*(x,A) \\
&= |\alpha-\beta| \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}} \{|(\delta^*(x,A)-\delta^*(x,\{0_{\mathbb{R}^d}\})|\} \\
&= |\alpha-\beta|\mathcal{H}(A,\{0_{\mathbb{R}^d}\}).
\end{aligned}$$

■

Si X est un espace de Banach, alors

Lemme 1.1.3 *Soient A, $B \in Comp(X)$ nous avons,*

$$\mathcal{H}(Co(A), Co(B)) \leq \mathcal{H}(A, B).$$

Démonstration. Nous avons $Co(A+B) = Co(A)+Co(B)$, $Co(A+C) = Co(A)+Co(C)$.
Donc

$$e(Co(A) + Co(B), Co(A) + Co(C)) = e(Co(A + B), Co(A + C)).$$

Et d'après le Lemme 1.1.2,

$$e(Co(B), Co(C)) = e(Co(A + B), Co(A + C)).$$

D'autre part, soient D, E deux ensembles compacts de $\mathbb{R}^d$ et $\overline{B}_{\mathbb{R}^d}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$.
Alors

$$D \subset E + e(D, E)\overline{B}_{\mathbb{R}^d}.$$

Donc

$$Co(D) \subset Co(E) + e(D, E)\overline{B}_{\mathbb{R}^d} \Longrightarrow e(Co(D), Co(E)) \leq e(D, E).$$

En prenant $D := A + B,\ E := A + C$, on obtient

$$e(Co(A + B), Co(A + C)) \leq e(A + B, A + C),$$

d'où

$$e(Co(B), Co(C)) \leq e(A + B, A + C) = e(B, C).$$

Par la même méthode on montre que $e(Co(C), Co(B)) \leq e(C, B)$. Donc nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(Co(B), Co(C)) &= \max(e(Co(B), Co(C)), e(Co(C), Co(B))) \\ &\leq \max(e(B, C), e(C, B)) \\ &= \mathcal{H}(B, C). \end{aligned}$$

■

Lemme 1.1.4 *$cc(X)$ est un sous-ensemble fermé de l'espace métrique $(Comp(X), \mathcal{H})$.*

Démonstration. Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $cc(X)$ qui converge dans $(Comp(X), \mathcal{H})$ vers un élément $A \in Comp(X)$. Comme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A, Co(A)) &\leq \mathcal{H}(A, A_n) + \mathcal{H}(A_n, Co(A)) \quad \textit{pour tout } n = 1, 2, \ldots \\ &= \mathcal{H}(A, A_n) + \mathcal{H}(Co(A_n), Co(A)).\end{aligned}$$

Par le Lemme 1.1.3, nous obtenons, $\mathcal{H}(A, Co(A)) \leq 2\mathcal{H}(A_n, A)$. Donc $A = Co(A)$. ■

Considérons maintenant les deux familles $cc(\mathbb{R}^d)$ et $Comp(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.1.1 *$(cc(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$ est un espace métrique complet et séparable.*

En effet, Comme $(\mathbb{R}^d, d_{\mathbb{R}^d})$ est complet alors $(Comp(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$ est complet. D'après le Lemme 1.1.4, $(cc(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$ est complet. D'autre part, $cc(\mathbb{R}^d)$ est séparable car c'est un sous-espace métrique de $Comp(\mathbb{R}^d)$ qui est séparable puisque $\mathbb{R}^d$ l' est. ■

Lemme 1.1.5 *([15], Proposition 3) Si (X, d_X) est un espace métrique, alors une famille de compactes de X contenus dans un compact de X est une partie compacte de $Comp(X)$.*

Remarque 1.1.1 *Dans l'espace $(cc(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$, pour tout $r > 0$ et tout $A_0 \in cc(\mathbb{R}^d)$, la boule fermée $\overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(A_0, r)$ est compacte.*

En effet, les éléments de la boule $\overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(A_0, r)$ sont des compacts de $\mathbb{R}^d$, de plus, ils sont contenus dans $\overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r + |||A_0|||)$ qui est un compact de $\mathbb{R}^d$, puisque

$$\begin{aligned} A \in \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(A_0, r) \Leftrightarrow \mathcal{H}(A, A_0) \leq r \quad &\Rightarrow \quad |||A||| = \mathcal{H}(A, \{0_{\mathbb{R}^d}\}) \leq \mathcal{H}(A, A_0) + |||A_0||| \leq r + |||A_0||| \\ &\Leftrightarrow \quad \max_{a \in A} ||a|| \leq r + |||A_0||| \\ &\Leftrightarrow \quad A \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r + |||A_0|||). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'aprés le Lemme 1.1.5, $\overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(A_0, r)$ est compacte dans $(Comp(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$ et donc dans $(cc(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$.

1.2 Différence de Hukuhara

Définition 1.2.1 *Soient A, $B \in cc(\mathbb{R}^d)$, on dit que l'ensemble C est la différence de Hukuhara ou simplement H-différence entre A et B si $A = B + C$. On le note par*

$C := A \ominus B$.
Notons que $A \ominus B \neq A - B$.

Lemme 1.2.1 ([*20*], *Lemma* 1) *Soient* A, B, C *des parties d'un espace vectoriel normé. Supposons que* B *est convexe fermé, et* C *est non vide et borné. Si* $A + C \subset B + C$ *alors* $A \subset B$.

Corollaire 1.2.1 *Soient* A, B *deux ensembles fermés convexes dans un espace vectoriel normé. Soit* C *un ensemble borné dans* X, *si* $A + C = B + C$ *alors* $A = B$.

En effet, $A + C = B + C \Longrightarrow A + C \subset B + C$ et $B + C \subset A + C$. Par le Lemme 1.2.1, nous obtenons $A \subset B$ *et* $B \subset A \Longrightarrow A = B$. ■

Corollaire 1.2.2 *Si* $C \in cc(\mathbb{R}^d)$ *est la H-différence entre* A, $B \in cc(\mathbb{R}^d)$, *alors* C *est déterminée de façon unique.*

En effet, supposons que $A \ominus B$ est satisfaite pour C et D, i.e. $A = B + C$ et $A = B + D$, alors, $B + C = B + D$. Par le Corollaire 1.2.1, nous obtenons $C = D$. ■

Proposition 1.2.1 ([*14*]) *Soient* A *et* B *des compacts convexes de* $\mathbb{R}^d$. *Pour que la différence de Hukuhara* $A \ominus B$ *existe, il est nécessaire et suffisant d'avoir la condition suivante.*
Si $a \in \partial A$, *il existe au moins un point* $c \in \mathbb{R}^d$ *tel que*

$$a \in B + c \subset A. \tag{1.1}$$

Démonstration.

Nécessité. En effet, si $A \ominus B$ existe, alors il existe $C \in cc(\mathbb{R}^d)$, tel que $A = B + C$. Soit $a \in \partial A \subset \overline{A} = A = B + C$. D'où l'existence de $b \in B, c \in C$ tels que $a = b + c$. Puisque $b \in B$ nous avons $b + c \in B + c$, i.e. $a \in B + c$. Et puisque $c \in C$, nous avons $B + c \subset B + C = A$. Donc (1.1) est vérifiée.

Suffisance. Supposons que (1.1) est vérifiée pour A et B, et considérons l'ensemble

$$C := \{c \in \mathbb{R}^d : B + c \subset A\}.$$

Nous avons $C \in cc(\mathbb{R}^d)$. En effet, on sait que ($\partial A \neq \emptyset \Leftrightarrow A$ n'est pas ouvert et fermé à la fois). On sait aussi que $\mathbb{R}^d$ est convexe d'où, il est connexe par arcs et par suite il

est connexe, par conséquent, les seules parties ouvertes et fermées à la fois dans $\mathbb{R}^d$ sont l'ensemble $\emptyset$ et $\mathbb{R}^d$ lui même. Mais, A est non vide, et il est compact donc différent de $\mathbb{R}^d$. On conclut que $\partial A \neq \emptyset$, donc il existe $a \in \partial A$, et d'après proposition 1.2.1, il existe $c \in \mathbb{R}^d$ tel que $a \in B + c \subset A$, donc $c \in C$, d'où la non vacuité de C.
Nous considérons l'application $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(c) = e(B + c, A).$$

Soit $(c_n)_n \subset \mathbb{R}^d$ une suite convergente vers $c \in \mathbb{R}^d$. Pour tout n, nous avons

$$|F(c_n) - F(c)| = |e(B + c_n, A) - e(B + c, A)| \leq e(\{c_n\}, \{c\}) = d_{\mathbb{R}^d}(c_n, c).$$

donc,

$$\lim_{n \to +\infty} |e(B + c_n, A) - e(B + c, A)| = 0,$$

d'où la continuité de F. Nous avons $C = F^{-1}(\{0\})$. Maintenant si d et $d' \in C$, et $\lambda \in [0, 1]$, alors $e(B+d, A) = 0$ et $e(B+d', A) = 0$. Puisque A et B sont convexes, $\lambda B+(1-\lambda)B = B$ et $\lambda A + (1 - \lambda)A = A$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} e\left(B + \lambda d + (1 - \lambda)d', A\right) &= e\left(\lambda(B + d) + (1 - \lambda)(B + d'), \lambda A + (1 - \lambda)A\right) \\ &\leq \lambda e(B + d, A) + (1 - \lambda)e(B + d', A) = 0, \end{aligned}$$

et donc $e(B + \lambda d + (1 - \lambda)d', A) = 0$ i.e. $\lambda d + (1 - \lambda)d' \in C$, d'où la convexité de C. L'ensemble C est aussi compact puisque il est fermé borné dans $\mathbb{R}^d$.
En effet, par la continuité de F, $F^{-1}(\{0\})$ est fermé de $\mathbb{R}^d$, d'où la fermeture de C.
Maintenant, puisque A et B sont bornés, il existe $M_1, M_2 > 0$ tels que

$$|||A||| = \max_{a \in A} ||a|| \leq M_1 \quad et \quad |||B||| = \max_{b \in B} ||b|| \leq M_2.$$

Soit $c \in C$. Pour $b \in B$, nous avons $b + c \in A$, d'où $||c + b|| \leq M_1$, donc

$$||c|| = ||c + b - b|| \leq ||c + b|| + ||b|| \leq M_1 + M_2,$$

d'où la bornitude de C. Maintenant, il suffit de montrer que $B + C = A$. Nous avons pour tout $c \in C$, $B + c \subset A$ donc $B + C \subset A$. D'autre part, Soit $u \in A$. Une droite passant

par u rencontre ∂A en deux points a et a' (c'est à dire si $R = \{\beta u + (1-\beta)c / \beta \in \mathbb{R}\}$, avec $c \in \mathbb{R}^d$, alors il existe $a, a' \in R$ tels que $a, a' \in \partial A$).
Puisque $a, a' \in \partial A$, d'aprés la relation (1.1), il existe d et d' tels que

$$a \in B + d \subset A, \quad et \quad a' \in B + d' \subset A.$$

donc $d, d' \in C$. Nous avons, $u \in [a, a']$, donc on peut écrire $u = (1-\lambda)a + \lambda a'$ avec $0 < \lambda < 1$ d'où,

$$u \in (1-\lambda)(B+d) + \lambda(B+d') = (1-\lambda)B + \lambda B + (1-\lambda)d + \lambda d' = B + c,$$

avec $c = (1-\lambda)d + \lambda d' \in C$. Par conséquent, $u \in B + c$, i.e. $A \subseteq B + C$. Ainsi $A = B + C$ et la preuve est terminée. ■

Proposition 1.2.2 *Soient $A, B, C, D \in cc(\mathbb{R}^d)$, nous avons les propriétés suivantes*

1. $A \ominus A = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ *et* $A \ominus \{0_{\mathbb{R}^d}\} = A$.
2. *Si $A \ominus B$ existe, alors*

$$(A \ominus B) + C = C + (A \ominus B) = (C + A) \ominus B = (A + C) \ominus B.$$

3. *Si $A \ominus B$ existe, alors $\lambda A \ominus \lambda B$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et nous avons*

$$\lambda(A \ominus B) = \lambda A \ominus \lambda B.$$

4. *Pour tous $\lambda, \beta \geq 0$, si $\lambda \geq \beta$, alors $\lambda A \ominus \beta A$ existe et $\lambda A \ominus \beta A = (\lambda - \beta)A$.*
5. *Si $A \ominus B$ existe, alors $|||A \ominus B||| = \mathcal{H}(A, B)$.*
6. *Si $A \ominus B, A \ominus C$ existent, alors $\mathcal{H}(A \ominus B, A \ominus C) = \mathcal{H}(B, C)$.*
7. *Si $A \ominus B, C \ominus D$ existent, alors $\mathcal{H}(A \ominus B, C \ominus D) = \mathcal{H}(A + D, B + C)$.*
8. *Si $(A + B) \ominus C$ et $B \ominus C$ existent, alors $(A + B) \ominus C = A + (B \ominus C)$, par contre, il suffit que $B \ominus C$ existe pour que $(A + B) \ominus C$ existe et que $(A + B) \ominus C = A + (B \ominus C)$.*
9. *Si $A \ominus B, A \ominus C$ et $C \ominus B$ existent, alors $(A \ominus B) \ominus (A \ominus C)$ existe et*

$$(A \ominus B) \ominus (A \ominus C) = C \ominus B.$$

10. *Si $(A + B) \ominus (A + C)$ existe, alors $B \ominus C$ existe et $(A + B) \ominus (A + C) = B \ominus C$.*

11. *Si $A \ominus C, B \ominus D$ existent, alors $(A+B) \ominus (C+D)$ existe et $(A+B) \ominus (C+D) = (A \ominus C) + (B \ominus D)$.*

Démonstration.

1. Nous avons $A = A + \{0_{\mathbb{R}^d}\}$, d'où $A \ominus A$ existe et $A \ominus A = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$.

   D'autre part, $A = \{0_{\mathbb{R}^d}\} + A$ donc $A \ominus \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ existe et $A \ominus \{0_{\mathbb{R}^d}\} = A$.

2. Puisque $A \ominus B$ existe, alors il existe $D_1 \in cc(\mathbb{R}^d)$ telque $A = B + D_1$; $A \ominus B := D_1$. on a

$$\begin{aligned} A = B + D_1 \quad &\Longrightarrow \quad C + A = C + B + D_1 \\ &\Longleftrightarrow \quad C + A = B + C + D_1 \end{aligned}$$

   Donc, il existe $D_2 = C + D_1$ telque $C + A = B + D_2$ avec $D_2 := (C + A) \ominus B$

   $D_1 + C = (C + A) \ominus B \Longrightarrow (A \ominus B) + C = (C + A) \ominus B$

   $(C + A) \ominus B = (A + C) \ominus B \qquad$ (de la commutativité).

3. Si $A \ominus B$ existe, alors il existe $C \in cc(\mathbb{R}^d)$ tel que $A = B + C$ avec $C := A \ominus B$, donc, $\lambda A = \lambda(B + C) = \lambda B + \lambda C$, d'où $\lambda A \ominus \lambda B$ existe et

$$\lambda A \ominus \lambda B = \lambda C = \lambda(A \ominus B).$$

4. Nous avons, $\lambda A = (\lambda - \beta + \beta)A = (\lambda - \beta)A + \beta A = \beta A + (\lambda - \beta)A$. On conclut que, $\lambda A \ominus \beta A$ existe et $\lambda A \ominus \beta A = (\lambda - \beta)A$.

5. Si $A \ominus B$ existe, alors il existe $C \in cc(\mathbb{R}^d)$ tel que $A = B + C$ avec $C := A \ominus B$. Donc, $\mathcal{H}(A, B) = \mathcal{H}(B + C, B)$, et d'après $P1)$ du Lemme 1.1.2,

$$\mathcal{H}(B + C, B) = \mathcal{H}(C, \{0_{\mathbb{R}^d}\}) = |||C||| = |||A \ominus B|||.$$

6. Si $A \ominus B$, $A \ominus C$ existent, alors il existe $D_1, D_2 \in cc(\mathbb{R}^d)$ tels que $A = B + D_1$, $A = C + D_2$ avec $D_1 := A \ominus B$, $D_2 := A \ominus C$. D'où,

$$B + D_1 = C + D_2.$$

D'après la propriété $P1)$ du Lemme 1.1.2 et la dernière égalité,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(B,C) &= \mathcal{H}(B+D_1, C+D_1)\\ &= \mathcal{H}(C+D_2, C+D_1)\\ &= \mathcal{H}(D_2, D_1)\\ &= \mathcal{H}(A\ominus B, A\ominus C).\end{aligned}$$

7. $A\ominus B$ existe, donc il existe $D_1\in cc(\mathbb{R}^d)$ telque $A=B+D_1$ avec $D_1:=A\ominus B$, $C\ominus D$ existe, d'où il existe $D_2\in cc(\mathbb{R}^d)$ telque $C=D+D_2$ avec $D_2:=C\ominus D$. Grâce à P1) du Lemme 1.1.2, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A+D, B+C) &= \mathcal{H}(B+D_1+D, B+D+D_2)\\ &= \mathcal{H}(D_1, D_2)\\ &= \mathcal{H}(A\ominus B, C\ominus D).\end{aligned}$$

8. $B\ominus C$ existe, alors il existe $D_2\in cc(\mathbb{R}^d)$ telque $B=C+D_2$ avec $D_2:=B\ominus C$. $B=C+D_1 \Longrightarrow A+B=A+C+D_2 \Longleftrightarrow (A+B)\ominus C=A+D_2=A+(B\ominus C)$.
9. $A\ominus B$ existe, alors il existe $D_1\in cc(\mathbb{R}^d)$, tel que $A=B+D_1$ avec $D_1:=A\ominus B$, $A\ominus C$ existe, alors il existe $D_2\in cc(\mathbb{R}^d)$, tel que $A=C+D_2$ avec $D_2:=A\ominus C$, $C\ominus B$ existe, alors il existe $D_3\in cc(\mathbb{R}^d)$, tel que $C=B+D_3$ avec $D_3:=C\ominus B$. Donc $B+D_1=C+D_2=(B+D_3)+D_2$, d'où par le Corollaire 1.2.1, $D_1=D_3+D_2=D_2+D_3$,
   donc $A\ominus B=(A\ominus C)+(C\ominus B)$, i.e. $(A\ominus B)\ominus(A\ominus C)$ existe et

$$(A\ominus B)\ominus(A\ominus C)=C\ominus B.$$

10. Si $(A+B)\ominus(A+C)$ existe, alors il existe $D\in cc(\mathbb{R}^d)$ tel que $(A+B)=(A+C)+D$ avec $D:=(A+B)\ominus(A+C)$. Nous avons,

$$A+B=(A+C)+D=A+(C+D),$$

d'où $B=C+D$, donc $B\ominus C$ existe et $B\ominus C=(A+B)\ominus(A+C)$.

11. Si $A \ominus C$, $B \ominus D$ existent, alors il existent $D_1, D_2 \in cc(\mathbb{R}^d)$ tels que $A = C + D_1$, $B = D + D_2$ avec $D_1 := A \ominus C$, $D_2 := B \ominus D$. Donc,

$$A + B = C + D + D_1 + D_2,$$

d'où, $(A + B) \ominus (C + D)$ existe et $(A + B) \ominus (C + D) = (A \ominus C) + (B \ominus D)$. ■

1.3 Quelques notions de mesurabilité

Définition 1.3.1 *Soient X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$.
3. $A_n \in \Sigma,\ \forall n \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma$.

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.
Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X.
Si X est un espace topologique, la tribu de Borel sur X notée $\mathcal{B}(X)$ est la plus petite tribu sur X contenant la topologie de X.

Définition 1.3.2 *Soient (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables et g une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2, on dit que g est (Σ_1, Σ_2)-mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2$, $g^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
Si X_2 est un espace topologique, une fonction $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_2))$-mesurable est dite fonction Borélienne.

Définition 1.3.3 *Soit (X, Σ) un espace mesurable. Alors, l'application $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur X si*

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. $\nu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$, *pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

Le triplet (X, Σ, ν) *est appelé espace mesuré.*
Si $\nu(A) \geq 0$, *pour tout* $A \in \Sigma$, *on dit que* ν *est une mesure positive et on note* $\nu \geq 0$, *ou que l'espace* (X, Σ, ν) *est positif.*
Si $\nu(A) < \infty$, *pour tout* $A \in \Sigma$, *on dit que* ν *est une mesure finie ou que l'espace* (X, Σ, ν) *est fini.*
Si X *est un espace topologique, la mesure* $\sigma-$*finie* $\nu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ *est appelée mesure Borélienne.*

Définition 1.3.4 *Soit* X *un espace topologique séparé et* ν *une mesure Borélienne. Alors,* ν *est dite régulière si pour tout* $A \in \mathcal{B}(X)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* C *et un fermé* G *de* X, *tels que* $G \subset A \subset C$ *et* $\nu(C \setminus G) \leq \varepsilon$.

Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.

Définition 1.3.5 *Soit* (X, Σ, ν) *un espace mesuré avec* $\nu \geq 0$. *Soit* Z *un sous ensemble de* X. *On dit que* Z *est* ν*-négligeable ou négligeable (si il n'y a pas de risque de confusion), s'il existe* $A \in \Sigma$ *tel que* $Z \subset A$ *et* $\nu(A) = 0$.
On dit qu'une propriété sur X *est vraie* ν*-presque partout* (ν*.p.p*) *si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est* ν*-négligeable.*
La tribu ν*-complétée de* Σ *notée* Σ_ν *est la tribu engendrée par* Σ *et les ensembles* ν*-négligeables, c'est à dire*

$$\Sigma_\nu = \{A \cup Z / \, A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \nu\text{-négligeable}\}.$$

La tribu Σ *est dite complète si* $\Sigma = \Sigma_\nu$, *c'est à dire, si tout ensemble* ν*-négligeable est mesurable.*

Définition 1.3.6 *Soit* (X, Σ, ν) *un espace mesuré avec* ν *finie. Notons* $\Sigma^* := \Sigma_\nu$ *et soit* $\nu^* : \Sigma^* \to \overline{\mathbb{R}}$ *définie par* $\nu^*(A \cup Z) = \nu(A)$, *pour tout* $A \in \Sigma$ *et tout* Z ν*-négligeable. Alors* (X, Σ^*, ν^*) *est un espace mesuré avec* ν^* *finie et complète et on a* $\nu^* = \nu$ *sur* Σ.
(X, Σ^*, ν^*) *est appelé l'extension de Lebesgue de l'espace mesuré* (X, Σ, ν).

Théorème 1.3.1 *Soient* X *un espace topologique compact,* Σ *une algèbre sur* X *et* $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction additive, régulière et bornée. Soit* $\widetilde{\Sigma}$ *la plus petite tribu sur* X *contenant* Σ. *Alors, il existe une mesure unique* $\widetilde{\nu} : \widetilde{\Sigma} \to \overline{\mathbb{R}}$ *régulière, bornée et qui prolonge* ν *à* $\widetilde{\Sigma}$.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Généralement la mesure de Lebesgue c'est la mesure la plus importante et la plus utilisée en analyse, dans $\mathbb{R}$ on mesure la "longueur", dans $\mathbb{R}^2$ la "surface", dans $\mathbb{R}^3$ le "volume", etc...

Le cas de $\mathbb{R}$. Soient t_0, t_1 deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$, $J = [t_0, t_1]$ et Σ la famille des sous ensembles de J de la forme $\{t_0\} = [t_0, t_0]$, $]t', t'']$, pour $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$, et les unions finies de ces intervalles. Il est clair que Σ est une algèbre sur J. Définissons $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ par

$$\mu(\{t_0\}) = 0, \quad \mu(\,]t', t''\,]\,) = t'' - t' \quad et \quad \mu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j),$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et A_j des intervalles disjoints de la forme considérée.

Définition 1.3.7 *Si on prend $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors Σ^* est appellé la tribu de Lebesgue et est notée par $\mathcal{L}$ et la mesure $\mu^* : \mathcal{L} \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\mu^*(A) = \inf\big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n);\quad (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A\big\}$ avec $E_A = \big\{(I_n)_{n\in\mathbb{N}};\ I_n =]a_n, b_n[, -\infty < a_n \leq b_n < \infty, \quad n \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\big\}$ est appelé la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*

$(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu^*)$ est appelé espace mesuré de Lebesgue.

Le cas de $\mathbb{R}^d$. Maintenant on munit $\mathbb{R}^d$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Le volume d'un rectangle de la forme $A = \prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$ est

$$\mu_d(A) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est définie par $\mu_d^*(A) = \inf\big\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(I_k);\quad (I_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E_A\big\}$

avec $E_A = \big\{(I_k)_{k\in\mathbb{N}};\ I_d = \prod_{i=1}^{d}]a_i^k, b_i^k[, -\infty < a_i^k \leq b_i^k < \infty, \quad k \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{d\in\mathbb{N}} I_k\big\}$.

Définition 1.3.8 ([*19*]) *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Un point τ est appelé point de densité de l'ensemble A si*

$$\lim_{diam(Q)\to\tau\in Q} \frac{\mu(A \cap Q)}{|Q|} = 1,$$

où Q est un d-cube, $|Q|$ est le volume de Q, et μ est la mesure de lebesgue exterieure sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.3.2 ([19]) *Presque tout point d'un ensemble quelconque* $A \subset \mathbb{R}^d$ *est un point de densité de* A.

Théorème 1.3.3 ***(Lusin)*** *Soit* T *un espace métrique compact et* (T, Σ, ν) *un espace mesuré positif de Radon. Alors pour toute fonction* $\varphi : T \to \mathbb{R}$ Σ*-mesurable et pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un compact* $T_\varepsilon \subset T$ *tel que* $\nu(C_T^{T_\varepsilon}) < \varepsilon$ *et* $\varphi_{|T_\varepsilon}$ *est continue.*

Le théorème de Lusin a été étendu par Pliś aux applications $F : [a, b] \to Comp\,(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 1.3.4 ***(Théorème de Pliś)*** ([14])
Soit F *une application de* $[a, b]$ *dans* $Comp(\mathbb{R}^d)$. *Pour que* F *soit mesurable dans* $[a, b]$, *il faut et il suffit que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie fermée* I_ε *de* $[a, b]$ *tel que* F *soit continue sur* I_ε, *et* $\mu(C_{[a,b]}^{I_\varepsilon}) < \varepsilon$.

1.4 Multi-applications et sélections

Définition 1.4.1 *Soient* X *et* Y *deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque)* F *définie sur* X *à valeurs dans* Y *est une fonction qui à chaque élément* $x \in X$ *associe un sous ensemble* $F(x)$ *de* Y. *On note* $F : X \rightrightarrows Y$.
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ *sont donnés par*

$$D(F) := dom(F) = \{x \in X / F(x) \neq \emptyset\}.$$

$$\mathtt{gph}(F) = \{(x, y) \in X \times Y / x \in D(F), y \in F(x)\}.$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

Définition 1.4.2 *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. On appelle sélection de* F *toute application* $f : X \to Y$ *vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \ \ \forall\, x \in D(F).$$

Définition 1.4.3 *([8], Définition 2.2) Soit* X, Y *deux espaces métrique et soit* $\Phi : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application et* $\varepsilon > 0$. *On appelle sélection continue approximante de* Φ *toute application continue* $F_\varepsilon : X \to Y$ *vérifiant*

$$e\Big(gph(F_\varepsilon), gph(\Phi)\Big) < \varepsilon.$$

1.5 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.5.1 *Soit (J, Σ) un espace mesurable, Soient X un espace métrique et $F : J \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable ou tout simplement Σ-mesurable si pour tout ouvert V de X,*

$$F^{-1}(V) = \{t \in J / F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Théorème 1.5.1 *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré σ-fini et complet et Y un espace métrique séparable. Soit également $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) F est Σ-mesurable ;
(ii) $gph(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$;
(iii) $F^{-1}(B) \in \Sigma$, pour tout Borélien B de Y;
(iv) $F^{-1}(C) \in \Sigma$, pour tout fermé C de Y.

Proposition 1.5.1 *([14], Proposition 1.1) Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^d$, et $F : A \to Comp\,(\mathbb{R}^d)$ une application. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) L'ensemble $\{x \in A; F(x) \subset C\}$ est mesurable pour tout $C \in Comp\,(\mathbb{R}^d)$;
(ii) l'ensemble $\{x \in A; F(x) \subset B\}$ est mesurable pour tout fermé B de $\mathbb{R}^d$;
(iii) l'ensemble $\{x \in A; F(x) \subset U\}$ est mesurable pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$;
(iv) l'ensemble $\{x \in A; F(x) \cap B = \emptyset\}$ est mesurable pour tout fermé B de $\mathbb{R}^d$;
(v) $F^{-1}(B) = \{x \in A; F(x) \cap B \neq \emptyset\}$ est mesurable pour tout fermé B de $\mathbb{R}^d$;
(vi) l'ensemble $\{x \in A; F(x) \cap B = \emptyset\}$ est mesurable pour tout $C \in Comp\,(\mathbb{R}^d)$;
(vii) $F^{-1}(C) = \{x \in A; F(x) \cap B \neq \emptyset\}$ est mesurable pour tout $C \in Comp\,(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.5.2 ([14]) *Soit $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$. Si F satisfait l'une des conditions (i)-(vii), alors F est dite mesurable.*

Considérons une application $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$. Alors, F peut être aussi vue comme une multi-application, i.e. $F : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ à valeurs non vides convexes compactes. Dans ce cas, la mesurabilité de F selon la Définition 1.5.2 n'est autre que sa mesurabilité autant qu'une multi-application, c'est à dire, selon la Définition 1.5.1. En effet, si F est mesurable selon la Définition 1.5.2, alors elle vérifie la condition (v), mais cette condition est équivalente à la condition (i) du Théorème 1.5.1, à savoir la mesurabilité de F comme multi-application.

Proposition 1.5.2 *Soit $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$. La mesurabilité de F comme application est équivalente la mesurabilité de F comme multi-application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^d$ à valeurs non vides convexes compactes.*

Proposition 1.5.3 ([*9*]) *Soit $U : [0, 1] \to cc(\mathbb{R}^d)$ une application mesurable et $\Phi : [0, 1] \rightrightarrows cc(\mathbb{R}^d)$ une multi-application mesurable. Alors, la fonction $t \mapsto d\Big(U(t), \Phi(t)\Big)$ est mesurable sur $[0, 1]$.*

1.6 Continuité des applications et multi-applications

Définition 1.6.1 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \longrightarrow Y$ une application. Alors, F est dite continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si,*

$$\forall W \in \mathcal{V}(F(x_0)),\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0); F(V) \subset W.$$

On dit que F est continue sur X si elle est continue en tout point de X.

Définition 1.6.2 *Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $F : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que F est continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in X : d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'_Y(F(x), F(x_0)) < \varepsilon.$$

On dit que F est continue sur X si elle est continue on tous points de X.

Définition 1.6.3 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$. On dit que F est s.c.s. sur X si elle est s.c.s. en tout point $x \in X$.*

Proposition 1.6.1 *Nous avons les propriétés suivantes*
- *La s.c.s. de F est équivalente à la condition suivante :*
$F^{-1}(U)$ est un fermé de X pour tout fermé U de Y.
- *Soient X, Y deux espaces métriques et $\Phi : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s. au point $x_0 \in X$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $e(\Phi(x), \Phi(x_0)) < \varepsilon$, pour tout $x \in B_X(x_0, \delta)$.*

Définition 1.6.4 *Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est continue si pour tout $x \in X$ nous avons*

$$\lim_{x' \to x} \mathcal{H}(F(x), F(x')) = 0.$$

Proposition 1.6.2 *Soit $\Phi : [0,1] \times cc(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows cc(\mathbb{R}^d)$ une multi-application s.c.s, et soit $X : I \longrightarrow cc(\mathbb{R}^d)$ une application continue. Alors, la multi-application $t \mapsto \Phi(t, X(t))$ est s.c.s.*

Démonstration. Soit $t_0 \in [0,1]$ et soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $cc(\mathbb{R}^d)$, tel que $\Phi(t_0, X(t_0)) \subset \mathcal{V}$. Puisque Φ est s.c.s au point $(t_0, X(t_0))$ alors, il existe un voisinage U de $(t_0, X(t_0))$ dans $[0,1] \times cc(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\Phi(t, A) \subset \mathcal{V}, \ \ \forall\ (t, A) \in U,$$

i.e., il existe un voisinage Ω_1 de t_0 dans $[0,1]$, il existe un voisinage Ω_2 de $X(t_0)$ dans $cc(\mathbb{R}^d)$ tels que

$$\Phi(t, A) \subset \mathcal{V}, \ \ \forall\ t \in \Omega_1, \forall\ A \in \Omega_2.$$

D'autre part, puisque X est continue au point t_0 et $\Omega_2 \in \mathcal{V}_{cc(\mathbb{R}^d)}(X(t_0))$, alors il existe $\Omega_1' \in \mathcal{V}_{[0,1]}(t_0)$ tel que

$$X(t) \in \Omega_2, \quad \forall t \in \Omega_1'.$$

Il suffit de prendre $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_1'$, pour tout $t \in \Omega$, on obtient

$$\begin{cases} \Phi(t, A) \subset \mathcal{V}, \quad \forall A \in \Omega_2 \\ \quad \text{et} \\ X(t) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\Phi(t, X(t)) \subset \mathcal{V}.$$

On conclut que pour tout ouvert $\mathcal{V}$ de $cc(\mathbb{R}^d)$ tel que $\Phi(t_0, X(t_0)) \subset \mathcal{V}$, il existe un voisinage $\Omega \in \mathcal{V}_{[0,1]}(t_0)$ tel que

$$\Phi(t, X(t)) \subset \mathcal{V}, \quad \forall t \in \Omega.$$

■

1.7 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Définition 1.7.1 *Soient* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *deux espaces métriques. Une partie* H *de* $\mathcal{F}(X, Y)$ *est dite équicontinue au point* $x_0 \in X$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in H : d_X(x, x_0) \leq \eta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.7.1 ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)*** ([*24*]) *Soient* J *un espace métrique compact,* Y *un espace métrique complet, et* H *un sous ensemble de* $C(J, Y)$*, l'espace des applications continues définies sur* J *à valeurs dans* Y*, muni de la distance de la convergence uniforme. Alors,* H *est relativement compact si et seulement si* H *est équicontinu et* $H(x)$ *est relativement compact, avec*

$$H(x) = \{f(x)/f \in H\}.$$

Chapitre 2

Convexité, dérivée et intégrale dans l'espace métrique $cc(\mathbb{R}^d)$

La dérivabilité, l'intégrale et la "convexité" sont des notions classique lorsqu'il s'agit d'un espace vectoriel. Dans ce chapitre, on s'intéresse à toutes ces notions dans le cas particulier de l'espace "métrique" $cc(\mathbb{R}^d)$.

2.1 Convexité abstraite

Les définitions que nous allons donner dans cette section sont prises de la référence [17]. Nous allons présenter quelques notions de convexité abstraite particulière qui sont apparues dans la litérature, en relation avec le problème d'existence des sélections continues et de points fixes. Nous définissons tout d'abord la notion générale de la structure de convexité abstraite.

Définition 2.1.1 *(Définition 1, [17]) Une famille $\mathcal{C}$ de sous ensembles d'un ensemble X est une structure de convexité abstraite pour X si l'ensemble vide et X appartiennent à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est stable par intersection quelconque.*

Les éléments de $\mathcal{C}$ sont appelés sous-ensembles $\mathcal{C}$-convexes (ou simplement convexes abstraits) de X et le couple $(X, \mathcal{C})$ est appelé espace convexe. De plus, la notion de convexité abstraite nous permet de définir la notion de l'opérateur de l'envloppe convexe de A, qui est pareille à celle de l'opérateur de fermeture en topologie.

Définition 2.1.2 *(Définition 2, [17]) Si $(X, \mathcal{C})$ est un espace convexe et A est un sous ensemble de X, alors l'opérateur de l'enveloppe convexe engendré par la structure de convexité $\mathcal{C}$, qu'on va noter $Co_{\mathcal{C}}$ est appelé enveloppe $\mathcal{C}$-convexe, et est défini par*

$$Co_{\mathcal{C}}(A) = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{C} \\ A \subseteq B}} B.$$

Cet opérateur possède certaines propriétés analogues à celles de convexité usuelle, en effet, $Co_{\mathcal{C}}(A)$ est le plus petit ensemble $\mathcal{C}$-convexe contenant A.

Dans la suite, nous allons nous restreindre à certaines convexités abstraites qui sont les plus intuitives et nous allons munir l'espace $cc(\mathbb{R}^d)$ de l'une d'entre elles.

Définition 2.1.3 *(Définition 3, [17]) Une structure α-convexe sur un ensemble Y est donnée par une application $\alpha : Y \times Y \times [0, 1] \to Y$. Le couple (Y, α) sera appelé un espace α-convexe et la fonction α une fonction α-convexe.*

Dans ce cas, on peut définir une convexité abstraite sur Y en considérant une famille $\mathcal{C}$ de parties de Y comme suit

$$C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1], \alpha(x, y, t) \in C.$$

Les éléments de $\mathcal{C}$ seront appelés ensembles α-convexes, Autrement dit, un sous ensemble C de Y est α-convexe si $\alpha(x, y, t) \in C, \forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1]$. Et l'opérateur d'enveloppe α-convexe associé à cette famille sera noté Co_{α}. En imposant différentes conditions sur l'application α, on obtient différentes structures de convexité abstraites.

Définition 2.1.4 *Si Y est un espace topologique, une structure α-convexe continue sur Y est définie par une application continue $\alpha : Y \times Y \times [0, 1] \to Y$, telle que $\alpha(x, y, 0) = x$, et $\alpha(x, y, 1) = y$, pour tout $(x, y) \in Y \times Y$.*

Proposition 2.1.1 *L'espace $cc(\mathbb{R}^d)$ est un espace α-convexe continue, de plus pour tous $r > 0$, $A \in cc(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{A} \subset cc(\mathbb{R}^d)$ nous avons*

- *$B(A, r)$ est un ensemble α-convexe.*
- *Si $\mathcal{A}$ est α-convexe alors $\mathcal{N}(\mathcal{A}, r)$ l'est aussi.*

Démonstration. On définit l'application suivante

$$\begin{array}{rcl}\alpha : cc(\mathbb{R}^d) \times cc(\mathbb{R}^d) \times [0,1] & \longrightarrow & cc(\mathbb{R}^d) \\ (A,B,t) & \mapsto & \alpha(A,B,t) = (1-t)A + tB.\end{array}$$

nous avons $\alpha(A,B,0) = 1A + 0B = A + \{0_{\mathbb{R}^d}\} = A, \quad \alpha(A,B,1) = 0A + 1B = B.$, d'autre part α est continue. En effet, Soit $(A_n, B_n, t_n)_n$ une suite de $cc(\mathbb{R}^d) \times cc(\mathbb{R}^d) \times [0,1]$ qui converge vers (A,B,t) grâce aux propriétés de la distance de Hausdorff, nous avons

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{H}\Big(\alpha((A_n,B_n,t_n)), \alpha((A,B,t))\Big) & = & \mathcal{H}\Big(t_nB_n + (1-t_n)A_n, tB + (1-t)A\Big) \\ & \leq & \mathcal{H}\Big(t_nB_n, tB\Big) + \mathcal{H}\Big((1-t_n)A_n, (1-t)A\Big) \\ & \leq & \mathcal{H}\Big(t_nB_n, t_nB\Big) + \mathcal{H}\Big(t_nB, tB\Big) + \mathcal{H}\Big((1-t_n)A_n, (1-t_n)A\Big) \\ & & +\mathcal{H}\Big((1-t_n)A, (1-t)A\Big) \\ & = & t_n\mathcal{H}\Big(B_n, B\Big) + \mid t_n - t \mid |||A||| + (1-t_n)\mathcal{H}\Big(A_n, A\Big) \\ & & + \mid (1-t_n) - (1-t) \mid |||B||| \longrightarrow 0\end{array}$$

d'où, α est continue.

- $B(A,r)$ est α-convexe $\Longleftrightarrow \forall A_1, A_2 \in B(A,r)\ , \forall t \in [0,1], \alpha(A_1,A_2,t) \in B(A,r)$

Soient $A_1,\ A_2 \in B(A,r)$ et soit $t \in [0.1]$

— Si $t = 0,\ \alpha(A_1,A_2,0) = A$ donc $\alpha(A_1,A_2,0) \in B(A,r)$

— Si $t = 1,\ \alpha(A_1,A_2,1) = B$ donc $\alpha(A_1,A_2,1) \in B(A,r)$

— Si $t \in]0,1[,\ \alpha(A_1,A_2,t) = (1-t)A_1 + tA_2$, donc

$$A_1 \in B(A,r) \Longleftrightarrow \mathcal{H}(A_1, A) < r,$$

et

$$A_2 \in B(A,r) \Longleftrightarrow \mathcal{H}(A_2, A) < r,$$

on a $A = (1-t)A + tA$, et d'après les propriétés de Hausdorff P2) et P3) on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big((1-t)A_1 + tA_2, A\Big) &= \mathcal{H}\Big((1-t)A_1 + tA_2, (1-t)A + tA\Big) \\
&\leq \mathcal{H}\Big((1-t)A_1, (1-t)A\Big) + \mathcal{H}\Big(tA_2, tA\Big) \\
&= (1-t)\mathcal{H}(A_1, A) + t\mathcal{H}(A_2, A) \\
&< (1-t)r + tr \\
&= r,
\end{aligned}$$

donc

$$tA_1 + (1-t)A_2 \in B(A, r),$$

i.e. $B(A, r)$ est α-convexe.

- Soient $A_1,\ A_2 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}, r)$, et soit $t \in [0.1]$.
  - Si $t = 0,\ \alpha(A_1, A_2, 0) = A$ donc $\alpha(A_1, A_2, 0) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}, r)$.
  - Si $t = 1,\ \alpha(A_1, A_2, 1) = B$ donc $\alpha(A_1, A_2, 1) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}, r)$.
  - Si $t \in]0, 1[,\ \alpha(A_1, A_2, t) = (1-t)A_1 + tA_2$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(A_1, A_1, t) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}, r) &\Longleftrightarrow d\Big(\alpha(A_1, A_1, t), \mathcal{A}\Big) < r \\
&\Longleftrightarrow d\Big(tA_1 + (1-t)A_2, \mathcal{A}\Big) < r
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
A_1 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}, r) &\Longleftrightarrow d(A_1, \mathcal{A}) < r \\
&\Longleftrightarrow \inf_{B \in \mathcal{A}} \mathcal{H}(A_1, B) < r \\
&\Longleftrightarrow \exists B_1 \in \mathcal{A}, \mathcal{H}(A_1, B_1) < r,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A_2 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}, r) &\Longleftrightarrow d(A_2, \mathcal{A}) < r \\
&\Longleftrightarrow \inf_{B \in \mathcal{A}} \mathcal{H}(A_2, B) < r \\
&\Longleftrightarrow \exists B_2 \in \mathcal{A}, \mathcal{H}(A_2, B_2) < r,
\end{aligned}$$

et puisque $\mathcal{A}$ est α-convexe, $tB_1 + (1-t)B_2 \in \mathcal{A}$ de plus,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(tA_1 + (1-t)A_2, tB_1 + (1-t)B_2\Big) &\leq \mathcal{H}\Big(tA_1, tB_1\Big) + \mathcal{H}\Big((1-t)A_2, (1-t)B_2\Big) \\
&= t\mathcal{H}(A_1, B_1) + (1-t)\mathcal{H}(A_2, B_2) \\
&< tr + (1-t)r \\
&= r,
\end{aligned}$$

donc

$$tA_1 + (1-t)A_2 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}, r),$$

i.e. $\mathcal{N}(\mathcal{A}, r)$ est α-convexe. ■

Rappelons un théorème d'existence de sélections approximatives qui a été donné par Cellina en 1969.

Théorème 2.1.1 ([6]) *Soit X un espace métrique et soit Y un espace de Banach. Soit $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs convexes. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue $F_\varepsilon : T \longrightarrow Y$ telle que $e\Bigg(gph(F_\varepsilon), gph(F)\Bigg) < \varepsilon$.*

Le théorème suivant est analogue à celui de Cellina (Théorème 2.1.1), c'est une version valable pour les espaces métrique.

Théorème 2.1.2 ([8]) *Soit T un espace métrique, Y un espace métrique α-convexe et C un sous ensemble α-convexe de Y. Soit $\Phi : T \rightrightarrows Y$ une m.a à valeur α-convexes fermées bornées.on suppose que Φ est s.c.s et satisfait $\Phi(x) \subset C$ pour tout $x \in T$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$,il existe une application continue $F_\varepsilon : T \longrightarrow C$ telle que $e\Bigg(gph(F_\varepsilon), gph(\Phi)\Bigg) < \varepsilon$.*

Théorème 2.1.3 ([9]) *Soit $\Phi : [0.1] \times cc(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows cc(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant les hypothèses*
$(\mathcal{H}_1)$ Φ est s.c.s.
$(\mathcal{H}_2)$ Il existe un réel $M > 1$ tel $\Phi(t, A) \subset B(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, M)$ pour tout $(t, A) \in [0.1] \times cc(\mathbb{R}^d)$.
Alors, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de seléctions approximantes continues de Φ telle que $\varphi_n : [0.1] \times cc(\mathbb{R}^d) \longrightarrow cc(\mathbb{R}^d)$, vérifiant
(a_1) $\mathcal{H}(\varphi_n(t, A), \{0_{\mathbb{R}^d}\}) \leq M$, pour tout $(t, A) \in [0.1] \times cc(\mathbb{R}^d)$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(a_2) $e\Bigg(gph(\varphi_n), gph(\Phi)\Bigg) \leq \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. La multi-application Φ satisfait toutes les conditions du Théorème 2.1.2, en effet Φ est à valeurs α-convexes fermées, elle est s.c.s (d'après (H_1)), de plus d'aprés (H_2), Φ est à valeurs bornées et inclues dans l'ensemble α-convexe $\overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, M)$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($\frac{1}{n} = \varepsilon > 0$), il existe une application continue $\varphi_n : [0.1] \times cc(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \overline{B}(\{0_{\mathbb{R}^d}\}$ (donc (a_1) est verifié), de plus

$$e\Big(gph(\varphi_n), gph(\Phi)\Big) < \frac{1}{n},$$

d'où (a_1) et (a_2) sont vérifiées. ■

2.2 Dérivée de Hukuhara

En 1967, Hukuhara a introduit une notion de dérivée appropriée à l'espace métrique $cc(\mathbb{R}^d)$, basée sur la différence de Hukuhara introduite dans le même papier ([14]).

Définition 2.2.1 ([*14*])*Soit F une application d'un intervalle $[a, b]$ dans $cc(\mathbb{R}^d)$. On dit que F satisfait la condition (H) sur $[a, b]$, si pour tous $s, t \in [a, b]$ avec $s \leq t$, la H-différence $F(t) \ominus F(s)$ existe.*

Définition 2.2.2 ([*14*]) *Soit $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ une application satisfaisant la condition (H).*
Alors, la dérivée de Hukuhara de F au point $t \in]a, b[$ est définie par la formule

$$\dot{F}(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t+h) \ominus F(t)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t) \ominus F(t-h)}{h}$$

quand ces deux limites existent par rapport à la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$. De plus,

$$\dot{F}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(a+h) \ominus F(a)}{h}, \quad \dot{F}(b) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(b) \ominus F(b-h)}{h}.$$

Notons que dans la Définition 2.2.1, il est implicite que pour $h > 0$ suffisamment petit, les différences de Hukuhara $F(t+h) \ominus F(t)$ et $F(t) \ominus F(t-h)$ doivent exister.
Dans la suite, $C^1_{cc(\mathbb{R}^d)}([a, b])$ désigne l'espace des applications continues F de $[a, b]$ dans $cc(\mathbb{R}^d)$ qui sont dérivables au sens de Hukuhara sur $[a, b]$, telles que leurs dérivées $\dot{F}$ sont continues. $\mathcal{X}^1_{cc(\mathbb{R}^d)}([a, b])$ désigne l'espace des applications F absolument continues de $[a, b]$ dans $cc(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 2.2.1 *Soient $F_1, F_2 : [a,b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ deux applications dérivables au sens de Hukuhara sur $[a,b]$. Considérons les deux applications $F, G : [a,b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ définies par $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, $G(t) = \lambda F(t)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, F et G sont dérivables au sens de Hukuhara sur $[a,b]$ et nous avons*

1. $\dot{F}(t) = \dot{F}_1(t) + \dot{F}_2(t)$,
2. $\dot{G}(t) = \lambda \dot{F}(t)$.

Démonstration. Soit $t \in]a,b[$ et soit $h > 0$ tel que $a \leq t-h < t < t+h \leq b$. Pour h assez petit,

1) par la propriété 11) de la différence de Hukuhara

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t+h) \ominus F(t)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Big(F_1(t+h) + F_2(t+h)\Big) \ominus \Big(F_1(t) + F_2(t)\Big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Big(F_1(t+h) \ominus F_1(t)\Big) + \Big(F_2(t+h) \ominus F_2(t)\Big)}{h} \\
&= \dot{F}_1(t) + \dot{F}_2(t),
\end{aligned}$$

de même pour la deuxième limite, on conclut que $\dot{F}(t) = \dot{F}_1(t) + \dot{F}_2(t)$.

2) Par la propriété 3) de la différence de Hukuhara

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{G(t+h) \ominus G(t)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Big(\lambda F(t+h)\Big) \ominus \Big(\lambda F(t)\Big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda\Big(F(t+h) \ominus F(t)\Big)}{h} \\
&= \lambda \lim_{h\to 0^+} \frac{\Big(F(t+h) \ominus F(t)\Big)}{h} \\
&= \lambda \dot{F}(t),
\end{aligned}$$

de même pour la deuxième limite, on conclut que $\dot{G}(t) = \lambda \dot{F}(t)$. ∎

Remarque 2.2.1 *Si $F : [a,b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ est constante alors, elle est dérivable au sens de Hukuhara sur $[a,b]$ et $\dot{F}(t) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$.*

En effet, si $F = A$, alors pour tout $t \in]a,b[$, soit $h > 0$ tel que $a \leq t-h < t < t+h \leq b$. Nous avons

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t+h) \ominus F(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{A \ominus A}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t) \ominus F(t-h)}{h} = \{0_{\mathbb{R}^d}\} = \dot{F}(t).$$

Remarque 2.2.2 *Si une application $F : [a,b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ est dérivable au sens de Hukuhara sur $[a,b]$, alors elle est continue sur $[a,b]$.*

En effet, Soit $t_0 \in]a,b[$ et soit $h > 0$ tel que $a \leq t_0 - h < t_0 < t_0 + h \leq b$. Pour h assez petit, nous avons

$$F(t_0+h) = h\frac{(F(t_0+h) \ominus F(t_0))}{h} + F(t_0),$$

si F est différentiable au point t_0, alors $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{F(t_0+h)\ominus F(t_0)}{h}$ existe, et donc

$$\lim_{h\to 0^+} F(t_0+h) = \left(\lim_{h\to 0^+} h\right)\left(\lim_{h\to 0^+} \frac{(F(t_0+h)\ominus F(t_0))}{h}\right) + \lim_{h\to 0^+} F(t_0) = 0\dot{F}(t_0) + F(t_0) = F(t_0),$$

d'où la continuité de F à droite de t_0. D'autre part, nous avons

$$h\frac{(F(t_0)\ominus F(t_0-h))}{h} + F(t_0-h) = F(t_0),$$

et donc

$$F(t_0-h) = F(t_0) \ominus \left(h\frac{(F(t_0)\ominus F(t_0-h))}{h}\right),$$

on obotient alors,

$$\lim_{h\to 0^+} F(t_0-h) = \left(\lim_{h\to 0^+} F(t_0)\right) \ominus \left(\big(\lim_{h\to 0^+} h\big)\big(\lim_{h\to 0^+} \frac{(F(t_0)\ominus F(t_0-h))}{h}\big)\right) = F(t_0) \ominus 0\dot{F}(t_0) = F(t_0),$$

d'où la continuité de F à gauche de t_0, donc F est continue au point t_0. ■

2.3 Intégrale multivoque

La théorie de l'intégration des multi-applications trouve ses origines dans les travaux d'Aumann [2]. Une multi-application $F : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ est dite Aumann intégrable si l'ensemble $S(F)$ des sélections intégrables de F est non vide. Dans ce cas

$$\int_a^b F(t)\, dt := \left\{ \int_a^b f(t)\, dt / f \in S(F) \right\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Après Aumann, et au fil des années, plusieurs approches sont apparues pour définir l'intégrale d'une multi-application s'inspirant toujours des théories classiques, et en 1967, Hukuhara a introduit une notion de l'intégrale pour les multi-applications $F : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^d$

à valeurs convexes compactes, i.e. les applications $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$, appelée "intégrale de Hukuhara" ou bien "Riemann multivoque " [14]. Son approche est basée sur les idées classiques de Riemann et Daniell. Pour plus de détails sur cette section, voir où l'auteur a présenté une analyse détaillée du papier [14] et une comparaison avec l'intégrale d'Aumann.

Définition 2.3.1 [2] *Une application $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ est dite Aumann intégrable si l'ensemble $S(F)$ des sélections intégrables de F est non vide. Dans ce cas*

$$(A)\int_a^b F(t)\,dt := \left\{\int_a^b f(t)\,dt/\, f \in S(F)\right\},$$

$$S(F) = \left\{f : [a, b] \to \mathbb{R}^d |\, f \text{ est intégrable au sens de Lebesgue}, f(t) \in F(t),\ \forall t \in [a, b]\right\}.$$

Définition 2.3.2 [9] *L'intégrale de Hukuhara d'une application $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ existe, si F est mesurabale et l'application réelle $t \mapsto \mathcal{H}(F(t), \{0_{\mathbb{R}^d}\})$ est intégrable (au sens classique de Lebesgue) dans $[a, b]$.*

Corollaire 2.3.1 *Soit X un espace de Banach réel. Si $F : [a, b] \to cc(X)$ est une application continue p.p. sur $[a, b]$, alors l'ensemble des sélections Lebesgue intégrables de F est non vide et*

$$(R)\int_{[a,b]} F(t)\,dt = (A)\int_{[a,b]} F(t)\,dt.$$

Si nous supposons que F est une application bornée à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Corollaire 2.3.2 ([25], *Théorème 1) soit $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ est une application. Alors F est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si F est continue p.p. sur $[a, b]$. De plus*

$$(R)\int_{[a,b]} F(t)\,dt = (A)\int_{[a,b]} F(t)\,dt.$$

Plus généralement, si on note par $\mathcal{X}_H$ l'ensemble des applications $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ qui sont intégrables au sens de Hukuhara, alors la réstriction de l'intégrale d'Aumann sur $\mathcal{X}_H$ coinceïde avec celle de Hukuhara grâce au théorème suivant

Théorème 2.3.1 ([11]) *Sur l'espace $\mathcal{X}_H$ l'intégrale d'Aumann est égale à celle de Hukuhara, i.e.*

$$(A)\int_a^b F(t)\,dt = (H)\int_a^b F(t)\,dt \qquad , \forall F \in \mathcal{X}_H.$$

Propriétés.

Si $F, G : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ sont intégrables, alors

1) $\mathcal{H}\left(\int_a^b F(t)\,dt,\ \int_a^b G(t)\,dt\right) \leq \int_a^b \mathcal{H}(F(t), G(t))\,dt.$
2) $\left|\left|\left|\int_a^b F(t)\,dt\right|\right|\right| \leq \int_a^b |||F(t)|||\,dt.$
3) Pour tout $c \in]a, b[$,
$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^c F(t)\,dt + \int_c^b F(t)\,dt.$$
4) $\int_a^b (F(t) + G(t))\,dt = \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt.$

Lemme 2.3.1 [14] *Soit $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ une application continue (ou bien mesurable et bornée). Posons pour tout $t \in [a, b]$*

$$L(t) = \int_a^t F(s)\,ds \quad et \quad S(t) = \int_t^b F(s)\,ds.$$

Alors L et S sont continues.

Démonstration. Fixons $t \in [a, b]$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque F est continue sur le compact $[a, b]$, il existe un réel strictement positif M tel que $|||F(u)||| \leq M$, pour tout $u \in [a, b]$. Prenons $\delta = \varepsilon/M$. Soit $u \in [a, b]$ tel que $|u - t| < \delta$. Alors, si $u > t$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(S(u), S(t)) &= \mathcal{H}\left(\int_u^b F(s)\,ds, \int_t^b F(s)\,ds\right) = \mathcal{H}\left(\int_u^b F(s)\,ds, \int_t^u F(s)\,ds + \int_u^b F(s)\,ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, \int_t^u F(s)\,ds\right) = \left|\left|\left|\int_t^u F(s)\,ds\right|\right|\right| \\
&\leq \int_t^u |||F(s)|||\,ds \leq \int_t^u M\,ds = M(u - t) < M\delta = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ceci montre que S est continue au point t pour tout $t \in [a, b]$. Pour la preuve de la continuité de L, elle est similaire à celle de S (voir[26], Lemma 10). ■

Théorème 2.3.2 *([9], Proposition 1) Soit $(W_n)_n$ une suite d'applications mesurables définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $cc(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant $W_n(t) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$, pour tout $t \in [0, 1]$ $(M > 0)$, on suppose que la suite $(U_n)_n$ définie par*

$$U_n(t) = \int_0^t W_n(s)ds,\ \forall t \in [0, 1],$$

converge uniformément vers une application $U : [0,1] \to cc(\mathbb{R}^d)$. Alors, il existe une application mesurable $W : [0,1] \to cc(\mathbb{R}^d)$, avec $W(t) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$ pour tout $t \in [0,1]$, telle que

$$U(t) = \int_0^t W(s)ds, \ \forall t \in [0,1].$$

2.4 La relation entre l'intégrale multivoque et la dérivée de Hukuhara

Lemme 2.4.1 [*14*] *Si $F : [a,b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ est continue, alors pour tout $t \in [a,b[$*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(u)\,du = F(t),$$

et pour tout $t \in]a,b]$, nous avons

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{t-h}^{h} F(u)\,du = F(t).$$

Démonstration. Soit $t \in [a,b[$. Par la continuité de F au point t, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall u \in [a,b]; 0 <\mid u-t \mid< \delta \Rightarrow \mathcal{H}(F(u), F(t)) < \varepsilon.$$

D'après les propriétés de l'intégrale multivoque et la distance de Hausdorff, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(u)\,du, F(t)\right) &= \mathcal{H}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(u)\,du, \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(t)\,du\right)\\
&= \frac{1}{h}\mathcal{H}\left(\int_t^{t+h} F(u)\,du, \int_t^{t+h} F(t)\,du\right)\\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathcal{H}(F(u), F(t))\,du\\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varepsilon\,du\\
&= \frac{1}{h}h\varepsilon\\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient le résultat désiré. De la même manière on montre la deuxième égalité. ■

Proposition 2.4.1 [14] *Si $F : [a,b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ est mesurable et bornée, et $M(t) = \int_a^t F(s)\,ds$ alors M est dérivable au sens de Hukuhara presque partout sur $[a,b]$ et $\dot{M}(t) = F(t)$, p.p. $t \in [a,b]$.*

Lemme 2.4.2 [18] *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, si $D_+ f(x) \leq 0$ sauf au plus sur un sous ensemble dénombrable de $[a,b]$, alors la fonction f est décroissante.*
Ici

$$D_+ f(x_0) = \liminf_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est la dérivée de Dini supérieure à droite de f au point x_0.

Proposition 2.4.2 [14] *Si une application $F : [a,b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ est dérivable au sens de Hukuhara sur $[a,b]$ et $\dot{F}$ est continue, alors pour tout $s \in [a,b]$*

$$F(s) = F(a) + \int_a^s \dot{F}(t)\,dt.$$

Démonstration. Définissons la fonction réelle positive g par

$$g(s) = \mathcal{H}\left(F(a) + \int_a^s \dot{F}(t)\,dt, F(s)\right), \quad \forall s \in [a,b].$$

Nous avons

$$g(a) = \mathcal{H}\left(F(a) + \int_a^a \dot{F}(t)\,dt, F(a)\right) = \mathcal{H}(F(a), F(a)) = 0.$$

Donc, il suffit de montrer que g est décroissante sur $[a,b]$. g est continue (Lemme 2.3.1). Soit $t \in [a,b[$ et soit $h > 0$. En utilisant les propriétés de l'intégrale et de la distance de Hausdorff on obtient

$$\begin{aligned}
g(s+h) &= \mathcal{H}\left(F(a) + \int_a^{s+h} \dot{F}(t)\,dt, F(s+h)\right) \\
&= \mathcal{H}\left(F(a) + \int_a^s \dot{F}(t)\,dt + \int_s^{s+h} \dot{F}(t)\,dt, (F(s+h) \ominus F(s)) + F(s)\right) \\
&\leq \mathcal{H}\left(F(a) + \int_a^s \dot{F}(t)\,dt, F(s)\right) + \mathcal{H}\left(\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\,dt, F(s+h) \ominus F(s)\right),
\end{aligned}$$

alors,

$$\frac{g(s+h) - g(s)}{h} \leq \mathcal{H}\left(\frac{1}{h}\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\,dt, \frac{F(s+h) \ominus F(s)}{h}\right);$$

d'où, d'après le Lemme 2.4.1, et la dérivabilité de F

$$\begin{aligned}\liminf_{h\to 0^+} \frac{g(s+h)-g(s)}{h} &\leq \lim_{h\to 0^+} \mathcal{H}\left(\frac{1}{h}\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\,dt, \frac{F(s+h)\ominus F(s)}{h}\right)\\ &= \mathcal{H}(\dot{F}(s), \dot{F}(s))\\ &= 0.\end{aligned}$$

Par le Lemme 2.4.2, la fonction g est décroissante sur $[a,b]$. ■

Chapitre 3

Résultat d'existence pour une inclusion différentielle du premier ordre à valeurs α-convexes

Dans ce chapitre, en appliquant les notions des chapitres précédents, on s'intéresse à l'existence de solution pour l'inclusion différentielle du premier ordre de la forme

$$(\mathcal{I}) \begin{cases} \dot{X}(t) \in \Phi(t, X(t)),\ t \in [0,1], \\ X(0) = A_0. \end{cases}$$

Où $\dot{X}(t)$ désigne la dérivée au sens de Hukuhara de l'application X au point t, $A_0 \in cc(\mathbb{R}^d)$ et $\Phi : [0,1] \times cc(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows cc(\mathbb{R}^d)$ est une multi-application à valeurs non vides, compactes, α-convexes. Nous présentons un théorème qui assure l'existence d'au moins une solution pour l'inclusion $(\mathcal{I})$ sous certaines conditions. Il s'agit un résultat donné par F.S De Blasi,V. Lakshmikantham et T. Gnana Bhaskar ([9]). Leurs approche trouve ses origines dans la méthode classique de Severini pour la résolution d'équations différentieles ordinaires ([22]). La même approche a été adoptée par Cellina ([7]) pour la résolution d'inclusions différentielles ordinaires dans la dimension finie, en utilisant un théorème de sélections approximatives ([6]). Dans [9] les autheurs ont utilisé un théorème analogue à celui de Cellina mais qui est valable pour l'éspace métrique "α-convexe" $cc(\mathbb{R}^d)$. Notre rôle est de présenter leur approche de démonstration d'une manière trés détaillée.

Le théorème suivant est le résultat principal dans ce mémoire.

Théorème 3.0.1 ([9]) *Soit* $\Phi : [0,1] \times cc(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows cc(\mathbb{R}^d)$ *une multi-application à valeurs non vides, α-convexes et compactes vérifiant*
(H_1) Φ *est s.c.s.*
(H_2) *Il existe* $M > 1$, *tel que* $\Phi(t, A) \subset \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, M)$, *pour tout* $(t, A) \in [0,1] \times cc(\mathbb{R}^d)$.
Alors, l'inclusion différentielle $(\mathcal{I})$ *admet au moins une solution* $X \in \mathcal{X}^1_{cc(\mathbb{R}^d)}([0,1])$.

Démonstration.

Puisque Φ satisfait (H_1) et (H_2), d'après le Théorème 2.1.3, il existe une suite d'applications $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n : [0,1] \times cc(\mathbb{R}^d) \longrightarrow cc(\mathbb{R}^d)$ est continue et vérifie
(a_1) $\mathcal{H}\Big(\varphi_n(t, A), \{0_{\mathbb{R}^d}\}\Big) \leq M$, pour tout $(t, A) \in [0,1] \times cc(\mathbb{R}^d)$,
(a_2) $e\Big(gph(\varphi_n), gph(\Phi)\Big) < \frac{1}{n}$.
$\Big((\varphi_n)_n$ est une suite de sélections approximantes continues$\Big)$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}_n) \quad \begin{cases} \dot{X}(t) = \varphi_n(t, X(t)), \ \forall t \in [0,1], \\ X(0) = A_0. \end{cases}$$

D'après De Blasi et Iervolino ([10]), cette équation différentielle admet au moins une solution $X_n \in C^1_{cc(\mathbb{R}^d)}([0,1])$, de plus, pour tout $t \in [0,1]$

$$|||X_n(t)||| \leq M, \qquad |||\dot{X}_n(t)||| \leq M. \tag{3.1}$$

Considérons la suite $(X_n)_n$. D'après la Proposition 2.4.2, on peut écrire pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n(t) \quad = \quad X_n(0) + \int_0^t \dot{X}_n(s)\, ds = A_0 + \int_0^t \dot{X}_n(s)\, ds,$$

i.e.

$$X_n(t) \ominus A_0 = \int_0^t \dot{X}_n(s)\, ds. \tag{3.2}$$

La suite de fonctions $(X_n)_n$ est relativement compacte dans l'espace $C_{cc(\mathbb{R}^d)}([0,1])$.

En effet, soient $t, t' \in [0,1]$ tel que $t' < t$, alors grâce au propriétés de l'intégrale, de la distance de Hausdorff et par (3.1)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(X_n(t), X_n(t')) &= \mathcal{H}\left(A_0 + \int_0^t \dot{X}_n(s)\,ds, A_0 + \int_0^{t'} \dot{X}_n(s)\,ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_0^t \dot{X}_n(s)\,ds, \int_0^{t'} \dot{X}_n(s)\,ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_0^{t'} \dot{X}_n(s)\,ds + \int_{t'}^t \dot{X}_n(s)\,ds, \int_0^{t'} \dot{X}_n(s)\,ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_{t'}^t \dot{X}_n(s)\,ds, \{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) \\
&= ||| \int_{t'}^t \dot{X}_n(s)\,ds ||| \\
&\leq \int_{t'}^t |||\dot{X}_n(s)|||ds \\
&\leq (t-t')M < \varepsilon,
\end{aligned}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{H}(X_n(t), X_n(t')) \leq M|t-t'|,$$

d'où, l'équicontinuité de la suite $(X_n)_n$. D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$, d'après la relation (3.1),

$|||X_n(t)||| \leq M \Leftrightarrow \mathcal{H}(X_n(t), \{0_{\mathbb{R}^d}\}) \leq M \Leftrightarrow X_n(t) \in \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, M),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$,

d'où $\overline{\{X_n(t),\ n \in \mathbb{N}^*\}} \subset \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, M)$, et puisque cette boule est compacte dans $(cc(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$ (Remarque (1.1.1)), on conclut que $\{X_n(t),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est relativement compact dans $(cc(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$. Par conséquent, $(X_n)_n$ est relativement compact dans $C_{cc(\mathbb{R}^d)}([0,1])$.

Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.7.1), on peut extraire de la suite $(X_n)_n$ une sous-suite, notée encore $(X_n)_n$, qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application continue $X : [0,1] \longrightarrow cc(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant $X(0) = A_0$, i.e.

$$d_\infty(X_n, X) = \sup_{t \in [0,1]} \mathcal{H}(X_n(t), X(t)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \tag{3.3}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons par la relation (3.2)

$$X_n(t) \ominus A_0 = \int_0^t \dot{X}_n(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

D'autre part, $\dot{X}_n(t) = \varphi_n(t, X_n(t)) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$ pour tout $t \in [0,1]$, de plus la suite $(X_n(.) \ominus A_0)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $(X(.) \ominus A_0)$, donc, par le Théorème 2.3.2, il existe une application mesurable $U : [0,1] \longrightarrow cc(\mathbb{R}^d)$, avec $U(t) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$ pour tout $t \in [0,1]$, telle que

$$X(t) \ominus A_0 = \int_0^t U(s)\, ds, \qquad \forall t \in [0,1], \tag{3.4}$$

ou bien,

$$X(t) = A_0 + \int_0^t U(s)\, ds, \qquad t \in [0,1]. \tag{3.5}$$

D'où, d'après la Proposition 2.4.1, X est dérivable au sens de Hukuhara presque partout sur $[0,1]$ et $\dot{X}(t) = U(t)$ *p.p.* $t \in [0,1]$, *i.e.* $X \in \mathcal{X}^1_{cc(\mathbb{R}^d)}([0,1])$. Dans le reste de la démonstration, on va montrer que l'application X est une solution pour l'inclusion différentielle $(\mathcal{I})$. Pour cela, il suffit de montrer que

$$U(t) \in \Phi(t, X(t)), \;\; p.p.\ t \in [0,1].$$

Puisque Φ est à valeurs fermées, il suffit de montrer que

$$d\Big(U(t), \Phi(t, X(t))\Big) = \inf_{A \in \Phi(t,X(t))} \mathcal{H}(U(t), A) = 0, \qquad p.p.\ t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Définissons l'application $\lambda : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\lambda(t) = d\Big(U(t), \Phi(t, X(t))\Big).$$

L'application U est mesurable, et la multi-application $t \longmapsto \Phi(t, X(t))$ est mesurable puisque elle est s.c.s. Alors, par la Proposition 1.5.3, λ est mesurable. La relation (3.6) est équivalente à

$$\mu\Big(\{t \in [0,1]/\lambda(t) \neq 0\} = \{t \in [0,1]/\lambda(t) > 0\}\Big) = 0. \tag{3.7}$$

Dans la suite, nous allons démontrer la relation (3.7) par contradiction. Supposons que (3.7) n'est pas vraie, i.e. $\mu\Big(\{t \in [0,1]/\lambda(t) > 0\}\Big) \neq 0$. Alors, il existe $0 < \varepsilon < 1$ tel que $\mu\Big(J' := \{t \in [0,1]/\lambda(t) \geq \varepsilon\}\Big) > 0$. En effet, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu\Big(\{t \in [0,1]/\lambda(t) \geq \frac{1}{n}\}\Big) = 0,$$

alors,

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{t \in [0,1]/\lambda(t) \geq \frac{1}{n}\}\Big) = 0,$$

mais

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{t \in [0,1]/\lambda(t) \geq \frac{1}{n}\} = \{t \in [0,1]/\lambda(t) > 0\},$$

d'où,

$$\mu\Big(\{t \in [0,1]/\lambda(t) > 0\}\Big) = 0,$$

ce qui est une contradiction. On déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mu\Big(\{t \in [0,1]/\lambda(t) \geq \frac{1}{n}\}\Big) > 0,$$

donc il suffit le prendre $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$. Maintenant, d'après le Théorème de Pliś multivoque (Théorème 1.3.4), il existe un fermé $J \subset J'$ avec $\mu(J) > 0$ tel que la restriction de U à J est continue.

Soit $\tau \in J,\ 0 < \tau < 1$ un point de densité J, i.e.

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\mu(I_{\tau,\rho}\cap J)}{2\rho} = 1,$$

où, $I_{\tau,\rho} = [\tau-\rho, \tau+\rho]$. Soit $0 < \theta < \frac{\varepsilon}{4}$. Puisque $\lambda(t) > \varepsilon$ (car $\tau \in J \subset J'$), on obtient

$$\overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(U(\tau), \frac{\varepsilon}{4}+\theta\Big)\bigcap\overline{\mathcal{N}}\Big(\Phi(\tau, X(\tau)), \frac{\varepsilon}{4}\Big) = \emptyset. \tag{3.8}$$

En effet, si $A \in \overline{\mathcal{N}}\Big(\Phi(\tau, X(\tau)), \frac{\varepsilon}{4}\Big)$, alors $d\Big(A, \Phi(\tau, X(\tau)\Big) < \frac{\varepsilon}{4}$, et donc

$$\lambda(\tau) = d\Big(U(\tau), \Phi(\tau, X(\tau))\Big) \leq \mathcal{H}\Big(U(\tau), A\Big) + d\Big(A, \Phi(\tau, X(\tau))\Big) \leq \mathcal{H}(U(\tau), A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

et puisque $\lambda(t) \geq \varepsilon$ alors,

$$\mathcal{H}(A, U(\tau)) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} > \theta + \frac{\varepsilon}{2} > \theta + \frac{\varepsilon}{4},$$

par conséquent,

$$A \notin \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(U(\tau), \frac{\varepsilon}{4} + \theta\Big).$$

Maintenant, puisque la restriction de U à J est continue et τ est un point de densité de J on peut trouver $\rho_0 > 0$, avec $I_{\tau,\rho_0} \subset [0,1]$, suffisamment petit, de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées

$$U(t) \in \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(U(\tau), \frac{\varepsilon}{4}\Big), \quad \forall t \in I_{\tau,\rho_0} \cap J, \tag{3.9}$$

$$\frac{\mu(I_{\tau,\rho} \setminus J)}{2\rho} < \frac{\theta}{2M}, \quad \forall \rho \in]0, \rho_0[. \tag{3.10}$$

En effet,

U est continue sur J, donc elle est continue en τ, donc pour $\frac{\varepsilon}{4} > 0$,

$$\begin{aligned} \exists \rho_0' > 0;\ \forall t \in J : |t - \tau| < \rho_0' \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{H}(U(t), U(\tau)) \leq \frac{\varepsilon}{4}. \\ &\Longleftrightarrow \quad U(t) \in \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(U(\tau), \frac{\varepsilon}{4}), \end{aligned}$$

i.e.

$$\exists \rho_0' > 0;\ \forall t \in J \cap I_{\tau,\rho_0'}\ ; U(t) \in \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(U(\tau), \frac{\varepsilon}{4}).$$

D'autre part, puisque τ est un point de densité de J,

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mu(I_{\tau,\rho} \cap J)}{2\rho} = 1,$$

alors, pour $\frac{\theta}{2M} > 0$,

$$\begin{aligned} \exists \rho_0'' > 0;\ \rho \in]0, \rho_0''[\quad &\Longrightarrow \quad |\frac{\mu(I_{\tau,\rho} \cap J)}{2\rho} - 1| < \frac{\theta}{2M} \\ &\Longrightarrow \quad 1 - \frac{\mu(I_{\tau,\rho} \cap J)}{2\rho} < \frac{\theta}{2M} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{\mu(I_{\tau,\rho} \setminus J)}{2\rho} < \frac{\theta}{2M}, \end{aligned}$$

d'où il suffit de prendre $\rho_0 = \min\{\rho_0', \rho_0''\}$.

Par la s.c.s de Φ au point $(\tau, X(\tau))$, il existe $0 < \sigma < \rho_0$ tel que pour tout $(t, A) \in I_{\tau,\sigma} \times B_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(X(\tau), \sigma\Big)$

$$e\Big(\Phi(t, A), \Phi(\tau, X(\tau))\Big) < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{3.11}$$

Puisque X est continue au point τ, il existe $0 < \delta < \frac{\sigma}{2}$ tel que

$$\mathcal{H}(X(t), X(\tau)) < \frac{\sigma}{4}, \qquad \forall t \in I_{\tau,\delta}. \tag{3.12}$$

En effet,

X est continue en $\tau \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall t \in I_{\tau,\delta};\ |t-\tau| < \delta \Longrightarrow \mathcal{H}(X(t), X(\tau)) < \varepsilon$,

donc pour $\varepsilon = \frac{\sigma}{4}$, il existe $\delta > 0$ vérifiant (3.12), et si $\delta \geq \frac{\sigma}{2}$, il suffit de prendre $\delta' = \frac{\sigma}{3}$.

De même, puisque $(X_n)_n$ converge unifomément vers X, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathcal{H}(X_n(t), X(t)) < \frac{\sigma}{4}, \qquad \forall t \in I_{\tau,\delta},\ \forall n \geq m_0. \tag{3.13}$$

En combinant (3.12) et (3.13), on obtient

$$\mathcal{H}(X_n(t), X(\tau)) < \frac{\sigma}{2}, \qquad \forall t \in I_{\tau,\delta},\ \forall n \geq m_0. \tag{3.14}$$

Fixons $n_0 \geq m_0$ tel que $\frac{1}{n} < min\{\delta, \frac{\varepsilon}{8}\}$. Nous allons montrer que

$$\dot{X}_n(t) \in \mathcal{N}\Big(\Phi(\tau, X(\tau)), \frac{\varepsilon}{4}\Big), \qquad \forall t \in I_{\tau,\delta},\ \forall n \geq n_0.$$

Soit $n \geq n_0$ et soit $t \in I_{\tau,\delta}$. Rappellons que l'application φ_n vérifie (a_2), à savoir

$$e\Big(gph(\varphi_n), gph(\Phi)\Big) = \sup_{(t,A,B)\in gph(\varphi_n)} d\Big((t,A,B), gph(\Phi)\Big) < \frac{1}{n},$$

tels que

$$gph(\varphi_n) = \{(t, A, \varphi_n(t,A)); (t,A) \in [0,1] \times cc(\mathbb{R}^d)\},$$

$$gph(\Phi) = \{(t, A, B); (t,A) \in [0,1] \times cc(\mathbb{R}^d), B \in \Phi(t,A)\}.$$

Le point $(t, X_n(t), \dot{X}_n(t)) \in gph(\varphi_n)$ (car $\dot{X}_n(t) = \varphi_n(t, X_n(t))$), donc

$$d\Big((t, X_n(t), \dot{X}_n(t)), gph(\Phi)\Big) < \frac{1}{n}.$$

Par la définition de la borne inférieure, on conclut qu'il existe un point $(t', A', B') \in gph(\Phi)$ tel que $d\Big((t, X_n(t), \dot{X}_n(t)), (t', A', B')\Big) < \frac{1}{n}$, i.e., il existe un point $(t', A') \in [0,1] \times cc(\mathbb{R}^d)$ et $B' \in \Phi(t', A')$ tel que

$$|t'-t| < \frac{1}{n},\ \ \mathcal{H}(A', X_n(t)) < \frac{1}{n},\ \ \mathcal{H}(B', \dot{X}_n(t)) < \frac{1}{n}. \tag{3.15}$$

Nous avons $t' \in I_{\tau,\sigma}$ et $A' \in B_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(X(\tau), \sigma\Big)$. En effet, puisque $t \in I_{\tau,\delta}$, par la relation (3.15) on obtient

$$|t' - \tau| \leq |t' - t| + |t - \tau| < \frac{1}{n} + \delta \leq \frac{1}{n_0} + \delta < min\{\delta, \frac{\varepsilon}{8}\} + \delta \leq \delta + \delta = 2\delta < 2\frac{\sigma}{2} = \sigma,$$

et par les relations (3.15) et (3.14)

$$\mathcal{H}(A', X(\tau)) \leq \mathcal{H}(A', X_n(t)) + \mathcal{H}(X_n(t), X(\tau)) < \frac{1}{n} + \frac{\sigma}{2} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{\sigma}{2} < min\{\delta, \frac{\varepsilon}{8}\} + \frac{\sigma}{2} \leq \delta + \frac{\sigma}{2} < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma.$$

Maintenant, en appliquant (3.11)

$$e\Big(\Phi(t', A'), \Phi(\tau, X(\tau))\Big) < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{3.16}$$

Par (3.15) et (3.16) et le fait que $B' \in \Phi(t', A')$, on obtient

$$\begin{aligned} d\Big(\dot{X}_n(t), \Phi(\tau, X(\tau))\Big) &\leq \mathcal{H}\Big(\dot{X}_n(t), B'\Big) + d\Big(B', \Phi(\tau, X(\tau))\Big) \\ &\leq \mathcal{H}\Big(\dot{X}_n(t), B'\Big) + e\Big(\Phi(t', A'), \Phi(\tau, X(\tau))\Big) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{8} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{8} < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\dot{X}_n(t) \in \mathcal{N}\Big(\Phi(\tau, X(\tau)), \frac{\varepsilon}{4}\Big), \qquad \forall t \in I_{\tau,\delta},\ \forall n \geq n_0. \tag{3.17}$$

Par la relation (3.5) et la propriété 10) de la différence de Hukuhara, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{X_n(\tau+\delta) \ominus X_n(\tau-\delta)}{2\delta} &= \frac{1}{2\delta}\Bigg(\Bigg(A_0 + \int_0^{\tau+\delta} \dot{X}_n(s)\, ds\Bigg) \ominus \Bigg(A_0 + \int_0^{\tau-\delta} \dot{X}_n(s)\, ds\Bigg)\Bigg) \\ &= \frac{1}{2\delta}\Bigg(\int_0^{\tau+\delta} \dot{X}_n(s)\, ds \ominus \int_0^{\tau-\delta} \dot{X}_n(s)\, ds\Bigg) \\ &= \frac{1}{2\delta}\Bigg(\int_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} \dot{X}_n(s)\, ds\Bigg) \\ &= \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}} \dot{X}_n(s)\, ds, \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{N}\Big(\Phi(\tau, X(\tau)), \frac{\varepsilon}{4}\Big)$ est α-convexe (Proposition2.1.1), grâce à (3.17) on conclut que

$$\frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}} \dot{X}_n(s)\, ds \in \overline{\mathcal{N}}\Big(\Phi(\tau, X(\tau)), \frac{\varepsilon}{4}\Big),\ \forall n \geq n_0,$$

d'où,

$$\frac{X_n(\tau+\delta)\ominus X_n(\tau-\delta)}{2\delta}\in\overline{\mathcal{N}}\Big(\Phi(\tau,X(\tau)),\frac{\varepsilon}{4}\Big),\ \forall n\geq n_0,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_n(\tau+\delta)\ominus X_n(\tau-\delta)}{2\delta}\in\overline{\mathcal{N}}\Big(\Phi(\tau,X(\tau)),\frac{\varepsilon}{4}\Big),$$

i.e.

$$\frac{X(\tau+\delta)\ominus X(\tau-\delta)}{2\delta}\in\overline{\mathcal{N}}\Big(\Phi(\tau,X(\tau)),\frac{\varepsilon}{4}\Big). \tag{3.18}$$

D'autre part, $\delta<\rho_0$, d'où $I_{\tau,\delta}\subset I_{\tau,\rho_0}$, donc par la relation (3.9) on obtient

$$U(t)\in\overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(U(\tau),\frac{\varepsilon}{4}\Big),\ \forall t\in I_{\tau,\delta}\cap J. \tag{3.19}$$

Par la relation (3.5) et la proprieté 10) de la différence de Hukuhara,

$$\begin{aligned}\frac{X(\tau+\delta)\ominus X(\tau-\delta)}{2\delta} &= \frac{1}{2\delta}\Big(\Big(A_0+\int_0^{\tau+\delta}U(s)\,ds\Big)\ominus\Big(A_0+\int_0^{\tau-\delta}U(s)\,ds\Big)\Big)\\ &= \frac{1}{2\delta}\Big(\int_0^{\tau+\delta}U(s)\,ds\ominus\int_0^{\tau-\delta}U(s)\,ds\Big)\\ &= \frac{1}{2\delta}\int_{\tau-\delta}^{\tau+\delta}U(s)\,ds\\ &= \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}}U(s)\,ds\\ &= w_1(\delta)+w_2(\delta),\end{aligned} \tag{3.20}$$

avec,

$$w_1(\delta)=\frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J}U(s)\,ds,\qquad w_2(\delta)=\frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}\setminus J}U(s)\,ds.$$

Nous avons,

$$w_1(\delta)=\frac{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}{2\delta}\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J}U(s)\,ds=\eta(\delta)\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J}U(s)\,ds,$$

avec $\eta(\delta)=\frac{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}{2\delta}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(w_1(\delta), \eta(\delta)U(\tau)) &= \mathcal{H}\Big(\eta(\delta)\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} U(s)\ ds, \eta(\delta)U(\tau)\Big)\\
&= \eta(\delta)\mathcal{H}\Big(\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} U(s)\ ds, U(\tau)\Big)\\
&= \eta(\delta)\mathcal{H}\Big(\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} U(s)\ ds, \frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} U(\tau)\ ds\Big)\\
&= \frac{\eta(\delta)}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\mathcal{H}\Big(\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} U(s)\ ds, \int_{I_{\tau,\delta}\cap J} U(\tau)\ ds\Big)\\
&\leq \frac{\eta(\delta)}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} \mathcal{H}(U(s), U(\tau))\ ds,
\end{aligned}$$

et par la relation (3.19)

$$\frac{\eta(\delta)}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} \mathcal{H}(U(s), U(\tau))\ ds \leq \frac{\eta(\delta)}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} \frac{\varepsilon}{4}\ ds = \eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4},$$

par conséquent,

$$w_1(\delta) \in \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(\eta(\delta)U(\tau), \eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4}\Big). \tag{3.21}$$

Nous avons

$$\overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(\eta(\delta)U(\tau), \eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4}\Big) \subset \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(U(\tau), \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\theta}{2}\Big).$$

En effet, soit $A \in \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(\eta(\delta)U(\tau), \eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4}\Big)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(A, U(\tau)) &\leq \mathcal{H}(A, \eta(\delta)U(\tau)) + \mathcal{H}(\eta(\delta)U(\tau), U(\tau))\\
&\leq \eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4} + |1-\eta(\delta)|\ |||U(\tau)|||.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Mais, $2\delta = \mu(I_{\tau,\delta}\cap J) + \mu(I_{\tau,\delta}\backslash J)$, donc

$$2\delta - \mu(I_{\tau,\delta}\cap J) = \mu(I_{\tau,\delta}\backslash J),$$

d'où

$$1 - \eta(\delta) = \frac{\mu(I_{\tau,\delta}\backslash J)}{2\delta},$$

donc, $1 - \eta(\delta) \geq 0$, i.e. $\eta(\delta) \leq 1$.

D'autre part, puisque $\delta < \rho_0$ et d'après la relation (3.10), on obtient

$$1 - \eta(\delta) < \frac{\theta}{2M},$$

on revient à (3.22)

$$\mathcal{H}(A, U(\tau)) \leq \frac{\varepsilon}{4} + (1-\eta(\delta))M \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\theta}{2}.$$

On conclut que

$$w_1(\delta) \in \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(U(\tau), \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\theta}{2}\Big). \tag{3.23}$$

D'autre part, grâce au propriétés de l'intégrale, puis par la relation (3.10),

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(w_2(\delta), \{0_{\mathbb{R}^d}\}) &= |||w_2(\delta)||| \\
&= |||\frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}\setminus J} U(s)\, ds||| \\
&= \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}\setminus J} |||U(s)|||\, ds \\
&\leq \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}\setminus J} M\, ds \\
&= M\frac{\mu(I_{\tau,\delta}\setminus J)}{2\delta} \\
&< \frac{\theta}{2},
\end{aligned} \tag{3.24}$$

d'où, en utilisant la propriété P2) de la distance de Hausdorff, et par les relations (3.23) et (3.24)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\frac{X(\tau+\delta) \ominus X(\tau-\delta)}{2\delta}, U(\tau)\right) &= \mathcal{H}\Big(w_1(\delta) + w_2(\delta), U(\tau) + \{0_{\mathbb{R}^d}\}\Big) \\
&\leq \mathcal{H}\Big(w_1(\delta), U(\tau)\Big) + \mathcal{H}\Big(w_2(\delta), \{0_{\mathbb{R}^d}\}\Big) \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \frac{\varepsilon}{4} + \theta,
\end{aligned}$$

donc,

$$\frac{X(\tau+\delta) \ominus X(\tau-\delta)}{2\delta} \in \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(U(\tau), \frac{\varepsilon}{4} + \theta\Big). \tag{3.25}$$

Par (3.18) et (3.25)

$$\frac{X(\tau+\delta) \ominus X(\tau-\delta)}{2\delta} \in \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(U(\tau), \frac{\varepsilon}{4} + \theta\Big) \bigcap \overline{\mathcal{N}}_{cc(\mathbb{R}^d)}\Big(\Phi(\tau, X(\tau)), \frac{\varepsilon}{4}\Big),$$

ce qui est une contradiction avec (3.8). Donc, la relation (3.7) est vraie. On conclut que X est une solution pour l'inclusion différentielle $(\mathcal{I})$. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté un résultat concernant une inclusion différentielle du premier ordre dont le second membre prend ses valeurs dans l'espace métrique $cc(\mathbb{R}^d)$, constitué des parties non vides convexes compactes de $\mathbb{R}^d$.
Il s'agit d'un résultat donné par F.S De Blasi,V.Lakshmikantham et T.Gnana Bhaskar dans [9] que nous avons traité avec détails.
Le résultat assure l'existence de solution pour notre inclusion sachant que le second membre est à valeurs α-convexes, sous la condition de la semi-continuité supérieure.

Bibliographie

[1] **L. Ambrosio, and L. Tilli**, *Topics on Analysis in Metric Spaces.* Oxford Series in Mathematics and its Applications 25. Oxford University Press, Oxford. (2004).

[2] **J. Aumann**, *Integrals of set-valued functions*, Journ. Math. Anal, and Appl. 12 (1965), 1-12.

[3] **D. Azzam-Laouir**, *cours d'analyse multivoque.*

[4] **N. Bourbaki**, *Topologie générale : chapitres 1 à 4*, Springer Science & Business Media, 21 mai 2007, 357 pages.

[5] **N. Bourbaki**, *Topologie générale*, (Livre III , Chap.9), Hermann 1971.

[6] **A. Cellina**, *Approximation of set valued functions and fixed points theorems*, Ann. Mat. Pura. Appl., 82, 17-24, 1969.

[7] **A. Cellina**, *Multivalued differential equations and ordinary differential equations*, Siam J. Appl. Math., 18, 533-538, 1970.

[8] **F.S De Blasi,and G.Pianigiani**, *Approximate selections in α-convexe metric space and topological degree*, Topo. Meth. Anal . 24, 347-375,(2004a)

[9] **F.S De Blasi,V. Lakshmikantham and T. Gnana Bhaskar**, *An existence theorem for set differeential inclusions in a semilinear metric space*, control and cybernetics vol.36 (2007) No. 3

[10] **F.S. De Blasi, F. Iervolino**, *Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso*, Boll. Unione Mat. Ital., 2, No. 4-5, 491-501 (1969).

[11] **F.S. De Blasi and A. Lazota**, *Daniell's method in the theory of Aumann- Hukuhara integral of set-valued functions*, Atti Accad. Naz. Liencei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat Natur. 8(45), (1968), 252-256.

[12] **G. Debreu**, *Integration of correspondences*, Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability 2 (1) (1965/66), 351-372, Univ. California Press, Berkeley, Calif.

[13] **R. Descombes**, *Cours d'analyse*, Libraire Vuibert, Paris (1962).

[14] **M. Hukuhara**, *Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcialaj Ekvacioj, 10(1967), 205-223.

[15] **M. Hukuhara**, *Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe,* Funkcial. Ekvac. 10 (1967), 43-66.

[16] **V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar and J. Vasundhara Devi**, *Theory of Set Differential Equations in a Metric Space*. Cambridje, (2006).

[17] **Juan-Vicente Llinares**, *Abstract convexity, some relations and applications*, departamento de fundamentos del analisis Economico, facutad de Economia y Empresa, Universidad de Murcia, Campus de Espinardo, E-30100 Murcia, Spain.

[18] **S. Lojasiewiez**, *An introduction to theory of real functions*, A willey- Intersection Publication, Johan willy and sons, Ltd, Chichester, 1989. En J. Comput. Appl. Math, 113(2000), 51-64.

[19] **S. Lojasiewiez**, *An introduction to the theory of real functions,* A Willey-Intersection Publication, John Willey and Sons, Ltd, Chichester, 1989. em J. Comput. Appl. Math., 1113 : 51-64, 2000.

[20] **H. Rädström**, *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math Soc, 3(1952), 165-169.

[21] **R. T. Rockafellar**,*Convex Analysis*, Princeton University Press.. Princeton, (1970).

[22] **C. Severini**, *Sull' integrazione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*, Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett., 1898, 657-667.

[23] **L. Shoumei, Y. Ogura and Vladik Kreinovich**, *Limit theorems and appliactions of set-valued and fuzzy-valued random variables*, Springer Science & Business Media, 31 oct. 2002. 391 pages.

[24] **Y. Sonnag**, *Topologie et Analyse fonctionnelle*, ellipses édition marketing S.A, 1998.

[25] **E.S. Polovinkin**, *Riemannian integral of set-valued functions*, Lecture Notes in Comput. Sci. 27(1975), 405-410.

[26] **M. Piszczek**, *On multivaleud cosine familes*, J. AppL, Anal. 13(2007), 57-76.