République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse.

Thème :

Quelques résultats liés au contrôle

Présenté par :

Labiad Farah

Zehani Ibtissam

Soutenu le :

Devant le jury composé de :

Président	**: Boutana Imane**	**M.A.A**	Université de Jijel
Encadreur	**: Saïdi Soumia**	**M.C.A**	Université de Jijel
Examinateur	**: Menigher Hamoud**	**M.A.A**	Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

REMERCIEMENTS

Nous commençons par remercier Dieu le tout puissant, de nous avoir donné courage, volonté et patience pour mener bon terme ce travail.

Nous tenons à remercier notre directrice de ce mémoire : **Mme. Saïdi Soumia**, maître de conférences à l'université de Jijel, pour son aide précieuse, ses conseils et son orientation durant l'élaboration de ce mémoire. Nous la remercions également pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Nous tenons à remercier les membres de jury : **Mme Boutana Imane**, maître de assistant à l'université de Jijel, qui nous a fait l'honneur de présider ce jury. Nos remerciements s'adressent aussi à **Mr Menigher Hamoud**, maître assistante à l'université de Jijel, d'avoir accepté d'être examinateur de ce travail.

Nous tenons à remercier nos enseignants qui nous ont accompagné du scolaire jusqu'à l'université. Nous remercions chaleureusement nos parents, d'être toujours présents à nos cotés, pour leur soutient moral et matériel, nous espérons être à la hauteur de leur confiance.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS ET ESPACES USUELS

Tout au long de ce mémoire, on adopte les notations suivantes :

H	espace de Hilbert réel.
U	espace métrique.
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	$[-\infty, +\infty]$.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs.
$\mathcal{P}(\mathrm{X})$	ensemble de toutes les parties d'un ensemble X.
$X \backslash A$	complémentaire de A dans X.
J	partie de $\mathbb{N}$.
$I := [T_0, T]$	intervalle de $\mathbb{R}$.
λ	mesure de Lebesgue.
$\otimes$	produit de deux tribu.
$\mathcal{C}_H(I)$	espace des fonctions continues $f : I \to H$.
$dom(\psi)$	domaine d'une fonction ψ.
$\partial\psi(\cdot)$	sous-différentiel de ψ.
ψ^*	fonction conjuguée de ψ.
$\lvert \cdot \rvert$	valeur absolue.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire dans H.

$\|\cdot\|$	norme associée à $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$.
$\|\cdot\|_\infty$	norme de la convergence uniforme où $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in \mathrm{H}} \|f(x)\|$.
p.p.	presque partout.
$\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$	dérivée de u par rapport à t.
$B[0,\,\eta]$	boule ouverte de centre 0 et de rayon η.
$\mathcal{M}^1_+(U)$	ensemble des mesures de probabilité.
$\mathcal{B}(U)$	tribu borélienne sur U
$\mathcal{Y}(S,\sigma,U)$	ensemble de toutes les mesures de Young ν sur $(S\times U,\,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(U))$
$\mathbb{1}_A$	fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x\ \in\ A. \\ 0, & si\ x\ \notin\ A. \end{cases}$$

resp	respectivement.
$:=$	égal par définition.
$L^1_H(I)$	espace des fonctions intégrables $f : I \to H$.
$L^2_H(I)$	espace des fonctions mesurables $f : I \to H$ telles que : $\int_{T_0}^{T} \|f(t)\|^2\,dt < +\infty$.
$L^\infty_H(I)$	espace des fonctions mesurables $f : I \to H$ et il existe C tel que $\lvert f(x)\rvert \leq C$ p.p. sur I.
X'	espace dual de X.
$\sigma(X,X')$	la topologie faible sur X.
$\rightharpoonup$	la convergence faible.

INTRODUCTION

Le thème de recherche considéré dans ce mémoire est celui du contrôle optimal. Ce mémoire est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions d'analyse fonctionnelle et convexe dont on aura besoin le long du travail. Nous rassemblons aussi les définitions de multi-applications et sélections et celles des convergences usuelles. Nous terminons ce chapitre par parler de deux outils fondamentaux d'analyse (opérateurs sous-différentiels et opérateurs maximaux monotones).

Le deuxième chapitre est composé de deux sections. Dans la première, on fait des rappels sur les mesures de Young ainsi que quelques lemmes et propositions nécessaires. Dans la deuxième, on s'intéresse à un résultat d'existence et d'unicité de solution absolument continue pour des inclusions différentielles perturbées et non perturbées du type :

$$(P)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in \partial\psi(t, u(t)), & \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) = u_0, \end{cases}$$

et

$$(P_{f(\cdot,\cdot)})\begin{cases} -\dot{u}(t) \in \partial\psi(t, u(t)) + f(t, u(t)), & \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) = u_0, \end{cases}$$

où $\psi(t, \cdot)$ $(t \in I)$ étant une fonction propre convexe semi-continue inférieurement et la perturbation $f : I \times H \to H$ est une fonction vérifiant des conditions appropriées.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la relation entre le problème dit "original"

$$\inf_{\zeta(\cdot)\in S_\Gamma} \int_{T0}^{T} J(t,\, u_\zeta(t),\, \zeta(t))\, dt \qquad \text{(PO)}$$

où $u_\zeta(\cdot)$ est l'unique solution absolument continue de

$$(\mathcal{PO}(\zeta)) \begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & \partial\psi(t,\, u(t)) + f(t,\, u(t),\, \zeta(t)) \qquad \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) & = & u_0, \end{cases}$$

et le problème de contrôle "relaxé" suivant

$$\inf_{\mu\in S_\Sigma} \int_{T0}^{T} \int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)\, dt \qquad \text{(PR)}$$

avec $u_\mu(\cdot)$ étant la solution absolument continue du problème perturbé

$$(\mathcal{PR}(\mu)) \begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & \partial\psi(t,\, u(t)) + \displaystyle\int_{\Gamma(t)} f(t,\, u(t),\, x)\mu_t d(x) \qquad \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) & = & u_0. \end{cases}$$

Les contrôles $\mu \in S_\Sigma$ seront identifiés aux mesures de Young, donnant ainsi accès à la théorie des mesures de Young.

Nous allons voir que l'égalité $\inf(PO) = \min(PR)$ aura lieu.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base, des généralités sur l'analyse convexe et fonctionnelle. Nous rassemblons aussi des rappels sur les convergences usuelles et des outils fondamentaux d'analyse (opérateurs maximaux-monotones et opérateurs sous-différentiels).
Le contenu du chapitre a été pris des références [1], [2], [6], [13].

1.1 Espaces usuels

***Définition* 1.1.1.** *On appelle topologie sur un ensemble* X *un ensemble* $\Gamma \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$ *vérifiant*

1. $\emptyset, \mathrm{X} \in \Gamma$.
2. *Si* $\mathrm{X}_i \in \Gamma$, $i = 1, \cdots, n$ *alors* $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \in \Gamma$.
3. *Si* $\{\mathrm{X}_i,\ i \in J\}$ *est une famille d'éléments de* Γ*, alors* $\bigcup_{i \in J} \mathrm{X}_i \in \Gamma$.

On dit que (X, Γ) *est un espace topologique. Les éléments de* Γ *sont appelés ensembles ouverts. Les sous-ensembles fermés de* X *sont les complémentaires des ouverts.*

***Définition* 1.1.2.** *Soient* (X_1, Γ_1), (X_2, Γ_2) *deux espaces topologiques et* $f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_2$*. La fonction* f *est dite séquentiellement continue en* $x \in \mathrm{X}_1$ *si pour toute suite* $(x_n) \subset \mathrm{X}_1$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$*, alors* $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

La fonction f est séquentiellement continue sur X_1 *si elle est séquentiellement continue en tout point de* X_1.

***Définition* 1.1.3.** *Soit* (X, Γ) *un espace topologique. Un sous-ensemble A de X est dit séquentiellement fermé s'il contient toutes les limites de ses suites convergeantes.*

***Définition* 1.1.4.** *On appelle Tribu sur* X *toute famille T de parties de* X *telle que :*

1. $\emptyset \in T$.
2. $\forall A \in T : \mathrm{X} \backslash A \in T$.
3. *Pour toute suite* $(A_n)_n$ *telle que* $A_n \in T$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a* $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$.

Le couple (X, T) *est appelé espace mesurable et les éléments de T sont appelés parties mesurables.*

Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que T est une algèbre sur X.

Si X *est un espace topologique, la tribu borélienne sur* X *notée* $\mathcal{B}(\mathrm{X})$ *est la plus petite tribu contenant la topologie de* X.

Soient (X, T_1) *et* (Y, T_2) *deux espaces mesurables. Une fonction* $f : (X, T_1) \longrightarrow (Y, T_2)$ *est* T_1*-mesurable si* $f^{-1}(A) \in T_1$ *pour tout* $A \in T_2$.

***Définition* 1.1.5.** *Soit* (X, T) *un espace mesurable. Une mesure sur* (X, T) *est une application* $\mu : T \rightarrow [0, +\infty]$ *vérifiant*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Pour toute famille* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *d'éléments de T deux à deux disjoints (c'est-à-dire que* $A_n \bigcap A_m = \emptyset \quad$ *lorsque* $n \neq m$*), on a la propriété d'additivité dénombrable*
$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que (X, T, μ) *est un espace mesuré.*

Lorsque $\mu(\mathrm{X}) < \infty$, *on dit que la mesure μ est finie. En particulier, si on a* $\mu(\mathrm{X}) = 1$ *on dit que μ est une mesure de probabilité et* (X, T, μ) *est un espace de probabilité.*

Un ensemble A est dit μ-négligeable s'il existe $B \in T$ *tel que* $A \subset B$ *et* $\mu(B) = 0$.

***Définition* 1.1.6.** *Soit* $(X,\, \mathcal{A},\, \mu)$ *un espace mesuré. On dit que la mesure* μ *est complète si, pour tout élément* $N \in \mathcal{A}$ *vérifiant* $\mu(N) = 0$ *et pour toute partie* $M \subset N$*, alors* $M \in \mathcal{A}$*.*

***Définition* 1.1.7.** (*Mesure de Lebesgue) Il existe une et une seule mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *notée* λ *et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, tel que*

$$\lambda(]a,\, b[) = b - a, \text{ pour tout } (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \; -\infty < a < b < +\infty.$$

***Définition* 1.1.8.** (*Propriété vraie* μ*-presque partout) On dit qu'une propriété est vraie* μ*-presque partout sur* X *si la propriété est fausse sur une partie* μ*-négligeable de* X*, on note* $\mu\, p\, p$*.*

***Définition* 1.1.9.** *Soit* X *un ensemble non vide. L'application* $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0,\, +\infty[$ *est une distance sur* X *si pour tous* $x,\, y,\, z \in \mathrm{X}$*, on a*

1. $d(x,\, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$*,*
2. $d(x,\, y) = d(y,\, x)$*,*
3. $d(x,\, z) \leq d(x,\, y) + d(y,\, z)$ *(inégalité triangulaire).*

   Dans ce cas, on dit que $(\mathrm{X},\, d)$ *est un espace métrique.*

***Définition* 1.1.10.** *On appelle norme sur un espace vectoriel* X *réel ou complexe, de dimension finie ou infinie, toute application* $x \mapsto \|x\|$ *de* X *dans* $\mathbb{R}_+$ *vérifiant les conditions*

i) $\forall x \in \mathrm{X} : \; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

ii) $\forall x \in \mathrm{X}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \; \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|,$

iii) $\forall x,\, y \in \mathrm{X} : \; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Toute norme définit naturellement une distance : $d(x, y) = \|x - y\|$*.*

***Définition* 1.1.11.** *On appelle espace vectoriel normé le couple* $(\mathrm{X},\, \|.\|)$ *où* X *est un espace vectoriel et* $\|.\|$ *est une norme sur* X*.*

***Définition* 1.1.12.** *Soit* X *un espace métrique. La suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est dite une suite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p,\, q \in \mathbb{N},\, p > q \geq n_0 : \; \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.13. *Soit* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. On dit que* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *est un complet si et seulement si toute suite de Cauchy pour* $\|\cdot\|$*, composée d'éléments de* X*, admet une limite dans* X*. On dit aussi que* X *est un espace de Banach.*

Définition 1.1.14. *Soit* (X, d) *un espace métrique et soit* $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$*. On dit que* A *est dense dans* X *si* $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$.

Définition 1.1.15. *On dit qu'un espace métrique* X *est séparable s'il existe un sous-ensemble* $A \subset \mathrm{X}$ *dénombrable et dense dans* X.

Définition 1.1.16.

1. *Un recouvrement de* X *est une famille* $(A_i)_{i\in I}$ *de partie de* X *telle que* $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.
Si de plus, I *est un ensemble fini, on dit que* $(A_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement fini de* X.

2. *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *un recouvrement de* X*. Soit* $J \subset I$ *tel que* $X \subset \bigcup\limits_{j\in J} A_j$*, on dit que* $(A_j)_{j\in J}$ *est un sous-recouvrement de* $(A_i)_{i\in I}$.

3. *Un recouvrement ouvert de* X *est une famille d'ouverts* $(U_i)_{i\in I}$ *telle que* $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

Définition 1.1.17. *On dit que* X *est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de* X*, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.1.18. *Soit* (X, Γ) *un espace topologique. On dit que*

- $K \subset \mathrm{X}$ *est compact si de tout recouvrement de* K *par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*
- $A \subset \mathrm{X}$ *est relativement compact si* $\overline{A}$ *est compact.*
- $A \subset \mathrm{X}$ *est séquentiellement compact si toute suite d'éléments de* A *admet une sous-suite qui converge dans* A .

1.2 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Fonctions absolument continues

***Théorème* 1.2.1.** *Soit un intervalle $[a,\, b]$ de $\mathbb{R}$, une fonction $\psi :\ [a,\, b] \longmapsto H$ est dite absolument continue si est seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, i.e.,*

$$\psi(b)\text{-}\psi(a)=\int_a^b \dot{\psi}(t)\ dt$$

***Remarque* 1.2.2.** *1. Toute fonction absolument continue est une fonction continue.*

2. Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.

1.2.2 Fonction lipschitzienne

***Définition* 1.2.1.** *Soit ψ : $H \to \mathbb{R}$. On dit que ψ est lipschitzienne de rapport $L > 0$, si et seulement si,*

$$\forall x,\, y\, \in\, H,\ \|\psi(x)-\psi(y)\| \leq L\ \|x-y\|.$$

***Remarque* 1.2.3.** *Toute fonction Lipschitzienne est absolument continue.*

1.3 Généralités sur l'analyse convexe

***Définition* 1.3.1.** *Soit ψ : $H \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que ψ est propre si et seulement si*

$$\begin{cases} \psi(x) \neq -\infty & \forall x \in H, \\ \psi \not\equiv +\infty & (i.e.,\ \exists x_0 \in H \quad \text{tel que}\ \psi(x_0) \neq +\infty). \end{cases}$$

***Définition* 1.3.2.** *Soit $\psi : H \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. L'ensemble défini par* $\operatorname{dom}(\psi) = \{x\, \in\, H,\ \psi(x) < +\infty\}$ *est appelé domaine effectif de ψ.*

Une fonction $\psi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est propre si est seulement si $\operatorname{dom}(\psi) \neq \emptyset$.

***Définition* 1.3.3.** *Une fonction $\psi : H \to]-\infty,\, +\infty]$ est dite convexe si*

$$\forall x,\, y \,\in\, H, \quad \forall t \,\in\, [0,\, 1]: \quad \psi(tx + (1-t)y) \leq t\psi(x) + (1-t)\psi(y).$$

***Définition* 1.3.4.** *Soit $\psi : H \to [-\infty,\, +\infty]$ une fonction propre. La fonction ψ^* définie sur H par*

$$\begin{aligned} \psi^* : H \to & [-\infty,\, +\infty] \\ y \mapsto & \psi^*(y) = \sup_{x \in H} \{\langle y,\, x\rangle - \psi(x)\}, \end{aligned}$$

est appelée conjuguée de ψ.

1.4 Multi-applications et sélections

***Définition* 1.4.1.** *Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multi-applications F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à tout élément $x \in X$ associe un sous-ensemble $F(x)$ de Y et on note $F : X \rightrightarrows Y$. Le domaine de la multi-application est donné par*

$$\mathrm{dom}\,(F) = \{x \,\in\, X, \;\; F(x) \neq \emptyset\}.$$

***Définition* 1.4.2.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant $f(x) \,\in\, F(x), \forall x \,\in\, X$.*

***Définition* 1.4.3.** *Soient $(X,\, \Sigma)$ un espace mesurable, Y un espace métrique, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est Σ-mesurable si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X; F(x) \cap V \neq \emptyset\} \,\in\, \Sigma.$$

***Théorème* 1.4.1.** *Soient $(X,\, \Sigma)$ un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors, elle admet au moins une sélection mesurable.*

Pour plus de détails sur la mesurabilité des multi-applications, on réfère à Castaing-Valadier [6].

1.5 Convergences usuelles

Soient $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to E$.

***Définition* 1.5.1.** (*Convergence simple*) *On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur$X$) si et seulement si, pour tout x de X, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans E.*

***Définition* 1.5.2.** (*Convergence uniforme*)

1) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f(sur X) si et seulement si :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad (n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon).$$

2) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont bornées, alors pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X, il faut et il suffit de montrer que :

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

***Théorème* 1.5.1.** (*Théorème de la convergence dominée*) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1_E(X)$. On suppose que*

a) $f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur X,

b) il existe une fonction $g \in L^1_{\mathbb{R}_+}(X)$ telle que pour tout n : $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur X.

Alors, $f \in L^1_E(X)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

1.6 Outils fondamentaux d'analyse

Dans toute la suite, on entend par A un opérateur multivoque défini sur H et à valeurs dans l'ensemble des partie de H, et l'on note A : H $\rightrightarrows H$, i.e., pour tout x $\in H$, Ax est un ensemble de $\mathcal{P}(H)$.

L'ensemble $\mathrm{dom}\,(A) = \{x \in H,\, Ax \neq 0\}$ est appelé domaine de l'opérateur A.

1.6.1 Opérateurs sous-différentiels

Beaucoup de ce qui suit reste valable pour un couple d'espaces vectoriels en dualité. Nous restreignons les énoncés au cas qui nous occupe : l'espace Hilbertien H mis en dualité avec lui-même par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit $\psi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

***Définition* 1.6.1.** *On dit qu'un élément $y \in H$ est un sous-gradient de ψ au point x si*

$$\psi(x) \in \mathbb{R} \text{ et si } \forall z \in H \ \psi(z) \geq \psi(x) + \langle y, z - x \rangle.$$

L'ensemble des sous-gradients de ψ au point x est appelé sous-différentiel de ψ au point x et noté $\partial\psi(x)$. En d'autre termes, $\partial\psi(x)$ est l'ensemble des "pentes" de toutes les minorantes affines de ψ qui sont "exactes au point x".

***Définition* 1.6.2.** *La fonction ψ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in H$ si,*

$$\psi(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} \psi(x).$$

La fonction ψ est dite s.c.i sur H si ψ est s.c.i en tout point de H.

***Proposition* 1.6.1.** *Si ψ est propre, i.e., son domaine effectif* $(\operatorname{dom}\psi)$ *défini par*

$$\operatorname{dom}\psi = \{x \in H;\ \psi(x) < +\infty\}$$

est non vide alors, le sous-différentiel $\partial\psi(x)$ de ψ en $x \in \operatorname{dom}\psi$ est

$$\partial\psi(x) = \{y \in H :\ \psi(z) \geq \langle y, z - x \rangle + \psi(x),\ \forall z \in \operatorname{dom}\psi\}$$

et son domaine effectif est $\operatorname{dom}\partial\psi = \{x \in H;\ \partial\psi(x) \neq \emptyset\}$.

***Proposition* 1.6.2.** *Si ψ est convexe propre semi-continue inférieurement alors ψ^* est aussi convexe propre semi-continue inférieurement.*

1.6.2 Opérateurs maximaux-monotones

***Définition* 1.6.3.** *Un opérateur A est dit monotone si*

$$\forall x_1,\, x_2 \in \operatorname{dom} A,\, \langle Ax_1 - Ax_2,\, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

ou plus précisément,

$$\forall y_1 \in\, Ax_1, \forall y_2 \in\, Ax_2,\, \langle y_1 - y_2,\, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

***Définition* 1.6.4.** *Un opérateur A est dit maximal-monotone s'il est monotone et si toute extension monotone de A coïncide avec A.*

***Proposition* 1.6.3.** *Si ψ est convexe, propre, sci alors, l'opérateur sous-différentiel $\partial\psi$ est maximal-monotone.*

Pour plus de détails sur les propriétés des opérateurs maximaux-monotones dans les espaces de Hilbert, se reporter à [1].

1.7 Topologie faible

***Définition* 1.7.1.** *Soit $f \in X'$ un élément fixé et,*

$$\varphi_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \varphi_f = \langle f, x \rangle.$$

Lorsque f parcourt $X^{'}$, on obtient une famille d'applications φ_f i.e. $(\varphi_f)_{f\in X'}$.
On appelle la topologie faible sur X, la topologie la moins fine sur X rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$ continues et on la note $\sigma(X, X')$.

***Proposition* 1.7.1.** *Soit $(x_n)_n$ une suite de X alors, quand $n \longrightarrow \infty$ on a,*

1. $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \forall f \in X'$.
2. $x_n \to x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$.
3. $x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow (\|x_n\|)_n$ *est borné et* $\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$.
4. $x_n \rightharpoonup x$ *et* $f_n \longrightarrow f \Longrightarrow \langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

On termine ce chapitre de préliminaires par énoncer le lemme de Gronwall.

***Définition* 1.7.2.** (*Lemme de Gronwall : forme intégrale*)
Soient $T \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, a, $b \in L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T])$, *et* $c \in L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$, $c(t) \geq 0$ *pour presque tout* $t \in [T_0, T]$. *Alors*

$$a(t) \leq b(t) + \int_{T_0}^{t} c(s)a(s)\,ds \quad \text{p.p}, \ \textit{dans}\ [T_0, T],$$

implique que pour presque tout $t \in [T_0, T]$

$$a(t) \leq b(t) + \int_{T_0}^{t} \exp^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} c(s)b(s)\,ds,$$

où $\Lambda(t) = \displaystyle\int_{T_0}^{t} c(\tau)\ d\tau$.

CHAPITRE 2

MESURES DE YOUNG ET RÉSULTATS LIÉS À UNE CLASSE D'INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre, nous présentons de façon élémentaire quelques définitions et propriétés des mesures de Young (définition du produit fibré, intégrande de Carathéodory, ...).

D'autre part, nous nous intéressons au résultat d'existence et d'unicité de solution absolument continue pour une inclusion différentielle avec perturbation univoque sur un intervalle $\mathrm{I} = [T_0, T]$ de la forme

$$(\mathcal{P}_{f(\cdot,\cdot)}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in \partial\psi(t,\, u(t)) + f(t,\, u(t)), \\ u(T_0) = u_0 \in \operatorname{dom}\psi(T_0,\, \cdot), \end{cases}$$

où $\partial\psi(t, \cdot)$ est le sous différentiel d'une fonction convexe propre semi-continue inférieurement définie d'un espace de Hilbert H dans $[0, +\infty]$. La perturbation est une fonction univoque dépendant du temps et de l'état $f : I \times H \longrightarrow H$.

2.1 Rappels sur les mesures de Young

2.1.1 Mesures de Young

On va faire les rappels suivants concernant les mesures de Young (voir Castaing, Raynaud de Fitte [4], Edmond-Thibault [8] et Jawhar [10]).

***Définition* 2.1.1.** *Soient $(S,\, \mathcal{A},\, \sigma)$ un espace mesuré complet, σ une mesure finie non négative et U un espace métrique complet séparable. On note par $\mathcal{Y}(S,\, \sigma,\, U)$ l'ensemble de toutes les mesures positives ν sur $(S \times U,\, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(U))$ dont les projections sur S (i.e., leurs images par l'application $(s,\, x) \mapsto s$) égalent σ. Autrement dit, pour tout $E \in \mathcal{A}$, on a*

$$\nu(E \times U) = \sigma(E).$$

Si $\nu \in \mathcal{Y}(S,\, \sigma,\, U)$, alors ν est dite mesure de Young sur $S \times U$.

***Définition* 2.1.2.** *Soit $\mathcal{M}_+^1(U)$ l'ensemble de toutes les mesures de probabilité sur $(U,\, \mathcal{B}(U))$. D'après [4], on note $\mathcal{Y}_{dis}(S,\, \sigma,\, U)$ l'ensemble de toutes les applications $\mu : S \longrightarrow \mathcal{M}_+^1(U)$ (σ-presque partout égalité) qui sont mesurables au sens suivant, pour tout $B \in \mathcal{B}(U)$, la fonction $s \longmapsto \mu_s(B)$ est $\mathcal{A}$-mesurable.*

***Remarque* 2.1.1.** *1) Dans*[10]*, tout élément de l'ensemble $\mathcal{Y}_{dis}(S,\, \sigma,\, U)$ est dit mesure de probabilité de transition sur $S \times U$.*

2) Si $\mu \in \mathcal{Y}_{dis}(S,\, \sigma,\, U)$, $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(U)$ et si $\mathbb{1}_A$ est la fonction caractéristique de A, alors la fonction $s \longmapsto \displaystyle\int_U \mathbb{1}_A(s,\, x)\mu_s(dx)$ est $\mathcal{A}$-mesurable sur S et la fonction ensemble ν définie pour tout $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(U)$ par

$$\nu(A) = \int_S \int_U \mathbb{1}_A(s,\, x)\mu_s(dx)\sigma(ds), \tag{2.1.1}$$

est une mesure de Young sur $S \times U$. Par conséquent, tout élément de $\mathcal{Y}_{dis}(S,\, \sigma,\, U)$ est dit mesure désintégrée de Young.

3) Réciproquement, sous les mêmes hypothèses qu'en haut sur S et U, toute mesure de Young sur $S \times U$ est associée à un certain $\mu \in \mathcal{Y}_{dis}(S,\, \sigma,\, U)$ défini de la même manière qu'en haut.

***Remarque* 2.1.2.** *1) Si ν est une mesure de Young correspondante à l'élément $\mu \in \mathcal{Y}_{dis}(S, \sigma, U)$, i.e., la mesure de Young définie par (2.1.1), alors, pour toute fonction $\psi : S \times U \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ qui est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(U)$-mesurable et non-négative (resp. ν-intégrable), la fonction $s \longmapsto \int_U \psi(s, x)\mu_s(dx)$ est σ-mesurable (resp. σ-intégrable) et l'on a*

$$\int_{S\times U} \psi \, d\nu = \int_S \int_U \psi(s, x)\mu_s(dx)\sigma(ds).$$

2) Si ν est la mesure de Young associée à $\mu \in \mathcal{Y}_{dis}(S, \sigma, U)$ on ne fera pas de différence entre ν et μ, i.e., pour tout $s \in S$, on écrira ν_s au lieu de μ_s.

3) Toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable $x(\cdot) : S \longrightarrow U$ définit une mesure de Young sur $S \times U$ dite mesure de Young associée à $x(\cdot)$. C'est la mesure de Young correspondante à l'élément μ de $\mathcal{Y}_{dis}(S, \sigma, U)$ définie par $\mu_s := \delta_{x(s)}$, où $\delta_{x(s)}$est la masse de Dirac au point $x(s)$, i.e., pour tout $B \in \mathcal{B}(U)$, $\delta_{x(s)}(B) = 1$ si $x(s) \in B$ et 0 ailleurs.

2.1.2 Intégrande de Carathéodory

Pour plus de détails, on réfère le lecteur à [15].

***Définition* 2.1.3.**

On appelle intégrande toute fonction $\psi : S\times U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ qui est $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(U)$-mesurable. Un intégrande est dit de Carathéodory si, pour tout $s \in S$, la fonction $\psi(s, \cdot)$ est continue et prend des valeurs finies sur U.

Un intégrande ψ est dit L^1-borné s'il existe une fonction non-négative $\gamma \in L^1_{\mathbb{R}}(S, \sigma)$ telle que,

$$|\psi(s, x)| \leq \gamma(s) \quad \textit{pour tout } (s, x) \in S \times U.$$

***Définition* 2.1.4.** *Une suite (ν^n) de $\mathcal{Y}(S, \sigma, U)$ converge vers ν dans $\mathcal{Y}(S, \sigma, U)$ si, pour tout intégrande de Carathéodory L^1-borné ψ,*

$$\lim_n \int_{S\times U} \psi \, d\nu^n = \int_{S\times U} \psi \, d\nu.$$

***Définition* 2.1.5.** *On dit qu'une suite (μ^n) de $\mathcal{Y}_{dis}(S, \sigma, U)$ converge vers μ dans $\mathcal{Y}_{dis}(S, \sigma, U)$ si la suite des mesures de Young correspondantes converge dans $\mathcal{Y}(S, \sigma, U)$. Cela revient à dire que, pour tout intégrande de Carathéodory L^1-borné ψ,*

$$\lim_n \int_S \int_U \psi(s,\, x)\mu_s^n(dx)\sigma(ds) = \int_S \int_U \psi(s,\, x)\mu_s(dx)\sigma(ds).$$

***Définition* 2.1.6.** *Soient $\mathbb{S}$ et $\mathbb{T}$ deux espaces métriques et soient $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega,\, \mathcal{S},\, P,\, \mathbb{S})$ et $\nu \in \mathcal{Y}(\Omega,\, \mathcal{S},\, P,\, \mathbb{T})$. On appelle produit fibré de μ et ν, la mesure de Young $\mu \underline{\otimes} \nu \in \mathcal{Y}(\Omega,\, \mathcal{S},\, P,\, \mathbb{S}\times \mathbb{T})$ définie par*

$$(\mu \underline{\otimes} \nu)_w = \mu_w \ \otimes \ \nu_w$$

pour tout $w \in \Omega$.

Supposons maintenant que H est un espace de Hilbert séparable.

***Proposition* 2.1.1.** *Soient $h_n(\cdot)$, $h(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$ $(n \geq 1)$ et μ^n, $\mu \in \mathcal{Y}_{dis}(I,\, \lambda,\, U)$. Supposons que $(h_n(\cdot))$ converge uniformément vers $h(\cdot)$ et (μ^n) converge vers μ dans $\mathcal{Y}_{dis}(I,\, \lambda,\, U)$. Soit $\theta^n \in \mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, H \times U)$ définie par $\theta_t^n := \delta_{h_n(t)} \otimes \mu_t^n$. Alors, θ^n converge dans $\mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, H \times U)$ vers la mesure de Young $\theta \in \mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, H \times U)$ définie par $\theta_t := \delta_{h(t)} \otimes \mu_t$.*

***Définition* 2.1.7.** *Une suite de fonction $(f_n(\cdot))$ est dite uniformément intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$ si elle est bornée dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$ et*

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \sup_n \int_A |f_n(t)|\, dt = 0.$$

***Proposition* 2.1.2.** *Soit $x_n(\cdot) : I \longrightarrow U$ $(n \geq 1)$ une suite de fonctions mesurables. Supposons que la suite des mesures de Young associées (ν^n)(où, $\nu_t^n := \delta_{x_n}(t))$ converge vers ν dans $\mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, U)$. Soit $\psi : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ un intégrande de Carathéodory. Supposons que la suite $(\psi(\cdot,\, x_n(\cdot)))_n$ est uniformément intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$. Alors, ψ est ν-intégrable et*

$$\int_{I\times U} \psi\, d\nu = \lim_n \int_I \psi(t,\, x_n(t))\, dt.$$

***Proposition* 2.1.3.** *Si U est un espace métrique compact, alors toute suite dans $\mathcal{Y}_{dis}(I,\, \lambda,\, U)$ possède une sous-suite convergente dans $\mathcal{Y}_{dis}(I,\, \lambda,\, U)$.*

Ces lemmes ont été pris de [8],[9].

***Lemme* 2.1.1.** *Soit $(\eta_n(\cdot))$ une suite de fonctions non-négatives et absolument continues définies de I dans $\mathbb{R}$. Supposons que $\lim\limits_n \eta_n(T_0) = 0$ et pour tout n,*

$$\dot{\eta}_n(t) \leq \beta(t)\eta_n(t) + \alpha_n(t) \quad p.p.\ t \in I,$$

où $\alpha_n(\cdot), \beta(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}}(I)$ *avec* $\beta(\cdot) \geq 0$. *Supposons de plus que la suite* $(\alpha_n(\cdot))$ *est bornée dans* $L^1_{\mathbb{R}}(I)$ *et, pour tout* $t \in [T_0, T]$, *on a* $\lim_n \int_{T_0}^t \alpha_n(s)\ ds = 0$. *Alors, pour tout* $t \in [T_0, T]$,

$$\lim_n \eta_n(t) = 0.$$

Démonstration. Soit $t \in [T_0, T]$. En intégrant de T_0 à t l'inégalité en haut, on obtient

$$\eta_n(t) \leq \eta_n(T_0) + \int_{T_0}^t \alpha_n(s)\,ds + \int_{T_0}^t \beta(s)\eta_n(s)\,ds. \tag{2.1.2}$$

En multipliant maintenant par $\beta(t)$, on trouve

$$\beta(t)\eta_n(t) \leq \eta_n(T_0)\beta(t) + \beta(t)\int_{T_0}^t \alpha_n(s)\,ds + \beta(t)\int_{T_0}^t \beta(s)\eta_n(s)\,ds.$$

En vertu du lemme de Gronwall, on a

$$\int_{T_0}^t \beta(s)\eta_n(s)\,ds \leq \int_{T_0}^t \left(\left[\eta_n(T_0)\beta(u) + \beta(u)\int_{T_0}^u \alpha_n(s)\,ds)\right] \exp\left\{\int_u^t \beta(s)\,ds\right\}\right) du.$$

En revenant à 2.1.2, on déduit que

$$\eta_n(t) \leq \eta_n(T_0) + \int_{T_0}^t \alpha_n(s)\,ds + \eta_n(T_0)\int_{T_0}^t \left(\beta(u)\exp\left\{\int_u^t \beta(s)\,ds\right\}\right) du + \int_{T_0}^t \left(\beta(u)\left(\int_{T_0}^u \alpha_n(s)\,ds\right)\exp\left\{\int_u^t \beta(s)\,ds\right\}\right) du.$$

En faisant tendre n vers l'infini. Par le théorème de la convergence dominée, le dernier terme du côté droit de l'inégalité tend vers 0. Il est evident que, par hypothèses, les autres termes vont aussi vers 0. Donc, on a le résultat attendu. □

Lemme 2.1.2. *Soit une suite de fonctions absolument continues définies de* I *dans* H. *Supposons que* $\lim_n u_n(T_0) = 0$ *et, pour tout* n,

$$\frac{d}{dt}(\|u_n(t)\|^2) \leq \beta_n(t)\|u_n(t)\|^2 + \alpha_n(t) \quad p.p.\ t \in I,$$

où $\alpha_n(\cdot), \beta_n(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}_+}(I)$. *Supposons de plus que la suite* $(\beta_n(\cdot))$ *est bornée dans* $L^1_{\mathbb{R}}(I)$ *et* $\lim_n \int_{T_0}^T \alpha_n(t)\ dt = 0$. *Alors,*

$$\lim_n \|u_n(\cdot)\|_\infty = 0.$$

Démonstration. D'après le lemme de Gronwall, pour tout $t \in I$,

$$\|u_n(t)\|^2 \leq \int_{T_0}^t \left(\alpha_n(s)\exp\left\{\int_s^t \beta_n(\tau)\,d\tau\right\}\right) + \|u_n(T_0)\|^2 \exp\left\{\int_{T_0}^t \beta_n(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Il en résulte que pour tous $t \in [T_0,\, T]$,

$$\|u_n(t)\|^2 \leq \exp\left\{\int_{T_0}^T \beta_n(\tau)\,d\tau\right\}\textstyle\int_{T_0}^T \alpha_n(s)\,ds + \|u_n(T_0)\|^2 \exp\left\{\int_{T_0}^T \beta_n(\tau)\,d\tau\right\}.$$

D'où, le résultat attendu. □

***Lemme* 2.1.3.** *Soient $h_n(\cdot), h_\infty(\cdot) : I \to H$ $(n \geq 1)$ des fonctions λ-mesurables et $v^n, v^\infty \in \mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, U)$. Supposons que (v^n) converge vers v^∞ dans $\mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, U)$ et $(h_n(t))$ converge faiblement dans H vers $h_\infty(t)$ pour tout $t \in I$. Soient θ^n, $\theta^\infty \in \mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, H \times U)$ définies par $\theta^n_t := \delta_{h_n}(t) \otimes v^n_t$ et $\theta^\infty_t := \delta_{h_\infty}(t) \otimes v^\infty_t$. Soit $\phi : I \times (H \times U) \to \mathbb{R}$ un intégrande tel que, pour tout $t \in I$, $\phi(t,\, \cdot,\, \cdot)$ est séquentiellement continue sur $H^w \times U$, où H^w désigne l'espace H muni de la topologie faible. Supposons de plus que, la fonction mesurable $t \longmapsto sup_{(n,\, u)\, \in\, (\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times H} |\phi(t,\, h_n(t),\, u)|$ est $\lambda-$intégrable sur I. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I \times \mathrm{H} \times U} \phi \ d\theta^n = \int_{I \times \mathrm{H} \times U} \phi \ d\theta.$$

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Cette partie a été prise de [14].

2.2.1 Cas non-perturbé

***Théorème* 2.2.1.** *Soient H un espace de Hilbert, $I := [T_0,\, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\psi : I \times H \to [0,\, +\infty]$ une fonction vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

(H_1) *Pour tout $t \in I$, la fonction $u \mapsto \psi(t,\, u)$ est convexe propre et semi-continue inférieurement.*

(H_2) *Il existe deux fonctions,*

l'une $k : H \to \mathbb{R}_+$ *Lipschitzienne de rapport* ρ,

l'autre $a : I \to \mathbb{R}$ *absolument continue sur* I *et à dérivée* $\dot{a}$ *dans* $L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$,

telles que, pour tout $(t, s, u) \in I \times I \times H$ *on ait*

$$\psi^*(t, u) \leq \psi^*(s, u) + k(x)|a(t) - a(s)|$$

où $\psi^*(t, \cdot)$ *représente la fonction conjuguée de* $\psi(t, \cdot)$.

Alors, pour tout $u_0 \in \operatorname{dom} \psi(T_0, \cdot)$, *le problème d'évolution*

$$(P)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in \partial\psi(t, u(t)), \\ u(T_0) \ = u_0, \end{cases}$$

possède une unique solution $u(\cdot)$ *absolument continue sur* $[T_0, T]$.

De plus, pour tout $t \in I : u(t) \in \operatorname{dom} \psi(t, \cdot)$ *et* $t \longmapsto \psi(t, u(t))$ *est absolument continue sur* $[T_0, T]$.

L'hypothèse (H_1) *et la Proposition 1.6.3 entraînent que, pour tout* $t \in I$, $\partial\psi(t, \cdot)$ *est maximal-monotone. L'unicité de la solution résulte alors classiquement de la monotonie de ces opérateurs.*

Démonstration. Voir [14]. □

***Proposition* 2.2.1.** *L'unique solution absolument continue* $u(\cdot)$ *de* (P) *satisfait à*
$\|\dot{u}\|_{L^2_H} \leq \frac{\rho}{2}\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + [\sqrt{T - T_0}k(0)\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \frac{\rho^2}{4}\|\dot{a}\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \psi(T_0, u_0) - \psi(T, u(T))]^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. Voir [14]. □

2.2.2 Cas où la perturbation dépend du temps et de l'état

***Théorème* 2.2.2.** *Soient la fonction* $\psi : I \times H \to [0, +\infty]$ *satisfaisant* (H_1) *et* (H_2) *du Théorème 2.2.1, et* $f : I \times H \to H$ *une fonction telle que*

i) f *est séparément mesurable sur* I;

ii) pour tout $\eta > 0$, *il existe une fonction non-négative* $\gamma_\eta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ *telle que, pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $(u, v) \in B[0, \eta] \times B[0, \eta]$,

$$\|f(t,\,u)-f(t,\,v)\| \leq \gamma_\eta(t)\|u-v\|;$$

iii) il existe une fonction non-négative $\beta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ *telle que, pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $u \in H$ *,*

$$\|f(t,\,u)\| \leq \beta(t)(1+\|u\|). \tag{2.2.1}$$

Alors, pour tout $u_0 \in \operatorname{dom}\psi(T_0,\,\cdot)$*, le problème perturbé suivante*

$$(P_{f(\cdot,\,\cdot)})\begin{cases} -\dot{u}(t) \;\in\; \partial\psi(t,\,u(t))+f(t,\,u(t)), & p.p.\ t \in I \\ u(T_0) \;= u_0, \end{cases}$$

possède une unique solution $u(\cdot)$ *absolument continue sur* I*, qui satisfait à*

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{u}(t)\|^2\,dt \leq \alpha + \sigma \int_{T_0}^{T} \|f(t,\,u(t))\|^2\,dt, \tag{2.2.2}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= (k^2(0)+3(\rho+1)^2)\int_{T_0}^{T} \dot{a}^2(t)\,dt + 2[T-T_0+\psi(T_0,\,u_0)-\psi(T,\,u(T))], \\ \sigma &= k^2(0)+3(\rho+1)^2+4. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Démonstration. Voir [14]. □

Proposition 2.2.2. *L'unique solution* $u(\cdot)$ *de* $(P_{f(\cdot,\,\cdot)})$ *satisfait à*

$$\|u(t)-u_0\| \leq [\xi(T)]^{\frac{1}{2}}$$

De plus, on a

$$\|f(t,\,u(t))\| \leq \beta(t)(1+K) \quad p.p.t \,\in\, I$$

et

$$\int_{T_0}^{T} \|\,\dot{u}(t)\|^2 dt \leq \alpha^0 + \sigma(1+K)^2 \int_{T_0}^{T} \beta^2(t)\,dt, \tag{2.2.4}$$

où

$$K := \|u_0\| + [\xi(T)]^{\frac{1}{2}},$$

et où la fonction non-négative $\xi(\cdot)$ est continue et croissante, définie sur $[T_0, T]$ par

$$\xi(s) = b(s) + 2\sigma(s - T_0) \int_{T_0}^{s} b(\tau)\beta^2(\tau) \exp\left(2\sigma \int_{T_0}^{s} (\theta - T_0)\, \beta^2(\theta)\, d\theta\right)\, d\tau,$$

et pour tout $t \in [T_0, T]$

$$b(t) = (t - T_0)[\alpha^0 + 2\sigma(1 + \|u_0\|)^2 \int_{T_0}^{t} \beta^2(\theta)\, d\theta],$$

avec

$$\alpha^0 = (k^2(0) + 3(\rho + 1)^2) \int_{T_0}^{T} \dot{a}^2(t)\, dt + 2[T - T_0 + \psi(T_0, u_0).$$

Démonstration. Soit $u(\cdot)$ l'unique solution de $(P_{f(\cdot,\cdot)})$. En se servant de la continuité absolue de $u(\cdot)$ sur $[T_0, T]$, et de l'hypothèse (2.2.2), on a pour $T_0 \leq s < T$,

$$\begin{aligned} \|u(s) - u_0\|^2 &\leq (s - T_0) \int_{T_0}^{s} \|\dot{u}(\tau)\|^2\, d\tau \\ &\leq (s - T_0) \left[\alpha^0 + \sigma \int_{T_0}^{s} \beta^2(\tau)(1 + \|u(\tau)\|)^2\, d\tau\right]. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $s \in [T_0, T]$

$$\begin{aligned} \|u(s) - u_0\|^2 &\leq \alpha^0(s - T_0) + 2\sigma(s - T_0)(1 + \|u_0\|)^2 \int_{T_0}^{s} \beta^2(\tau)\, d\tau \\ &+ 2\sigma(s - T_0) \int_{T_0}^{s} \beta^2(\tau)\|u(\tau) - u_0\|^2\, d\tau. \end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall, entraîne, pour tout $s \in [T_0, T]$

$$\xi(s) = b(s) + c(s) \int_{T_0}^{s} b(\tau)\beta^2(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^{s} \beta^2(\theta)c(\theta)\, d\theta\right)\, d\tau,$$

que,

$$\|u(s) - u_0\|^2 \leq \xi(s), \tag{2.2.5}$$

où

$$\begin{aligned} b(t) &= (t - T_0) \left[\alpha^0 + 2\sigma(1 + \|u_0\|)^2 \int_{T_0}^{t} \beta^2(\theta)\, d\theta\right], \\ c(t) &= 2\sigma(t - T_0). \end{aligned}$$

Évidemment les fonctions $b(\cdot)$, $c(\cdot)$et $\xi(\cdot)$ sont croissantes et continues sur $[T_0, T]$. Il s'en suit de (2.2.5),

$$\|u(\cdot)\|_\infty \leq K,$$

où $K = \|u_0\| + [\xi(T)]^{\frac{1}{2}}$. Par conséquent,

$$\|f(t, u(t))\| \leq \beta(t)(1 + k) \quad \text{p.p. } t \in I.$$

la démonstration de La Proposition est donc terminée. $\square$

CHAPITRE 3

APPLICATION À UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

On se propose dans ce chapitre d'étudier une application au contrôle optimal. Cette étude fait intervenir les mesures de Young et des contraintes sous forme d'inclusion différentielles perturbées gouvernées par le sous-différentiel d'une fonction $\psi(\cdot,\cdot)$. Pour ce faire, on s'intéresse à trouver la relation entre le problème de contrôle optimal suivant

$$\inf_{\zeta(\cdot)\in S_\Gamma} \int_{T0}^{T} J(t,\, u_\zeta(t),\, \zeta(t))\, dt.$$

où $u_\zeta(\cdot)$ est l'unique solution absolument continue du problème

$$(\mathcal{PO}(\zeta)) \begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & \partial\psi(t,\, u(t)) + f(t,\, u(t),\, \zeta(t)) \qquad \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) & = & u_0. \end{cases}$$

et le problème de contrôle relaxé suivant

$$\inf_{\mu\in S_\Sigma} \int_{T_0}^{T} \int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)\, dt,$$

avec $u_\mu(\cdot)$ étant la solution absolument continue du problème

$$(\mathcal{PR}(\mu)) \begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & \partial\psi(t,\, u(t)) + \displaystyle\int_{\Gamma(t)} f(t,\, u(t),\, x)\mu_t d(x) \qquad \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) & = & u_0. \end{cases}$$

On peut trouver d'autres résultats liés au contrôle, voir [3], [4], [5], [7], [8], [10], [11], [12].

3.1 Contrôle original et contrôle relaxé

Soit $\Gamma : I \rightrightarrows U$ une multi-application λ-mesurable à valeurs compactes non vides. On considère la multi-application $\Sigma(\cdot)$ définie sur I par

$$\Sigma(t) := \{P \in \mathcal{M}_+^1(U) : P(\Gamma(t)) = 1\}.$$

On note par S_Γ (resp. S_Σ) l'ensemble de toutes les sélections λ-mesurables (égalité presque partout) de Γ (resp. Σ). L'ensemble S_Σ est non vide. Il est évident que, $S_\Gamma \subset S_\Sigma$ dans le sens suivant, pour tout $\zeta \in S_\Gamma$, la mesure de Young μ où $(\mu_t = \delta_{\zeta(t)})_{t\in I}$ satisfait $\mu \in S_\Sigma$.

***Proposition* 3.1.1.** *Soit $\Gamma : I \rightrightarrows U$ une multi-application λ-mesurable dans les compacts non vides de U. Alors, la multi-application $\Sigma(\cdot)$ définie sur I par*

$$\Sigma(t) := \{P \in \mathcal{M}_+^1(U) : P(\Gamma(t)) = 1\}$$

est mesurable à valeurs convexes compactes non vides de $\mathcal{M}_+^1(U)$ et l'ensemble S_Σ des sélections λ-mesurables de Σ est non vide et est séquentiellement fermé dan $\mathcal{Y}_{dis}(I, \lambda, U)$.

Les éléments de s_Γ sont dits contrôles originaux et ceux de S_Σ contrôles relaxés. Soit $f : I \times H \times U \to H$ une fonction vérifiant

i) pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot, \cdot)$ est continue sur $H \times U$;

ii) pour tout $(u, x) \in H \times U$, $f(\cdot, u, x)$ est λ-mesurable sur I ;

iii) pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction non-négative $\gamma_\eta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout $(t, x) \in I \times U$ et pour tout $u, v \in B[0, \eta]$,
$$\|f(t, u, x) - f(t, v, x)\| \leq \gamma_\eta(t)\|u - v\|;$$

iv) il existe une fonction non-négative $\beta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout $(t, u, x) \in I \times H \times U$, on a
$$\|f(t, u, x)\| \leq \beta(t)(1 + \|u\|).$$

Supposons que ψ vérifie (H_1) et (H_2). Étant donné $u_0 \in \text{dom } \psi(T_0, \cdot)$, $\zeta \in S_\Gamma$, et $\mu \in S_\Sigma$, on considère les deux problèmes d'évolution suivants :

$$(\mathcal{PO}(\zeta)) \begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & \partial\psi(t, u(t)) + f(t, u(t), \zeta(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) & = & u_0. \end{cases}$$

et

$$(\mathcal{PR}(\mu)) \begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & \partial\psi(t, u(t)) + \displaystyle\int_{\Gamma(t)} f(t, u(t), x)\mu_t d(x) & \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) & = & u_0. \end{cases}$$

En vertu de la Remarque 2.1.2 1), la fonction

$$h_\mu(t, u) := \int_{\Gamma(t)} f(t, u, x)\mu_t(dx) = \int_U f(t, u, x)\mu_t(dx)$$

est séparément λ-mesurable sur I. De plus, grâce aux hypothèses sur f et le fait que $\mu_t(\Gamma(t)) = \mu_t(U) = 1$, on a

- pour tout $\eta > 0$, pour tout $t \in I$ et pour tout $u, v \in B[0, \eta]$,
$$\|h_\mu(t, u) - h_\mu(t, v)\| \le \gamma_\eta(t)\|u - v\|;$$
- pour tout $(t, u) \in I \times H$, on a
$$\|h_\mu(t, u)\| \le \beta(t)(1 + \|u\|). \tag{3.1.1}$$

Par conséquent, le Théorème 2.2.2 entraine que, pour tout $\zeta \in S_\Gamma$ et pour tout $\mu \in S_\Sigma$, chacun des problèmes $(\mathcal{PO}(\zeta))$ et $(\mathcal{PR}(\mu))$ possède une unique solution, que l'on note par $u_\zeta(\cdot)$ et $u_\mu(\cdot)$ respectivement. De plus, on a

$$\{u_\zeta(\cdot) : \zeta \in S_\Gamma\} \subset \{u_\mu(\cdot) : \mu \in S_\Sigma\}.$$

***Remarque* 3.1.1.** *Une autre conclusion utile de la Proposition 2.2.2 assure que pour tout $\mu \in S_\Sigma$ et pour tout $s, t \in [T_0, T]$,*

$$\|u_\mu(t) - u_0\| \le [\xi(T)]^{\frac{1}{2}},$$

où

$$\xi(s) = b(s) + 2\sigma(s - T_0)\int_{T_o}^{s} b(\tau)\beta^2(\tau)\exp(2\sigma\int_{\tau}^{s}(\theta - T_0)\beta^2(\theta)\,d\theta)\,d\tau,$$

et pour tout $t \in [T_0, T]$

$$b(t) = (t - T_0)[\alpha^0 + 2\sigma(1 + \|u_0\|)^2\int_{T_0}^{t}\beta^2(\theta)\,d\theta].$$

En particulier, ceci révèle que

$$\sup\{\|u_\mu(t)\| : t \in [T_0, T],\ \mu \in S_\Sigma\} \le \|u_0\| + [\xi(T)]^{\frac{1}{2}} := \xi_{T_0,T}.$$

***Proposition* 3.1.2.** *Résultat de densité de Castaing et Valadier dans une forme qui découle directement de celui de Castaing, Salvadory et Thilbault (voir Proposition 3.2 [5]) Pour tout $\mu \in S_\Sigma$, il existe une suite $(\zeta_n(\cdot))$ dans S_Γ telle que la suite des mesures de Young associées (μ^n), où, $\mu_t^n := \delta_{\zeta_n(t)}$ converge dans $\mathcal{Y}(I, \lambda, U)$ vers μ.*

3.2 Résultat de relaxation

Le problème de contrôle optimal de type de Bolza à relaxer est le suivant :

$$\inf_{\zeta(\cdot)\in S_T}\int_{T_0}^{T} J(t, u_\zeta(t), \zeta(t))\,dt \qquad (P.O)$$

où $u_\zeta(\cdot)$ est l'unique solution absolument continue de

$$(\mathcal{PO}(\zeta))\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in \partial\psi(t, u(t)) + f(t, u(t), \zeta(t)) \qquad \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) & = u_0 \end{cases}$$

et la fonction du coût $J : I \times H \times U \to \mathbb{R}$ est un intégrande tel que pour tout $t \in I$, $J(t, \cdot, \cdot)$ et continue sur $H \times U$, qui est bornée.

Le problème de contrôle relaxé est

$$\inf_{\mu\in S_\Sigma}\int_{T_0}^{T}\int_U J(t, u_\mu(t), x)\mu_t(dx)\,dt \qquad (P.R)$$

avec $u_\mu(\cdot)$ étant la solution absolument continue de

$$(\mathcal{PR}(\mu))\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in \partial\psi(t,\, u(t)) + \displaystyle\int_{\Gamma(t)} f(t,\, u(t),\, x)\mu_t(dx) \qquad \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) & = u_0. \end{cases}$$

***Remarque* 3.2.1.** *1) La fonction du coût J dans $(P.O)$ et $(P.R)$ prend des valeurs dans $[Tm_J,\, +\infty]$, où $m_J := inf J$.*

2) En raison de l'hypothèse de bornitude sur J et l'inclusion

$$\emptyset \neq \{u_\zeta(\cdot) : \zeta \in S_\Gamma\} \subset \{u_\mu(\cdot) : \mu \in S_\Sigma\},$$

il est vrai que

$$-\infty < inf(P.R) \leq \inf(P.O) \leq +\infty. \tag{3.2.1}$$

3) En fait, dans le Lemme 2.1.3, on a seulement besoin que ϕ satisfasse

$$\phi(t,\, h_n(t), u_n) \to \phi(t,\, h_\infty(t), u) \; .$$

pour tout $t \in I$ et toute suite (u_n) convergeant vers u.

***Proposition* 3.2.1.** *Sous les hypothèses en haut, supposons de plus que,*
(H_3) pour toute suite bornée $(u_n(\cdot))$ dans $(\mathcal{C}_H(I),\, \|\cdot\|_\infty)$ et pour toute suite $(\zeta_n(\cdot))$ dans S_Γ, la suite $(J(\cdot,\, u_n(\cdot),\, \zeta_n(\cdot)))$ est uniformément intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$.
Soit $\mu \in S_\Sigma$. Alors, la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)$ appartient à $L^1_{\mathbb{R}}(I)$. De plus, pour toute suite $(\zeta_n(\cdot))$ dans S_Γ telle que la suite des mesures de Young associées converge dans $\mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, U)$ vers μ, la suite $(u_{\zeta_n}(\cdot))$ converge uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$ vers $u_\mu(\cdot)$ et

$$\int_{T_0}^{T}\int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)\, dt = \lim_n \int_{T_0}^{T} J(t,\, u_{\zeta_n}(t),\, \zeta_n(t))\, dt.$$

***Remarque* 3.2.1.** *1) Sous l'hypothèse (H_3), la fonction objective dans $(P.O)$ est finie et chacun de* $\inf(P.O)$ *et* $\inf(P.R)$ *est un nombre réel.*

2) De même, en vertu de la Proposition 3.1.2, il n'est pas difficile de vérifier que la fonction du coût dans $(P.R)$ est finie sous l'hypothèse (H_3).

On revient maintenant à la démonstration de la Proposition 3.2.1.

Démonstration. Fixons $\mu \in S_\Sigma$.

A) D'abord, nous allons démontrer que, pour toute suite $(\zeta_n(\cdot))$ dans S_Γ telle que la suite des mesures de Young associées converge dans $\mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, U)$ vers μ, la suite $(u_{\zeta_n}(\cdot))$ converge uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$ vers $u_\mu(\cdot)$.

Fixons une suite $(\zeta_n(\cdot))$ dans S_Γ telle que la suite des mesures de Young associées (μ^n) converge dans $\mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, U)$ vers μ. Rappelons que, pour tout n, $u_{\mu^n}(\cdot)$ est l'unique solution du problème perturbé

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in \partial\psi(t,\, u(t)) + \displaystyle\int_{\Gamma(t)} f(t,\, u(t),\, x)\mu_t^n(dx) \qquad \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) & = u_0 \end{cases}$$

En vertu du Théorème 2.2.2 , en posant, pour tout $(t,\, u) \in I \times H$,

$$h_n(t,\, u) = \int_{\Gamma(t)} f(t,\, u,\, x)\mu_t^n(dx),$$

on a, pour presque tout $t \in I$

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{u}_{\mu^n}(t)\|^2 dt \leq \alpha^0 + \sigma \int_{T_0}^{T} \|h_n(t,\, u_{\mu^n}(t))\|^2 dt. \tag{3.2.2}$$

De la Remarque 3.1.1, il résulte

$$\|h_n(t, u_{\mu^n}(t))\| \leq \beta(t)(1 + \xi_{T_0,T}) \quad \text{p.p. } t \in I.$$

Notons par $u_\mu(\cdot)$ l'unique solution du problème perturbé

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in \partial\psi(t,\, u(t)) + \displaystyle\int_{\Gamma(t)} f(t,\, u(t),\, x)\mu_t(dx) \qquad \text{p.p. } t \in I \\ u(T_0) & = u_0. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

On va montrer que $(u_{\mu^n}(\cdot))$ converge uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$ vers $u_\mu(\cdot)$, en démontrant que toute sous-suite de $(u_{\mu^n}(\cdot))$ possède une sous-suite convergeant uniformément dans $\mathcal{C}_H(I)$ vers $u_\mu(\cdot)$.

Fixons une sous-suite de $(u_{\mu^n}(\cdot))$. Cette sous-suite sera encore notée $(u_{\mu^n}(\cdot))$. Grâce à (3.2.2), on peut encore extraire une autre sous-suite, et supposer que la sous-suite correspondante $(\dot{u}_{\mu^n}(\cdot))$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$ (puisqu'elle converge dans $L^2_{\mathbb{R}}(I)$) vers une fonction $a(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$; il s'en suit que, pour tout $t \in I$,

$$\int_{T_0}^{t} \dot{u}_{\mu^n}(s)\, ds \to \int_{T_0}^{t} a(s)\, ds \text{ faiblement dans } H.$$

Alors, définissons une fonction $u(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$ par

$$u(t) := u_0 + \int_{T_0}^{t} a(s)\, ds.$$

On a, pour tout $t \in I$

$$u_{\mu^n}(t) \to u(t) \text{ faiblement dans } H.$$

Démontrons maintenant, que la sous-suite $(u_{\mu^n}(\cdot))$ converge ponctuellement vers $u_\mu(\cdot)$.

De (2.2.4) et le Théorème 2.2.2 avec

$$h(t,\, u) = \int_{\Gamma(t)} f(t,\, u,\, x)\mu_t(dx),$$

on a pour presque tout $t \in I$,

$$\int_{T_0}^{T} \|\dot{u}_\mu(t)\|^2 dt \leq \alpha^0 + \sigma \int_{T_0}^{T} \|h(t,\, u_\mu(t))\|^2 dt. \tag{3.2.4}$$

En vertu de la Remarque 3.1.1, on a

$$\|h(t,\, u_\mu(t))\| \leq \beta(t)(1 + \xi_{T_0,T}) \quad \text{p.p. } t \in I.$$

Par les définitions de $u_{\mu^n}(\cdot)$ et $u_\mu(\cdot)$, on a, pour presque tout $t \in I$ et tout n

$$\begin{aligned}
-\, \dot{u}_{\mu^n}(t) &\in \partial\psi(t,\, u_{\mu^n}(t)) + h_n(t,\, u_{\mu^n}(t)) \\
-\, \dot{u}_{\mu}(t) &\in \partial\psi(t,\, u_{\mu}(t)) + h(t,\, u_{\mu}(t)) \\
u_{\mu^n}(T_0) = u_\mu(T_0) = u_0 &\in \operatorname{dom}\psi(T_0,\, \cdot).
\end{aligned}$$

La propriété de monotonicité du $\partial\psi(t,\, \cdot)$ garantit que

$$\langle -\dot{u}_{\mu^n}(t) + \dot{u}_\mu(t) - h_n(t,\, u_{\mu^n}(t)) + h(t,\, u_\mu(t)),\, u_{\mu^n}(t) - u_\mu(t)\rangle \geq 0,$$

pour tout n et pour presque tout $t \in I$. D'où

$$\langle \dot{u}_{\mu^n}(t) - \dot{u}_\mu(t),\, u_{\mu^n}(t) - u_\mu(t)\rangle \leq \langle -h_n(t,\, u_{\mu^n}(t)) + h(t,\, u_\mu(t)),\, u_{\mu^n}(t) - u_\mu(t)\rangle$$

ceci équivaut à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u_{\mu^n}(t) - u_\mu(t)\|^2) \leq \langle h_n(t,\, u_{\mu^n}(t)) - h(t,\, u_\mu(t)),\, u_\mu(t) - u_{\mu^n}(t)\rangle.$$

Mais,

$$\begin{aligned}
&\langle h_n(t,\, u_{\mu^n}(t)) - h(t,\, u_\mu(t)),\, u_\mu(t) - u_{\mu^n}(t)\rangle \\
&= \langle h_n(t,\, u_{\mu^n}(t)) - h_n(t,\, u_\mu(t)),\, u_\mu(t) - u_{\mu^n}(t)\rangle \\
&+ \langle h_n(t,\, u_\mu(t)) - h(t,\, u_\mu(t)),\, u_\mu(t) - u_{\mu^n}(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Notons que de (3.2.2), (3.2.4) et le fait que $u_\mu(\cdot),\, u_{\mu^n}(\cdot) \in \mathcal{C}_H(I)$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout n et pour tout $t \in I$,

$$u_{\mu^n}(t),\, u_\mu(t) \in B[0,\, \eta].$$

Les hypothèses sur f impliquent qu'il existe une fonction non-négative $\gamma_\eta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$ telle que, pour tout $t \in I$, $h_n(t,\, \cdot)$ est $\gamma_n(t)$-lipschitzienne sur $B[0,\, \eta]$.

Ainsi, on a, pour tout n et pour presque tout $t \in I$

$$\frac{d}{dt}(\|u_{\mu^n}(t) - u_\mu(t)\|^2) \leq 2\gamma_\eta(t)\|u_{\mu^n}(t) - u_\mu(t)\|^2 + 2\zeta_n(t). \tag{3.2.5}$$

où

$$\zeta_n(t) := \langle h_n(t,\, u_\mu(t)) - h(t,\, u_\mu(t)),\, u_\mu(t) - u_{\mu^n}(t)\rangle. \tag{3.2.6}$$

Notons que grâce à (3.1.1) et aux définitions de h_n et h, pour tout n et pour tout $t \in I$,

$$|\zeta_n(t)| \leq 4\eta(1+\eta)\beta(t), \tag{3.2.7}$$

et par conséquent la suite $(\zeta_n(\cdot))$ est bornée dans $L^1_{\mathbb{R}}(I)$.

Montrons que $\lim_n \int_{T_0}^s \zeta_n(t)\, dt = 0$ pour tout $s \in I$. Par les définitions de h_n et h, on a

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^s \zeta_n(t)\, dt = &\int_{T_0}^s \int_{\Gamma(t)} \langle f(t,\, u_\mu(t),\, x),\, u_\mu(t) - u_{\mu^n}(t)\rangle \mu^n_t(dx)\, dt \\ &- \int_{T_0}^s \int_{\Gamma(t)} \langle f(t,\, u_\mu(t),\, x),\, u_\mu(t) - u_{\mu^n}(t)\rangle \mu_t(dx)\, dt.\end{aligned}$$

Posons pour $(t,\, u,\, x) \in I \times H \times U$,

$$\phi(t,\, u,\, x) := \langle f(t,\, u_\mu(t),\, x), u_\mu(t) - u\rangle \mathbb{1}_{[T_0,\, s]}(t).$$

Évidemment, pour tout $t \in I$, la fonction $\phi(t,\, \cdot,\, \cdot)$ est séquentiellement continue sur $H^w \times U$ et, avec $u_\infty(\cdot) := u(\cdot)$, pour tout $(t,\, n,\, x) \in I \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times U$, on a

$$|\phi(t,\, u_{\mu^n}(t),\, x)| \leq 2\eta(1+\eta)\beta(t). \tag{3.2.8}$$

Comme pour tout n et pour tout $t \in I$, μ^n_t et μ_t sont des mesures de probabilité satisfaisant $\mu^n_t(\Gamma(t)) = \mu_t(\Gamma(t)) = 1$, on peut écrire

$$\int_{T_0}^s \zeta_n(t)\, dt = \int_{T_0}^T \int_U \phi(t,\, u_{\mu^n}(t),\, x)\mu^n_t(dx)\, dt - \int_{T_0}^T \int_U \phi(t,\, u_{\mu^n}(t),\, x)\mu_t(dx)\, dt.$$

Considérons les mesures de Young $\theta^n,\, \rho^n,\, \theta \in \mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, H \times U)$ définies par $\theta^n_t := \delta_{u_{\mu^n}(t)} \otimes \mu^n_t$, $\rho^n_t := \delta_{u_{\mu^n}(t)} \otimes \mu_t$ et $\theta_t := \delta_{u(t)} \otimes \mu_t$, la dernière égalité équivaut à la suivante

$$\int_{T_0}^{s} \zeta_n(t)\, dt = \int_{I\times H\times U} \phi\, d\theta^n - \int_{I\times H\times U} \phi\, d\rho^n.$$

Via le Lemme 2.1.3, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{s} \zeta_n(t)\, dt = \int_{I\times H\times U} \phi\ d\theta - \int_{I\times H\times U} \phi\ d\theta = 0.$$

D'où, en appliquant le Lemme 2.1.1 à l'inégalité (3.2.5), on conclut que la sous-suite $(u_{\mu^n}(\cdot))$ converge ponctuellement vers $u_\mu(\cdot)$.

Montrons que la convergence est actuellement uniforme. De retour à (3.2.5) et (3.2.6), on a, pour presque tout $t \in I$.

$$\frac{d}{dt}(\|u_{\mu^n}(t) - u_\mu(t)\|^2) \leq 2\gamma_\eta(t)\|u_{\mu^n}(t) - u_\mu(t)\|^2 + 2|\zeta_n(t)|.$$

et

$$\begin{aligned} |\zeta_n(t)| &\leq (\|h_n(t,\, u_\mu(t))\| + \|h(t,\, u_\mu(t))\|)\|u_\mu(t) - u_{\mu^n}(t)\| \\ &\leq 2(1+\eta)\beta(t)\|u_\mu(t) - u_{\mu^n}(t)\|. \end{aligned}$$

Comme la sous-suite $(u_{\mu^n}(\cdot))$ converge ponctuellement vers $u_\mu(\cdot)$ sur I, il s'en suit que $\zeta_n(t) \to 0$ pour presque tout $t \in I$. Ceci avec (3.2.7) entraîne, via le Théorème de la convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{s} |\zeta_n(t)|\, dt = 0.$$

Il s'en suit du Lemme 2.1.2 que, la sous-suite $(u_{\mu^n}(\cdot))$ converge uniformément vers $u_\mu(\cdot)$ dans $\mathcal{C}_H(I)$.

B) Maintenant, nous allons montrer que la fonction

$$t \mapsto \int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)$$

est λ-intégrable et

$$\lim_n \int_{T_0}^{T} J(t,\, u_{\zeta_n}(t),\, \zeta_n(t))\, dt = \int_{T_0}^{T} \int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)\, dt.$$

Considérons pour tout n, la mesure de Young $\theta^n \in \mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, H \times U)$ définie par

$$\theta_t^n := \delta_{u_{\zeta_n}(t)} \otimes \delta_{\zeta_n(t)}.$$

Comme, pour tout $t \in I$. on a $\mu_t^n := \delta_{\zeta_n(t)}$ et alors $u_{\mu^n}(t) = u_{\zeta_n}(t)$, par la Proposition 2.1.1, la suite (θ^n) converge dans $\mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, H \times U)$ vers la mesure de Young θ définie par $\theta_t := \delta_{u_\mu(t)} \otimes \mu_t$.

Pour tout n, soit $v_n(\cdot) := I \to H \times U$ la fonction définie par $v_n(t) = (u_{\zeta_n}(t),\, \zeta_n(t))$. On a $\theta_t^n := \delta_{v_n(t)}$ pour tout $t \in I$. Comme, par hypothèse, la suite $(J(\cdot,\, v_n(\cdot)))$ est uniformément intégrable, via la Proposition 2.1.2, on obtient que J est θ-intégrable et

$$\lim_n \int_{T_0}^{T} J(t,\, u_{\zeta_n}(t),\, \zeta_n(t))\, dt = \int_{I\times H\times U} J\, d\theta.$$

En vertu de la Remarque 2.1.2 1) , la fonction

$$t \mapsto \int_{H\times U} J(t,\, u,\, x)\delta_{u_\mu(t)} \otimes \mu_t(d(u,\, x)) = \int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)$$

est λ-intégrable et

$$\int_{I\times H\times U} J\, d\theta = \int_{T_0}^{T} \int_U J(t, u_\mu(t), x)\mu_t(dx)\, dt.$$

Par conséquent

$$\lim_n \int_{T_0}^{T} J(t,\, u_{\zeta_n}(t),\, \zeta_n(t))\, dt = \int_{T_0}^{T} \int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)\, dt.$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition. □

***Remarque* 3.2.2.** *En effet, nous avons démontré que, pour $\mu^n,\, \mu \in S_\Sigma\, (n \geq 1)$, si la suite (μ^n) converge dans $\mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, U)$ vers μ alors $(u_{\mu^n}(\cdot))$ converge uniformément vers $u_\mu(\cdot)$ dans $\mathcal{C}_H(I)$.*

Démontrons maintenant le résultat le plus important de cette section, concernant les deux problèmes de contrôle suivants:

$$\inf_{\zeta(\cdot)\,\in\, S_\Gamma} \int_{T_0}^{T} J(t,\, u_\zeta(t),\, \zeta(t))\, dt \qquad (P.O)$$

et

$$\inf_{\mu\in S_\Sigma} \int_{T_0}^{T} \int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)\, dt. \qquad (P.R)$$

***Théorème* 3.2.3.** *Sous les hypothèses de la Proposition 3.2.1, le problème de contrôle $(P.R)$ admet une solution optimale. De plus, on a*

$$\min(P.R) = \inf(P.O).$$

Démonstration. De la Proposition 3.2.1, l'égalité $\inf(P.R) = \inf(P.O)$ est vraie.
En effet, pour tout $\mu \in S_\Sigma$, du résultat de densité de Castaing et Valadier (Proposition 3.1.2), il existe une suite $\zeta_n(\cdot) \in S_\Gamma$ telle que les mesures de Young associées converge dans $\mathcal{Y}(I,\, \lambda,\, U)$ vers μ, et la Proposition 3.2.1 assure que

$$\lim_n \int_{T_0}^{T} J(t,\, u_{\zeta_n}(t),\, \zeta_n(t))\, dt = \int_{T_0}^{T} \int_U J(t,\, u_\mu(t), x)\mu_t(dx)\, dt.$$

Comme il est évident que, pour tout n

$$\int_{T_0}^{T} J(t,\, u_{\zeta_n}(t),\, \zeta_n(t))\, dt \geq \inf(P.O),$$

on a

$$\int_{T_0}^{T} \int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)\, dt \geq \inf(P.O),$$

et d'où

$$\inf(P.R) \geq \inf(P.O).$$

L'inégalité inverse (3.2.1) étant toujours vraie implique que

$$\inf(P.R) = \inf(P.O). \tag{3.2.9}$$

Reste à démontrer que $\inf(P.R)$ est un minimum.

Pour cela, soit $(\zeta_n(\cdot))$ une suite minimisante de (P.O), i.e., $\zeta_n(\cdot) \in S_\Gamma$ pour tout n et

$$\inf(P.O) = \lim_n \int_{T_0}^{T} J(t,\, u_{\zeta_n}(t),\, \zeta_n(t))\, dt. \tag{3.2.10}$$

pour tout n, on définit $\mu^n : I \to \mathcal{M}_+^1(U)$ par $\mu_t^n := \delta_{\zeta_n(t)}$.

Il est clair que $\mu^n \in S_\Sigma$. Ainsi, de la Proposition 2.1.3 et la Proposition 3.1.1, on peut extraire une sous-suite μ^n que l'on suppose convergente dans $\mathcal{Y}_{dis}(I,\, \lambda,\, U)$ vers $\mu \in S_\Sigma$. Il s'en suit de la Proposition 3.2.1 que la suite $(u_{\zeta_n}(\cdot))$ converge uniformément vers l'unique solution $u_\mu(\cdot)$ du problème $(\mathcal{PR}(\mu))$ et

$$\lim_n \int_{T_0}^{T} J(t,\, u_{\zeta_n}(t),\, \zeta_n(t))\, dt = \int_{T_0}^{T} \int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)\, dt.$$

D'où, tenant compte de (3.2.10), on a

$$\inf(P.O) = \int_{T_0}^{T} \int_U J(t,\, u_\mu(t),\, x)\mu_t(dx)\, d(t). \tag{3.2.11}$$

Maintenant, l'égalité (3.2.9) révèle que μ est actuellement un contrôle optimal relaxé, i.e.,

$$\inf(P.O) = \min(P.R)$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème. $\square$

CONCLUSION

La théorie des mesures de Young est très riche en applications, surtout au contrôle optimal. Dans ce mémoire, on a étudié, via le Théorème d'existence et d'unicité (Théorème 2.2.2), la relaxation de problèmes de contrôle optimal, faisant intervenir des mesures de Young, et soumis à des contraintes sous forme d'inclusions différentielles perturbées gouvernées par le sous-différentiel d'une fonction ψ convexe satisfaisant des hypothèses appropriées (voir [14]).
De similaires problèmes de relaxation avec les mesures de Young, ont été étudiés dans le cas de dimension finie, voir [4] pour des équations différentielles ordinaires correspondant au cas $\psi \equiv 0$.
Des nombreux résultats liés au contrôle optimal ont été obtenus. Pour plus de détails, on réfère le lecteur à [3], [5], [7], [8], [9], [12].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brezis, H. : Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Lecture Notes in Math. North-Holland/American Elsevier, Amsterdam/New York (1973).

[2] Brezis, H. : Analyse fonctionnelle, théorie et application, Masson (1983).

[3] Castaing, C., Jofré, A., Salvadori, A. : Control problemes governed by functional evolution inclusions with Young measures. Journal of nonlinear and convex analysis. Volume 5, (2004), 131-152.

[4] Castaing, C., Raynaud de Fitte, P. : On the fiber product of Young measures with applications to a control problem with measures. Adv. math. Econ. 6, (2004),1-38.

[5] Castaing, C., Salvadori, A., Thibault, L. : Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process. Journal of nonlinear and convex analysis. Volume 2, november 2, (2001), 217-241.

[6] Castaing, C., Valadier, M. : Convex analysis and Measurable Multifunctions. Lecture Notes in Math., 580, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1977).

[7] Edmond, J.F. : Problèmes d'évolution associés à des ensembles prox-réguliers. Inclusions et intégration de sous-différentiels. Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, 2004.

[8] Edmond, J.F., Thibault, L. : Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. Math. Program, Ser. B 104, (2005),347-373.

[9] Edmond, J.F. : Delay perturbed sweeping process. Set-Valued Anal (2006)14 : 295- 317.

[10] Jawhar, A. : Mesures de tronsition et applications. Sém. Anal. Convexe Montplier, exposé No. 13, (1984).

[11] Jawhar, A. : Existence de solutions optimales pour des problèmes de contrôle de systèmes gouvernés par des équations différentielles multivoques. Sém. Anal. Convexe Montpellier, exposé No. 1, (1985).

[12] Marcellin, S. : Intégration d'epsilon-sous différentiels et problèmes d'évolution non convexes. Thèse de doctorat de spécialité, Languedoc, décembre 2004.

[13] Peralba, J.C. : Équations d'évolution dans un espace de Hilbert, associées à des opérateurs sous-différentiels. Thèse de doctorat de spécialité, Languedoc, 1972-1973.

[14] Saïdi, S. : Étude de problèmes d'évolution régis par un opérateur sous différentiel et applications au contrôle, Thèse de doctorat de spécialité, Jijel, 2015.

[15] Saïdi, S., Thibault L. and Yarou, M. : Relaxation of optimal control problems involving time dependent subdifferential operators, Numer. Funct. Anal. Optim. 34(10) (2013), 1156-1186.