REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Option : Analyse et Applications

Thème

ETUDE D'UNE INEQUATION QUASI-VARIATIONNELLE DE TYPE ELLIPTIQUE

-Application de théorème de point fixe-

Présenté par :

BOUDOUDA Halima & DEGHDACHE Meriem

Devant le jury :

Président :	**A. MAKHLOUF**	**M.C.B**	**Université de Jijel**
Encadreur :	**S. MEDJERAB**	**M.A.A**	**Université de Jijel**
Examinateur :	**W. BOUKROUK**	**M.C.B**	**Université de Jijel**

Promotion 2016/2017

Table des matières

Introduction générale **2**

Notations **6**

1 Notions et définitions préliminaires **8**

1.1 Rappels sur les espaces vectoriels normés 8

1.2 Convergence et continuité dans un espace vectoriel normé 10

1.3 Dualité 14

1.4 Formes bilinéaires continues 18

1.5 Espace de Hilbert 20

1.6 Convexité et semi continuité inférieure 21

2 Théorème du point fixe et ses applications aux inéquations quasi-variationnelles **26**

2.1 Version du Théorèmes de point fixe 26

2.2 Résolution d'une inéquation quasi-variationnelle de type elliptique 32

3 Problèmes de contact avec frottement **45**

3.1 Petits rappels 45

3.2 Notions simples de mécanique du solide 52

3.3 Problème physique d'élasticité linéarisée 55

3.4 Modèle mathématique du problème physique 59

Conclusion **71**

Bibliographie **72**

Introduction générale

La théorie des inéquations variationnelles a débuté avec les problèmes de minimisation de fonctionnelles. L'étude systématique de cette théorie remonte aux travaux de G. Fichera et son analyse du problème de Signorini en 1964. Cette théorie a connu de nombreux développements, d'abord avec les travaux de G. Stampacchia et P. Hartmann en 1966 et ensuite avec la contribution en 1967 de G. Stampacchia et J.L. Lions. Ces derniers ont utilisés les inéquations variationnelles pour l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques, associées à des formes bilinéaires coercives, dans le but d'appliquer leurs résultats aux problèmes de la théorie de l'élasticité, de la plasticité et de la mécanique.

Les domaines d'applications des inéquations variationnelles sont nombreux, citons la variété de divers domaines des sciences pures et appliquées (la physique, la chimie, l'économie, la finance etc...). Il n'est pas étonnant que cette théorie ait conduit à de nombreuses contributions depuis les années soixante. Mais dans ces dernières années, les inéquations variationnelles ont été généralisées et prolongées dans plusieurs directions en utilisant des nouvelles techniques. Elle a été mis en place et considéré comme une nouvelle classe des inéquations variationnelles qui s'appelle en général inéquation quasi-variationnelle. La théorie des inéquations quasi-variationnelles (ou I.Q.V), introduite par A. Bensoussan et J-L. Lions [6] et Tartar [29], est apparue récemment comme un outil particulièrement puissant pour la résolution de problèmes apparaissant en économie et en physique.

Cette théorie a démontrée que les inégalités variationnelles et quasi-variationnelles fournissent un cadre simple, unifié et efficace pour un traitement général d'une large classe de problèmes numériques et de problèmes aux limites de valeurs linéaires et non linéaires.

L'étude mathématique d'inéquations variationnelles et quasi-variationnelles nécessite l'existence des espaces fonctionnels importants qui s'appellent espaces de Sobolev. Ces espaces dont les puissances et les dérivées au sens faible sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ils sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles et la résolution des problèmes mécanique.

Les espaces de Sobolev sont des structures mathématiques très intéressantes pour résoudre les formulations variationnelles des EDP. En Physique, ces espaces de Sobolev s'interprètent comme des fonctions d'énergie.

La mécanique et les mathématiques ont été des partenaires complémentaires depuis le temps de Newton, et l'histoire de la science montre beaucoup de preuve de l'influence bénéfique de ces disciplines les unes sur les autres. Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans lesquelles un corps déformable est en contact avec d'autres corps, cette caractérisation de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure; sa déformation, son mouvement, la distribution des efforts, etc...

En dépit du rôle fondamental du contact dans les mécanismes des solides et des structures, les efforts de contacts sont rarement pris en considération dans l'analyse des structures. La raison est que modéliser des phénomènes de contact pose de sérieuses difficultés conceptuelles mathématiques et informatiques qui sont bien plus complexes que celles qui proviennent de la mécanique des structures linéaire classique.

Le contact entre les matériaux est un phénomène très fréquent et important dans notre vie quotidienne et il a attiré l'attention de l'être humain depuis les anciens temps, c'est pourquoi les scientifiques ont essayé de l'étudier et le modéliser. La connaissance et la maîtrise de ce phénomène confèrent aux scientifiques et aux industriels la possibilité d'élaborer des matériaux aux propriétés et aux performances voulues. A cause de l'importance de ces phénomènes, les études consacrées à ce vaste sujet qu'est la mécanique de contact.

Les humains se sont intéressés aux problèmes de contact entre deux corps, ou les problèmes de contact sont posés avec ou sans frottement entre corps déformables ou entre un corps et une fondation rigide, qui ont trouvée dans la vie de tous les jours, et surtout les phénomènes de frottement interviennent dans de nombreuses applications quotidiennes et industrielles; la marche, une roue qui roule, une chaîne de vélo, sont autant d'exemples d'applications où l'on retrouve du frottement soit utile soit parasite. Le frottement est utile à la marche mais parasite dans le cas des roulements.

L'objet de la théorie d'élasticité classique est l'étude des déformations des matériaux solides élastiques sous l'effet de forces extérieures, ces forces peuvent déplacer ou déformer le corps des solides. L'élasticité est une propriété physique d'un corps reprend sa forme initiale après la suppression des contraintes extérieures. En 1933, A. Signorini pose le problème général de l'équilibre d'un corps élastique en contact sans frottement sur une fondation rigide. Les conditions de contact ont été formulées par lui même [26] en 1959. Il s'ensuite le travail de Fichera [16] en 1964 où le problème de Signorini a été résolu en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Fichera donne la preuve de l'existence d'une solution faible. Duvaut et Lions [14] présentent la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact accompagnée des résultats d'existence et d'unicité.

La théorie d'élasticité décrit une relation d'équilibre entre deux forces $f_0 = f_2$, f_0 est une force provoquée par la déformation de la matière et f_2 une force provoquée par l'exertion de force à la surface de l'objet. Les quantités f_0 et f_2 sont des densités de force locale à un point de la matière, ces forces sont des tenseurs.

Avant l'application de forces à un corps, la surface de contact réelle sur laquelle les corps se touchent est inconnue. Les conditions de frontière sur cette surface inconnue fait intervenir des efforts et des déplacements inconnus. En conséquence, les modèles mathématiques de contact impliquent des systèmes d'inégalités ou d'équations linéaires et non linéaires. D'ailleurs, quand le frottement est présent, la description du mouvement des corps en contact devient extrêmement complexe. Néanmoins, il y a des formulations spécifiques de certaines classes de problèmes de contact dans lesquelles ces difficultés classiques sont réduites au minimum et qui fournissent la base pour une méthode d'analyse mathématique.

Dans ce travail, on s'intéresse aux problèmes de contact dans le cas de petites déformations d'un corps élastique frottant avec glissement sur une fondation rigide plane, et nous consacrons notre étude sur l'existence et l'unicité de solution des inéquations quasi-variationnelle.

Ce travail se compose d'une introduction, conclusion et trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle des outils mathématiques qui seront utilisés dans les autres chapitres. La plupart des résultats sont indiqués sans preuves, car ils sont standard et peuvent être trouvés dans de nombreuses références. On s'intéresse aux petits rappels et quelques notions et résultats classiques d'analyse fonctionnelle. Nous commençons par une revue des définitions et des propriétés des espaces linéaires normalisés et des espaces de Banach, compris les résultat sur la dualité, la convergence faible et les formes bilinéaires continues. Nous rappelons ensuite certaines propriétés des espaces de Hilbert. Enfin nous décrivons aussi des définition sur la convexité et semi continuité inférieure.

Le deuxième chapitre présente la théorie des inéquations variationnelles et quasi-variationnelles. Il sera divisé en deux parties principales, la première sera consacrée au version du théorème de point fixe de Banach et la seconde partie sera formalisée par l'étude d'inéquations variationnelles et quasi-variationnelles linéaires coercives, notre problème est lié à la convexité et la semi continuité inférieure de la fonctionnelle d'énergie associée et la nature de la forme bilinéaire qui gouverne l'inéquation quasi-variationnelle.

Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons aux problèmes de contact avec frottement et contient deux partie remarquable. Nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels (espaces de Lebesgue, espaces de Sobolev, espace de distributions...). Puis nous proposons une contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact et nous considérons la loi de comportement linéaires pour des matériaux élastiques dans le processus statique. Pour la résolution de notre problème à étudier, nous commençons par décrire le problème mécanique de départ et la loi de comportement de glissement, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique, après avoir précisé les hypothèses sur les données. Ensuite, nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible du problème traité.

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de notre travail.

$\mathbb{K}$	Corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
E	Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
$\\|\cdot\\|_E$	Norme sur E.
e.v.n	Espace vectoriel normé.
$(E, \\|\cdot\\|_E)$	Espace normé sur E.
$L(E,F)$	Espace des applications linéaires de E dans F.
$\mathcal{L}(E,F)$	Espace des applications linéaires continues de E dans F.
$\mathcal{L}(E)$	Espace des applications linéaires continues de E dans lui-même.
E'	Espace dual de E.
$< \cdot, \cdot >_{E\times E'}$	Produit de dualité entre E et E'.
E''	Espace bidual de E.
$\longrightarrow$	Convergence forte.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
s.c.i	Semi continuité inférieure.
Ω	Ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.
$\overline{\Omega}$	Adhérence de Ω.
$L^p(\Omega)$	Espaces de Lebesgue ou de classes des fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue, où $1 \leq p \leq \infty$.
p.p	Presque partout.
$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$	Multi-indice avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i = 1, ..., n$.
D^α	Opérateur différentiable d'ordre α.
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω.
$C^m(\Omega)$	Espace des fonction m fois continûment différentiables sur Ω.
$Suppf$	Support d'une fonction f.
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions infiniment différentiables à support compact sur Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace des distribution sur Ω.
$L^1_{\text{loc}}(\Omega)$	Espace des fonctions localement intégrables sur Ω.
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev de deux paramètres k et p sur Ω.
$H^k(\Omega)$	Espace de Sobolev avec $p = 2$.
$H^1_0(\Omega)$	Adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$B(x_0, r)$	Boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.
γ	Opérateur de trace.
$\mathbb{R}^d$	Espace Euclidien de dimension d, avec $d = 2, 3$.
$\mathbb{S}^d$	Espace des tenseurs symétriques de second ordre dans $\mathbb{R}^d$.
$[0, T]$	Intervalle de temps, avec $T > 0$.
u	Champ de déplacements.
Γ	Frontière du domaine Ω, et $\Gamma = \Gamma_C \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N$.
$mes(\Gamma_C)$	Mesure de Lebesgue de Γ_C.
$\sigma(u)$	Tenseur des contraintes.
$\varepsilon(u)$	Tenseur des déformations.
$\mathcal{A}$	Tenseur d'élasticité.
div	Opérateur de divergence.
I	Opérateur d'identité de $\mathbb{R}^d$.
n	Vecteur unitaire normal.
f_0	Force volumique.
f_2	Force surfacique.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
∂_n	Dérivée normale.
u_n, u_τ	Composantes normale et tangentielle du vecteur de déplacement u.
σ_n, σ_τ	Composantes normale et tangentielle du vecteur de contrainte σ.
∇u	Gradient de u.
$u \cdot v$	Produit scalaire entre u et v dans l'espace $\mathbb{R}^d$.

Chapitre 1

Notions et définitions préliminaires

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques outils de bases et certains résultats classiques d' analyse fonctionnelle. On s'intéresse à une introduction à l'étude des espaces vectoriels normés et des applications linéaires continues entre de tels espaces et de consacrer à l'étude des espaces de Banach qui sont les espaces vectoriels normés complets pour la distance associée à la norme. Ce chapitre constitue aussi la notion de dualité qui est la base de la théorie des distributions et la procédure dite d'identification du dual d'un espace de Banach à un autre espace de Banach ainsi qu'une notion affaiblie de la convergence qui est définie dans le cadre du dual d'un espace de Banach, la convergence dite faible.

1.1 Rappels sur les espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre tous les espaces vectoriels considérés seront sur $\mathbb{K}$ (le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes) et $\overline{\lambda}$ désigne le nombre complexe conjugué de $\lambda \in \mathbb{C}$.

Définition 1.1.1. (Semi-norme et norme)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on dit qu'une application $\|.\|_E$ de E dans $\mathbb{R}$ est une ***semi-norme*** *sur E si les conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E$ (**homogénéité**).*
2. *Pour tout $x, y \in E$, $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ (**inégalité triangulaire**).*

L'homogénéité implique que $\|0\|_E = 0$, et l'inégalité triangulaire implique que $\|x\|_E \geq 0$. On appelle ***norme*** *toute semi-norme vérifiant de plus:*

3. *$\|x\|_E = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ (**condition de séparation**).*

Définition 1.1.2. (Espace vectoriel normé)
On appelle espace vectoriel normé (e.v.n) tout espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une norme.

Exemples 1.1.1.

a) $E = \mathbb{K}^n$, $n \geq 1$. *Pour* $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, *on définit*

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \ \|x\|_2 = \sqrt{(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2}, \ \|x\|_\infty = \sup(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

L'espace vectoriel E *muni de l'une de ces trois normes est un e.v.n.*

b) On pose $E = C([a,b], \mathbb{K})$ *étant l'espace des fonctions continues sur l'intervalle* $[a,b]$ *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$. *Pour tout* $f \in E$, *on définit*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx, \ \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \ \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

L'espace vectoriel E *muni d'une norme* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *où* $\|.\|_\infty$ *est un e.v.n, donc on peut avoir plusieurs normes sur le même espace.*

Définition 1.1.3. (Distance associée à une norme)
Soit $(E, \|.\|_E)$ *un espace normé. On définit une distance entre deux éléments* x *et* y *de* E, *par*

$$d(x,y) = \|x - y\|_E.$$

Cette distance est appelée ***distance associée à une norme*** *et tout e.v.n est un espace métrique.*

Définition 1.1.4. (Normes équivalentes)
Deux normes $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *définies sur un espace vectoriel* E *sont dites* ***équivalentes*** *s'il existe des constantes* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *telles que*

$$\forall x \in E, \ c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1.$$

Remarques 1.1.1.

1. *Deux normes équivalentes définissent deux métriques équivalentes et donc des topologies identiques sur* E *(qui ne dépend pas de la norme).*
2. *Sur tout espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Si on prend* $E = \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

Par contre dans un espace de dimension infinie. Si on prend un contre exemple : Les deux normes $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *qui sont définies sur* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *(voir l'exemple précédent) ne sont pas équivalentes; on a la première inégalité*

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty.$$

Mais on n'a pas d'inégalité dans l'autre sens. En effet
On considère la suie $(f_n)_{n\geq 1}$ *d'élément de* E *définie par:*

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^2x+n & si \quad x \in [0, \frac{1}{n}]. \\ \\ 0 & si \quad x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

On a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\, f_n(x)| = n, \quad et \quad \|f_n\|_1 = \int_0^1 \big|f_n(x)\big| dx = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc il n'existe pas c tel que $\|f_n\|_\infty \leq c\|f\|_1$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Donc les normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *ne sont pas équivalentes.*

1.2 Convergence et continuité dans un espace vectoriel normé

Dans cette partie, on utilise la notion d'une norme pour définir la notion de convergence des suites dans un espace vectoriel E.

1.2.1 Suites et convergence dans un espace vectoriel normé

Définition 1.2.1. (Suites convergentes)
On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des vecteurs d'espace vectoriel normé* $(E, \|.\|_E)$ ***converge fortement*** *vers un vecteur* $x \in E$ *si et seulement si la propriété suivante est vérifiée*
la suite réelle de terme général $\|x_n - x\|_E$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini.*
Autrement dit,

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x\|_E < \varepsilon.$$

Si ce n'est pas le cas, on dit que la suite ***diverge****.*
Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* x*, on dira que* x *est une limite* ***forte*** *de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et on notera*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad ou \quad x_n \longrightarrow x \quad dans\ E.$$

La notion de la convergence dans un e.v.n est liée au choix de la norme sur cet espace. Le théorème suivant montre qu'il est possible de généraliser la notion de la convergence de suite dans un e.v.n, dans le cas ou l'on choisit deux normes équivalentes sur cet espace.

Théorème 1.2.1.
Soit E un espace vectoriel $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur E.
$\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement si toute suite convergeant vers 0_E pour une norme converge vers 0_E pour l'autre norme.

Définition 1.2.2. (Suites extraites)
On appelle suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une application ***strictement croissante*** *de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$).*

Remarque 1.2.1. (Caractérisation des suites convergentes)
Une suite est dite convergente si et seulement si toutes les suites extraites de cette suite convergent et ont la même limite.

Définition 1.2.3. (Suites de Cauchy)
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un e.v.n $(E, \|.\|_E)$ est dite de ***Cauchy*** *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir du quel on a $\|x_m - x_n\|_E < \varepsilon$, ce qui s'écrit*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad m, n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_m - x_n\|_E < \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2; \quad \forall n \geq n_0, \Longrightarrow \|x_{n+p} - x_n\|_E < \varepsilon.$$

Remarques 1.2.2.

1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
   En dimension infinie, la réciproque est fausse. Mais, dans un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.
2. *Si deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes sur E, alors toute suite de Cauchy pour $\|.\|_1$ est également une suite de Cauchy pour $\|.\|_2$.*

Définition 1.2.4. (Suites bornées)
Soient $(E, \|.\|_E)$ un e.v.n. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est bornée, s'il existe $c > 0$ tel que

$$\|x_n\|_E \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est bornée si l'ensemble $\{||x_n||_E,\ n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Remarques 1.2.3.

1. *Toute suite convergente est bornée.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *De toute suite bornée de E on peut extraire une suite convergente (voir le théorème de Bolzano-Weierstrass [11]).*

1.2.2 Espaces Complets

Définition 1.2.5. (Espace Vectoriel Normé complet)
*Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. On dit que E est **complet** si toute suite de Cauchy de E converge vers un élément de cet espace.*

Définition 1.2.6. (Espace de Banach)
*Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. On dit que $(E, \|.\|_E)$ est un espace de **Banach** si et seulement si l'espace métrique (E, d) où d est la distance associée à la norme $\|.\|_E$ (i.e. $d(x, y) = \|x - y\|_E$) est un espace complet.*

Exemples 1.2.1.

1. $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$ *est un espace de Banach.*
2. $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ *sont des espaces de Banach.*
3. *L'espace des fonctions $C([0, 1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach mais cet espace muni de la norme $\|.\|_1$ n'est pas complet donc n'est pas de Banach.*

1.2.3 Limite et continuité dans un espace vectoriel normé

Définition 1.2.7.
Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F. Soit $x_0 \in E$, on dit que f a une limite ℓ quand x tend vers x_0, si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E : \|x - x_0\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

On écrira alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}}{\longrightarrow} \ell$.

Cette notion de limite reste inchangée si l'on utilise des normes équivalentes.

Définition 1.2.8. (Continuité d'une application dans un e.v.n)
Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F.

1. *f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \|x - x_0\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon.$$

   On écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. *On dit que f est continue sur E si et seulement si f est continue en tout point de E.*

Maintenant, on donne une caractérisation séquentielle de la continuité.

Proposition 1.2.1.
Une fonction f: $(E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|_F)$ est continue en un point $x_0 \in E$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'espace E convergeant vers $x_0 \in E$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$ dans F.

1.2.4 Applications Lipschitziennes et uniforme continuité

Définition 1.2.9. (Applications lipschitziennes)
Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F.
*Soit $k \in]0, +\infty[$, f est dite k-**lipschitzienne** (lipschitzienne de rapport k) sur E, si*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E, \ \ \forall x, y \in E.$$

Autrement dit, f est dite lipschitzienne sur E s'il existe $k > 0$ telle que f soit k-lipschitzienne sur E.
*f est dite **contractante** sur E s'il existe $k \in]0, 1[$ telle que f soit lipschitzienne sur E.*

Exemple 1.2.2.
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. Alors, $\|.\|_E$ est une application 1-lipschitzienne. En effet, on a toujours

$$\big|\|x\|_E - \|y\|_E\big| \leq \|x - y\|_E, \quad \forall x, y \in E.$$

Conséquence immédiate: une application lipschitzienne est continue mais la réciproque est fausse.

Définition 1.2.10. (Continuité uniforme)
*Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F. On dit que l'application f est **uniformément continue** sur E si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \forall (x, y) \in E^2, \ \|x - y\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$$

Remarques 1.2.4.

1. *La continuité uniforme est une propriété plus forte que la continuité usuelle.*
2. *Il est clair qu'une application uniformément continue est nécessairement continue.*

   En effet, si l'on souhaite démontrer la continuité de f en $x_0 \in E$, il suffit de poser $y = x_0$ pour retrouver la définition de la continuité à partir de la définition précédente de l'uniforme continuité.

   La réciproque de cette propriété n'est pas toujours vrais que dans certains cas.
3. *Si f est une application k-Lipschitzienne, alors f est uniformément continue.*
   En effet, il suffit de choisir $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ pour retrouver la définition de l'uniforme continuité.

1.3 Dualité

1.3.1 Applications linéaires continues

Dans cette partie, nous intéressons à l'espace des applications (opérateurs) linéaires continues. Nous allons chercher à normée cet espace, puis à le caractériser. Dans toute cette partie, $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ désignent deux espaces vectoriels normés sur un corps $\mathbb{K}$.

Définition 1.3.1. (Linéarité d'une application)
Soient Eet F deux espaces vectoriels. Une application T de E dans F est dite ***linéaire*** *si*

1. $\forall (x, y) \in E^2; \ T(x + y) = T(x) + T(y)$,
2. $\forall x \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Ces deux assertions peuvent être réunies en une seule

$$\forall (x, y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \in E^2; \quad T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Notation 1.3.1.
On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans lui même.

Remarque 1.3.1.
Si $L(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et T est linéaire, alors $T(0_E) = 0_F$ (prendre $\alpha = 0$).

Proposition 1.3.1. *[23]*
Soit T: $E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Alors T est continue si et seulement si

$$\exists M > 0, \quad \forall x \in E, \ \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Notation 1.3.2.
On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans lui même.

Théorème 1.3.1. *[21][25]*
Soit T: $E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Alors les hypothèses suivantes sont équivalentes

1. *T est continue en 0,*
2. *T est uniformément continue sur E,*
3. *T est bornée; il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.*
4. *T est lipschitzienne.*

Le théorème suivant est une caractérisation de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ en dimension finie.

Théorème 1.3.2. *[9][11]*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés, avec E de dimension finie. Alors $L(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$. Autrement dit, toute application linéaire dans E de dimension finie est continue.

Théorème 1.3.3. (Norme d'une application linéaire continue)*[23]*

1. *$\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$.*
2. *L'application définie pour tout $\mathcal{L}(E,F)$ par l'une quelconque des formules suivantes*

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{x\in \bar{B}(0_E,1)} \|T(x)\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in S(0_E,1)} \|T(x)\|_F \\ &= \inf\{c > 0,\ \|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E,\ \forall x \in E\},\end{aligned}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Théorème 1.3.4. *[11]*
Si E est un e.v.n et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.

Définition 1.3.2. (Convergence dans $\mathcal{L}(E,F)$)
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de $\mathcal{L}(E,F)$.

i. On dit que T_n converge fortement vers $T \in \mathcal{L}(E,F)$, si

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

ii. On dit que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ***ponctuellement*** *(simplement) vers T, si pour tout $x \in E$*

$$||T_n(x) - T(x)||_F, \text{ quand } n \to +\infty.$$

1.3.2 Espace dual

Dans cette partie, on étudie un cas particulier important des applications linéaires continues entre les espaces vectoriels normés est celui où l'espace d'arrivée est $F = \mathbb{K}$.

Définition 1.3.3. (Dual d'un espace vectoriel normé)
*On appelle **dual topologique** (ou simplement **dual**) d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$, l'espace de Banach $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des **formes** linéaires continues sur E. On le munit de la norme*

$$\|l\|_{E'} = \sup_{\substack{\|x\|_E \neq 0_E \\ x \in E}} \frac{| < l, x >_{E' \times E} |}{\|x\|_E},$$

où $l \in E'$ et son action sur un élément $x \in E$ est notée à l'aide du crochet de dualité $< \cdot, \cdot >_{E' \times E}$ de sorte que

$$< l, x >_{E' \times E} \overset{déf}{=} l(x).$$

Remarque 1.3.2.
Par la définition de la norme sur E', on a

$$| < l, x >_{E' \times E} | \leq \|l\|_{E'} \|x\|_E, \quad \forall l \in E', \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.3.4. (Bidualité)
Soient E un espace vectoriel normé et E' son dual. On appelle **bidual** *de E l' espace vectoriel dual de E', et on le note E''.*
Soit $x \in E$ fixé. L'application J_x de E' dans $\mathbb{K}$ définie par

$$l \longmapsto J_x(l) = < l, x >_{E' \times E} = l(x),$$

est une forme linéaire continue sur E' donc un élément de E'', on écrit $J_x \in E''$.

Remarque 1.3.3.
Le bidual E'' de E est un espace de Banach.

Définition 1.3.5. (Réflexivité)
*Un espace vectoriel normé E est dit **réflexif**, si J: $E \longrightarrow E''$ est une bijection.*

Proposition 1.3.2. *[9][11]*
Soit E un espace de Banach. L'injection canonique de l'application linéaire continue J : $E \longrightarrow E''$, qui à $x \in E$ associe l'application

$$\begin{array}{rcl} J_x : E' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ l & \mapsto & J_x(l) = l(x) \end{array}$$

et on muni E'' de la norme

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{l \in E' - \{0_{E'}\}} \frac{| < J(x), l >_{E'' \times E'} |}{\|l\|_{E'}}.$$

tel que

$$< J(x), l >_{E''\times E'} = < l, x >_{E'\times E} = l(x), \ \forall x \in E, \ \forall l \in E',$$

est une isométrie (i.e, $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E, \ \forall x \in E$*). Lorsque de plus* J *est surjective, on dit que* E *est un espace de Banach* ***réflexif****.*

Remarque 1.3.4.
S'il existe une isométrie linéaire surjectif J*:* $E \longrightarrow E''$*, on dit que* E ***s'identifie*** *à* E'' *et on note* $E \simeq E''$*.*

Proposition 1.3.3. *[11]*

1. *Tout espace normé réflexif est de Banach, puisque* E *est isomorphe à* E''*.*
2. *Tout e.v.n de dimension finie est réflexif.*
3. *Soit* E *un espace de Banach, alors* E *est réflexif si et seulement si* E' *est réflexif.*
4. *Tout espace réflexif est complet.*

1.3.3 Convergence faible

Définition 1.3.6. (Convergence faible)
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de l'espace vectoriel normé* $(E, \|.\|_E)$*. On dit que* x_n *converge* ***faiblement*** *dans* E*, s'il existe un élément* $x \in E$ *tel que*

$$\forall l \in E', \ < l, x_n > \longrightarrow < l, x >, \quad quand \ n \to +\infty.$$

On écrit alors $x_n \underset{E}{\rightharpoonup} x$*, dans ce cas* x *est appelée* ***limite faible*** *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Remarques 1.3.5.

1. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les notions de la convergence forte et faible coïncident.*
2. *Grâce à la continuité des formes* $l \in E'$*, la convergence en norme (appelée aussi convergence forte) entraîne la convergence faible. i.e, si* $x_n \underset{E}{\longrightarrow} x$*, alors* $x_n \underset{E}{\rightharpoonup} x$ *et* $\|x_n\|_E \longrightarrow \|x\|_E$*.*

Proposition 1.3.4. *[11][23]*
Soit $(E, \|.\|_E)$ *un espace vectoriel normé.*

1. *La limite faible d'une suite (si elle existe) est unique.*
2. *Si* $x_n \underset{E}{\rightharpoonup} x$*, alors* $x_{n_k} \underset{E}{\rightharpoonup} x$*, pour tout sous-suite* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*
3. *Si* $x_n \underset{E}{\rightharpoonup} x$ *et* $y_n \underset{E}{\rightharpoonup} y$*, alors* $x_n + y_n \underset{E}{\rightharpoonup} x + y$*.*
4. *Si* $x_n \underset{E}{\rightharpoonup} x$ *et* $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ *dans* $\mathbb{R}$*, alors* $\lambda_n x_n \underset{E}{\rightharpoonup} \lambda x$*.*
5. *Si* $x_n \underset{E}{\rightharpoonup} x$*, alors* $\{\|x_n\|_E, \ n \in \mathbb{N}\}$ *est borné et* $\|x\|_E \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|x_n\|_E$*.*

Théorème 1.3.5. (Eberlien Smulyan)*[27]*
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'un espace de Banach E. Alors on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Maintenant, on introduit à la notion de la convergence faible* dans un espace dual.

Définition 1.3.7. (Convergence faible*)
*Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé et $(E', \|.\|_{E'})$ son dual. Une suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de E' **converge faiblement*** vers $l \in E'$, si*

$$\forall x \in E, \ < l_n, x > \longrightarrow < l, x > \ \textit{quand } n \to +\infty.$$

*Dans ce cas, l est appelée **limite faible*** de $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit $l_n \underset{E'}{\overset{*}{\rightharpoonup}} l$.*

Proposition 1.3.5. *[11]*
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé.

1. *La limite faible* d'une suite d'élément de E si elle existe elle est unique.*
2. *Si $x_n \underset{E}{\longrightarrow} x$ et $l_n \underset{E'}{\overset{*}{\rightharpoonup}} l$, alors*

$$< l_n, x_n >_{E'\times E} \longrightarrow < l, x >_{E'\times E}.$$

3. *La convergence faible dans E' implique la convergence faible* dans E' i.e., si $h_n \rightharpoonup h$ dans E', alors $h_n \underset{E'}{\overset{*}{\rightharpoonup}} h$ dans E'.*
4. *La convergence forte dans E' implique la convergence faible* dans E'.*
5. *Si E est de dimension finie, les notions de la convergence forte, faible et faible* coïncident sur E'.*

1.4 Formes bilinéaires continues

Dans ce qui suit, E et F sont des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1.4.1. (Forme bilinéaire)
*Une **forme bilinéaire** sur $E \times F$ est une application $a(\cdot,\cdot)\colon E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$, telle que*

1. *Pour tout $x \in E$ fixé, l'application $a(x, .)\colon F \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire, c'est-á-dire*

$$\forall y_1, y_2 \in F, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\colon \ a(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha a(x, y_1) + \beta a(x, y_2).$$

2. *Pour tout $y \in F$ fixé, l'application $a(\cdot, y)\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire, c'est-á-dire*

$$\forall x_1, x_2 \in E, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\colon \ a(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha a(x_1, y) + \beta a(x_2, y).$$

Définition 1.4.2. (Forme bilinéaire symétrique)
*Une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)\colon E\times E\longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **symétrique** si on a*

$$\forall (x,y)\in E^2;\ a(x,y)=a(y,x).$$

Remarquons que la symétrique d'une forme bilinéaire permet de vérifier la linéarité d'un seul côté.

Définition 1.4.3. (Coercivité d'une forme bilinéaire)
*Soit $(E,\|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)\colon E\times E\longrightarrow \mathbb{K}$ est E-**elliptique** (ou **coercive**), s'il existe une constante $c>0$, telle que*

$$a(x,x)\geq c\|x\|_E^2,\ \forall x\in E.$$

Définition 1.4.4. (Forme bilinéaire définie positive)
Soit $a(\cdot,\cdot)\colon E\times E\longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.

1. *On dit que $a(\cdot,\cdot)$ est **positive** (respectivement **négative**) si $a(x,x)\geq 0$ (respectivement $a(x,x)\leq 0$) pour tout $x\in E$.*
2. *On dit que $a(\cdot,\cdot)$ est **définie positive** (respectivement **définie négative**) si elle est positive (respectivement négative) et $a(x,x)=0$ si et seulement si x est nul.*

Définition 1.4.5. (Continuité d'une forme bilinéaire)
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)\colon E\times F\longrightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $E\times F$, s'il existe une constante $M>0$, telle que

$$\forall (x,y)\in E\times F,\ |a(x,y)|\leq M\|x\|_E\|y\|_F.$$

Définition 1.4.6. (Forme bilinéaire et dualité)
Soit $a(\cdot,\cdot)\colon E\times F\longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. Pour tout $x\in E$, l'application

$$\begin{array}{rcl} a(\cdot,x)\colon E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & a(y,x) \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire un élément du dual E'.

Proposition 1.4.1. *[32]*
L'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi_a\colon E & \longrightarrow & E' \\ x & \longmapsto & a(.,x) \end{array}$$

est linéaire. On appelle φ_a l'application linéaire de E dans son dual E' associée à la forme bilinéaire symétrique $a(.,x)$, $x\in E$.

1.5 Espace de Hilbert

Définition 1.5.1. (Produit scalaire)
Soit E un espace véctoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On appelle ***produit scalaire*** *une application*

$$\begin{aligned} < \cdot, \cdot >_E : E \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto < x, y >_E \end{aligned}$$

telle que

1. *Pour $y \in E$ fixé, l'application $x \longmapsto < x, y >_E$ est linéaire; (**linéarité à gauche**).*
2. *$< x, y >_E = < y, x >_E$; (**symétrie**).*
3. *$< x, x >_E > 0$ si $x \neq 0$; (**définie positive**).*

La linéarité à gauche est une convention; on trouve parfois la linéarité à droite. Lorsque la dernière propriété n'est pas satisfaite, on parlera de ***semi-produit scalaire****.*

Remarque 1.5.1.
Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition 1.5.2. (Espace préhilbertien)
Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un ***espace préhilbertien****.*

Remarques 1.5.2.

1. *La donnée d'un produit scalaire permet de définir une norme $\|.\|_E$ par la relation*

$$\|x\|_E^2 = < x, x >_E \Longleftrightarrow \|x\|_E = \sqrt{< x, x >_E}.$$

2. *Si E est un espace de dimension finie muni d'un produit scalaire, on dit que E est un espace euclidien.*

Exemple 1.5.1.
Si on se place dans $\mathbb{R}^n$, on choisit deux éléments $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$< x, y >_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

par conséquent, la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{< x, x >_{\mathbb{R}^n}}.$$

Proposition 1.5.1. *[11]*
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $< \cdot, \cdot >_E$ un produit scalaire sur E.
Pour tout $x, y \in E$, on a les propriétés suivantes

1. $| < x, y >_E | \leq \|x\|_E \|y\|_E$, ***(inégalité de Cauchy-Schwartz)***
2. $< x, y >_E = \frac{1}{2}(\|x+y\|_E^2 - \|x\|_E^2 - \|y\|_E^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|_E^2 - \|x-y\|_E^2)$, ***(identité de polarisation)***
3. $\|x+y\|_E^2 \leq (\|x\|_E + \|y\|_E)^2_;$ ***(inégalité de Minkowski)***
4. $\|x+y\|_E^2 + \|x-y\|_E^2 = 2(\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2)$, ***(identité de la médiane)***

Définition 1.5.3. (Espace de Hilbert)
*On appelle **espace de Hilbert** (ou **espace hilbertien**) tout espace préhilbertien complet pour la norme associée à son produit scalaire.*

Remarque 1.5.3.
Tout espace de Hilbert est un espace de Banach réflexif.

Théorème 1.5.1. (Représentation de Riesz)*[11]*
Soit E un espace de Hilbert. Pour toute forme l linéaire continue sur E (un élément du dual E'), il existe un unique élément $x \in E$, tel que

$$l(y) = < x, y >_E, \ \forall y \in E.$$

De plus, on a $\|l\|_{E'} = \|x\|_E$.

Remarque 1.5.4.
Soit E un espace de Hilbert. Alors

$$E \simeq E' \simeq E''.$$

1.6 Convexité et semi continuité inférieure

Une notion très intéressante dans un espace vectoriel est celle de convexité. Nous rappelons, dans cette section quelques notion élémentaires de convexité et de semi continuité inférieure.

1.6.1 Fonctions convexes à valeurs réelles

Dans cette partie, nous travaillons dans un espace véctoriel normé E.

Définition 1.6.1. (Segment)
*Soit A un sous ensemble de E. Si x et y sont deux éléments de A, on appelle **segment** $[x, y]$, l'ensemble des éléments de E qui s'écrivent de la forme*

$$z = tx + (1-t)y \ ou \ z = y + t(x-y) \ avec \ t \in [0, 1],$$

c'est -à-dire

$$[x, y] = \big\{tx + (1-t)y,\ t \in [0, 1]\big\}.$$

Définition 1.6.2. (Ensemble convexe)
On dit qu'un sous ensemble A de E est ***convexe****, si pour tout $x,\ y \in A$, le segment $[x, y]$ est inclus dans A. Autrement dit,*

$$tx + (1-t)y \in A,\ \forall x, y \in A,\ t \in [0, 1].$$

Exemples 1.6.1.

1. *Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*
2. *Si A et $B \subset E$ deux convexes, alors $A \cap B$ est un convexe de E.*
3. *La somme de Minkowski de deux convexes A et B de E définie par*

$$A + B = \{a + b,\ \ (a, b) \in A \times B\},$$

   est un convexe de E.
4. *Le produit cartésien de deux convexes est convexe.*
5. *L'image d'un sous ensemble convexe par une application linéaire est convexe.*

Supposons maintenant que E est un espace vectoriel normé et A un sous ensemble convexe de E.

Définition 1.6.3. (Fonctions convexes)
Une application $f\colon\ A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite ***convexe****, si pour tous $x,\ y \in A$ et $t \in [0, 1]$, on a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

La fonction f sera dite ***concave*** *lorsque $-f$ est convexe.*
On dit que f est ***strictement convexe*** *si pour tous $x,\ y \in A$, $t \in]0, 1[$ et $x \neq y$, on a*

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

La fonction f sera dite ***strictement concave*** *lorsque $-f$ est strictement convexe.*

Remarque 1.6.1.
Dans le cas où A est un sous ensemble de $\mathbb{R}$, nous avons l'interprétation géométrique suivante: Pour tout $x, y \in A$, le segment qui joint les point $(x, f(x)), (y, f(y))$ se trouve au dessus de la courbe géométrique de f.

Exemples 1.6.2.

1. *$f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*
2. *$f(x) = \|x\|_E$ est convexe sur un espace vectoriel normé E.*

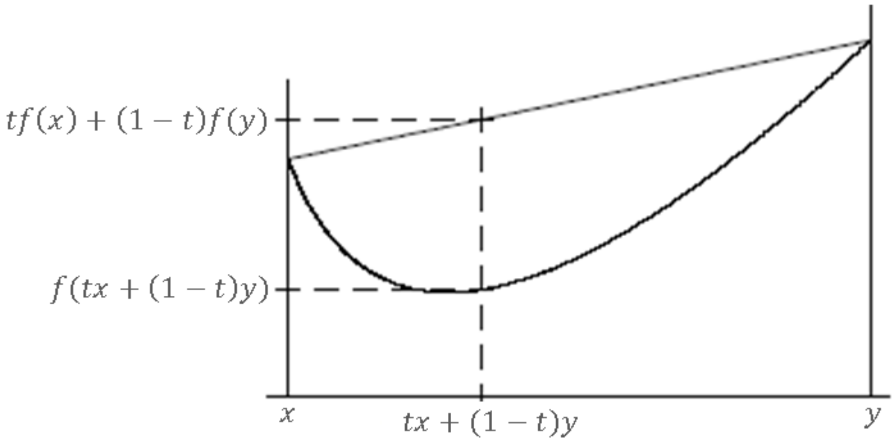

FIGURE 1.1 – Interprétation géométrique d'une fonction convexe.

On a la caractérisation fondamentale suivante.

Proposition 1.6.1.
Une fonction $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si ***son épigraphe*** *est convexe dans $A \times \mathbb{R}$, tel que l'épigraphe de f est noté $epi(f)$ et défini par par l'ensemble*

$$epi(f) = \Big\{(x,r) \in A \times \mathbb{R}, \quad f(x) \leq r\Big\}.$$

Proposition 1.6.2. *[31]*

1. *Si f et $g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions convexes. Alors pour tout $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha f + \beta g$ est convexe.*
2. *Soit $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe sur A. Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in A$ et $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$, tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.6.2 Fonctions convexes à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On note $\overline{\mathbb{R}} = \ \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la droite achevée. En analyse convexe, il est parfois intéressé de pouvoir considérer des fonctions pouvant prendre des valeurs infinies.

Définition 1.6.4. (Domaine effectif)
Soient E un espace vectoriel normé et $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On appelle ***domaine effectif*** *de f qu'on le note $\mathcal{D}(f)$ l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur $+\infty$, i.e,*

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in E, \ f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.6.5. (Fonction propre)
Soit $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est ***propre*** *si $f\colon E \longrightarrow]-\infty,+\infty]$ et $f \not\equiv +\infty$ (i.e $\exists\ x_0 \in E,\ f(x_0) < +\infty$). Autrement dit, la fonction f est propre si elle ne prend pas la valeur $-\infty$ et $\mathcal{D}(f) \neq \varnothing$.*

Définition 1.6.6.
Soit $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Alors f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

Proposition 1.6.3. *[31]*
Soit $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. La fonction f est convexe si pour tous $x, y \in \mathcal{D}(f)$ et $t \in [0,1]$, on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

La fonction f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte pour $x \neq y$ et $t \in]0,1[$.

Remarque 1.6.2.
Le domaine d'une fonction convexe est convexe.

1.6.3 Semi continuité inférieure

Dans cette partie, nous intéresserons à la semi continuité inférieure et la semi continuité faiblement inférieure des fonctions définies sur un espace vectoriel à valeurs dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.6.7. (Semi continuité inférieure)
Une fonction $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est ***semi continue inférieurement*** *(s.c.i) en point $x \in E$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \underset{E}{\longrightarrow} x$, on a*

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

La fonction f est s.c.i sur E si elle est s.c.i au $x \in E$ tout point de E.

Remarque 1.6.3.
Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge faiblement vers $x \in E$ dans la définition précédente, la fonction f est dite ***faiblement s.c.i.***
La fonction f est faiblement s.c.i si elle est faiblement s.c.i en chaque point $x \in E$.

Exemples 1.6.3.
La norme induite d'un produit scalaire $x \longmapsto \|x\|_E = \sqrt{< x, x >_E}$ est faiblement s.c.i.

En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des éléments de E, telle que $x_n \underset{E}{\rightharpoonup} x$. Donc on a

$$\liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|_E \geq \|x\|_E.$$

Remarques 1.6.4.

- *La s.c.i faible implique s.c.i.*
- *Toute fonction continue est s.c.i, mais l'inverse n'est pas vraie car une fonction s.c.i peut être discontinue; il suffit de prendre comme exemple la fonction indicatrice d'un sous ensemble ouvert A de E (e.v.n) qui est définie par*

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A\colon & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A. \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

Proposition 1.6.4. *[27]*
Soient $(E, <\cdot\,,\cdot>_E)$ un espace préhilbertienne et $f\colon E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre, convexe, s.c.i. Alors f est bornée par une fonction affine, i.e., il existe $\alpha \in E$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \geq <\alpha, x>_E + \beta, \qquad \forall x \in E.$$

Chapitre 2

Théorème du point fixe et ses applications aux inéquations quasi-variationnelles

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe de Banach, ce théorème garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe pour toute application contractante d'un espace de Banach dans luis-même à une classe large d'inéquations variationnelles. Spécifiquement on s'intéresse dans la deuxième partie à l'application du théorème de point fixe les inéquations quasi-variationnelles qui ont nombreux applications en mécanique.

2.1 Version du Théorèmes de point fixe

Dans cette partie on va donner la version de la théorie de point fixe concerne des applications définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, puis on généralise son résultat d'existence et d'unicité sur un espace de Banach.

2.1.1 Théorème de point fixe sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 2.1.1. (Stabilité d'intervalle par une application)
Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application, avec* $I \subset \mathbb{R}$. *On dit que l'intervalle* $J \subset I$ *est* ***stable*** *par* f, *si* $f(J) \subset J$.
Autrement dit, si

$$\forall x \in J, \quad f(x) \in J.$$

Définition 2.1.2. (Point fixe)
Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue sur* I.
On dit que a *est un* ***point fixe*** *de* f *si* $f(a) = a$.
En d'autres termes, les points fixes de f *sont les solutions lorsqu'elles existent de l'équation* $f(x) = x$.

Remarque 2.1.1. (Point fixe et représentation graphique)
Les points fixes de f *correspondent aux points d'intersection de la courbe représentative de* f *et de la droite d'équation* $y = x$.

Théorème 2.1.1. (Localisation d'un point fixe)
Soit f *une application continue sur l'intervalle* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, *tel que* $[a, b]$ *est stable par* f. *Alors, l'application* f *possède au moins un point fixe appartenant à l'intervalle* $[a, b]$.

Démonstration.

Considérons une application g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$.
Alors, g est continue sur $[a, b]$, et on a

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - a, \\ \\ g(b) = f(b) - b, \end{cases}$$

par la stabilité de $[a, b]$ par f $\big(\text{i.e., } f([a, b]) \subset [a, b]\big)$, on a aussi

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0, \\ \\ g(b) = f(b) - b \leq 0, \end{cases}$$

donc, on déduit que $g(a)g(b) \leq 0$.
En appliquant le théorème des valeurs intermédiares sur l'application g qui est continue sur $[a, b]$, on déduit qu'il existe au moins une constante $c \in [a, b]$, telle que $g(c) = 0$, alors $f(c) = c$.
Donc on peut affirmer que f possède au moins un point fixe. $\blacksquare$

Remarque 2.1.2.
Remarquons que la stabilité de l'intervalle $I = [a, b]$ *ne garantit pas l'existence d'un point fixe, hormis le cas que nous venons d'étudier d'un intervalle fermé borné; Par exemple, si on prend l'application exponentielle définie sur* $I = \mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *mais on sait bien que l'équation* $e^x = x$ *n'a pas de solution dans* $\mathbb{R}$.

Théorème 2.1.2. (Du point fixe)
Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et I un intervalle stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{2.1}$$

Si la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et l'application f est continue, alors f admet un point fixe.

Démonstration.

La stabilité de l'intervalle I montre que la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à f est bien définie.
Maintenant, supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel ℓ, et f est continue sur I, alors la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.
Par ailleurs, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(\ell).$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Ainsi par l'unicité de la limite d'une suite, on obtient que $f(\ell) = \ell$, donc ℓ est un point fixe de f. ■

Remarque 2.1.3.
Le théorème précédent énonce une condition suffisante, pas nécessaire d'existence d'un point fixe.

Théorème 2.1.3.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, alors f est contractante si et seulement si $\sup\limits_{x\in I} |f'(x)| = k < 1$.

Démonstration.

Si f est contractante alors il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$|f(x+h) - f(x)| \leq k|h|, \quad \forall\, x \in I \text{ et } h > 0,$$

donc,

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \leq k, \quad \forall\, x \in I \text{ et } h > 0,$$

Par passage à la limite quand $h \longrightarrow 0$, on a, $|f'(x)| \leq k$ et $0 < k < 1$, alors $\sup\limits_{x\in I} |f'(x)| < 1$.

Inversement, soit x un réel de l'intervalle I et $h > 0$. D'après le théorème des accroissements finis, on peut écrire

$$f(x) - f(x+h) = f'(c)(x - (x+h)) = f'(c)(-h) \quad \text{avec } c \in]x, x+h[.$$

Par suite

$$|f(x) - f(x+h)| = |f'(c)||h| \leq k|h|,$$

ce qui prouve que f est contractant. ■

Théorème 2.1.4. (Théorème du point fixe sur un intervalle fermé)
Soit f une application définie sur un intervalle fermé I, pas nécessairement borné de $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions suivantes

i) L'intervalle I est stable par f.

ii) f est strictement contractante sur l'intervalle I de rapport $k < 1$.

Alors, l'application f admet un unique point fixe $a \in I$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation (2.1) converge vers a.

Remarques 2.1.4.
Chacune des hypothèses du théorème précédent montre que ces conditions sont réellement nécessaires pour montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe. Pour cela, on a
1. Stabilité de I par f.
Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ une fonction définie sur $I = [0, 1]$, tel que I n'est pas stable par f mais il est un fermé dans $\mathbb{R}$. D'autre part, la fonction f est contractante car $\sup_{x\in I} |f'(x)| < 1$.

En effet, on a

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1, \qquad \forall x \in [0, 1],$$

alors $\sup_{x\in I} |f'(x)| < 1$.

Donc f n'a pas de point fixe ($f(x) \neq x$), car I n'est pas stable par f $\quad (f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}])$.
2.Contractante de f.
Si on prend la même fonction définie précédemment mais avec f: $I \longrightarrow I$ tel que $I = \mathbb{R}_+$ est un fermé de $\mathbb{R}$, et on a la stabilité de I par f $(f(I) = [1, +\infty[\subset I)$ et $\sup_{x\in I} |f'(x)| = 1$ alors f n'est pas contractante. Donc f n'a pas de point fixe.

2.1.2. Théorème du point fixe de Banach

Dans cette sous-section le théorème suivant donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace de Banach.

Théorème 2.1.5.
Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach et $\Lambda\colon E \longrightarrow E$ une application contractante. Alors Λ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = \Lambda(x_n)$ converge vers a.

Démonstration.

On montre d'abord l'existence d'un point fixe, puis son unicité.

1. <u>Existence</u>.
Soit $x_0 \in E$ un point initial quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui associe à tout entier $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrente $x_{n+1} = \Lambda(x_n)$.
Nous allons d'abord démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\|_E = \|\Lambda(x_n) - \Lambda(x_{n-1})\|_E &\leq k\|x_n - x_{n-1}\|_E \\ &\leq k^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\|_E \\ &\;\;\vdots \\ &\leq k^n\|x_1 - x_0\|_E.\end{aligned}$$

On pose $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante

$$\mathcal{P}(n)\colon \quad \|x_{n+1} - x_n\|_E \leq k^n\|x_1 - x_0\|_E.$$

On va montrer la vérité de $\mathcal{P}(n)$ par récurrence.
-Initiation: Pour $n = 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
-Généralisation: Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque mais fixé, on ait la propriété $\mathcal{P}(n)$ et montrons la vérité de $\mathcal{P}(n+1)$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\|_E = \|\Lambda(x_{n+1}) - \Lambda(x_n)\|_E \leq k\|x_{n+1} - x_n\|_E \leq k^{n+1}\|x_1 - x_0\|_E,$$

ce qui achève la récurrence.
Par conséquent, si $m > n$ alors

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\|_E &= \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - \cdots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n\|_E \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1}\|x_{i+1} - x_i\|_E \\ &\leq \left(\sum_{i=n}^{m-1} k^i\right)\|x_1 - x_0\|_E.\end{aligned}$$

De plus, ona

$$\sum_{i=n}^{m-1} k^i = k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1}$$
$$= k^n(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1})$$
$$= k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1 - k}.$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\sum_{i=n}^{m-1} k^i \leq \sum_{i=n}^{+\infty} k^i = \frac{k^n}{1-k}.$$

On peut alors écrire

$$\|x_m - x_n\|_E \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|_E.$$

Comme $0 \leq k < 1$, k^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on conclut aussi que

$$\|x_m - x_n\|_E \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Ceci preuve que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et comme $(E, ||.||_E)$ est complet, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de E noté a (i.e. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$).
Maintenant montrons que a est point fixe de Λ, comme Λ est lipschitzienne, donc elle est continue sur E.

En effet, on déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\|\Lambda(x_n) - \Lambda(a)\|_E \leq k\|x_n - a\|_E < \|x_n - a\|_E,$$

ce qui prouve que $(\Lambda(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Lambda(a)$.

Comme $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers a (i.e., $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = a$), donc $(\Lambda(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers a (puisque $\Lambda(x_n) = x_{n+1}$), alors on peut conclure que $\Lambda(a) = a$. Donc a est un point fixe de Λ.

2. <u>Unicité</u>.

Maintenant, supposons qu'il existe deux points fixes de Λ, a et $b \in E$ tel que $a \neq b$, on a

$$\|\Lambda(b) - \Lambda(a)\|_E = \|b - a\|_E.$$

On autre, on a Λ est contractante donc il existe $0 < k < 1$, tel que

$$\|b - a\|_E = \|\Lambda(b) - \Lambda(a)\|_E \leq k\|b - a\|_E.$$

Donc

$$0 \leq (1 - k)\|b - a\|_E \leq 0.$$

Et comme $k \in]0, 1[$, on conclut que

$$\|b - a\|_E = 0 \Longrightarrow a = b.$$

Ce qui contredit le fait que $a \neq b$. Par conséquent, le point fixe est nécessairement unique. ■

2.2 Résolution d'une inéquation quasi-variationnelle de type elliptique

Dans toute la suite, on suppose que E est un espace de Hilbert réel (i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) muni de son produit scalaire $< \cdot, \cdot >_E$ ainsi que de sa norme associée $||.||_E$ et supposons aussi que $a(\cdot, \cdot)\colon\ E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire.

Définition 2.2.1. (Inéquation variationnelle)
Soient $f \in E$ et $j\colon E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle définie sur E. On appelle ***inéquation variationnelle de première espèce*** *le problème suivant*

$$(P.I.V.1) \begin{cases} \textit{Trouver } u \in E, \ \textit{tel que} \\ \\ a(u, v - u) \ \geq < f, v - u >_E, \qquad \forall v \in E. \end{cases}$$

On appelle ***inéquation variationnelle de deuxième espèce*** *le problème suivant*

$$(P.I.V.2) \begin{cases} \textit{Trouver } u \in E, \ \textit{tel que} \\ \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \ \geq < f, v - u >_E, \qquad \forall v \in E. \end{cases}$$

Définition 2.2.2. (Inéquation quasi-variationnelle)
Soient $f \in E$ et $j\colon E \times E \longrightarrow] - \infty, +\infty]$ une fonctionnelle définie sur $E \times E$. On appelle ***inéquation quasi-variationnelle*** *le problème suivant*

$$(P.I.Q.V) \begin{cases} \textit{Trouver } u \in E, \ \textit{tel que} \\ \\ a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \ \geq < f, v - u >_E, \qquad \forall v \in E. \end{cases}$$

Les idées principales sur la solvabilité de $(P.I.Q.V)$ sont basées sur des arguments du théorème de point fixe, pour cela nous considérons les hypothèses suivantes sur $a(\cdot,\cdot)$ et $j(\cdot,\cdot)$.

$$\begin{cases} a(\cdot,\cdot) : \ E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ une forme } \textbf{bilinéaire symétrique} \text{ et} \\ \text{(a)} \ \ a(\cdot,\cdot) \ \textbf{continue}\text{, i.e.,} \\ \qquad\qquad \exists \ M > 0, \quad |a(u,v)| \leq M||u||_E||v||_E \quad \forall u, v \in E. \\ \text{(b)} \ \ E-\textbf{elliptique} \text{ (ou coercive), i.e.,} \\ \qquad\qquad \exists \ m > 0, \quad a(v,v) \geq m||v||_E^2 \quad \forall v \in E. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} j(\cdot,\cdot) : \ E \times E \longrightarrow]-\infty,+\infty], \text{ telle que} \\ \text{(c)} \ \ \text{Pour tout } \eta \in E, \ j(\eta,.) \text{ est propre, convexe et s.c.i dans } E. \\ \text{(d)} \ \ \text{Il existe } \alpha \geq 0, \text{ tel que pour tous } \eta_1,\eta_2,v_1,v_2 \in E \\ \qquad j(\eta_1,v_2) - j(\eta_1,v_1) + j(\eta_2,v_1) - j(\eta_2,v_2) \leq \alpha||\eta_1-\eta_2||_E||v_1-v_2||_E. \end{cases} \tag{2.3}$$

Supposons dans toute la suite que les hypothèses (2.2), (2.3) sont satisfaites et que $f \in E$.

Nous considérons maintenant le problème auxiliaire suivant.

Problème Auxiliaire P_V^η.
Pour tout $\eta \in E$ fixé. on va essayer de trouver $u_\eta \in E$, tel que

$$a(u_\eta, v-u_\eta) + j(\eta,v) - j(\eta,u_\eta) \geq < f, v-u_\eta >_E, \quad \forall v \in E. \tag{2.4}$$

Le théorème suivant donne une résolution du problème auxiliaire, il s'énonce de la manière suivante.

Théorème 2.2.1.
Supposons que les deux hypothèses (2.2) *et* (2.3) *sont satisfaites, alors pour tout* $f \in E$, *l'inéquation variationnelle* (2.4) *admet une unique solution.*

La démonstration de l'existence et l'unicité de la solution de (2.4) est basée sur les arguments de la minimisation des fonctions convexes.
Nous supposons que (2.2) et (2.3) sont vérifiées. Pour tous $f \in E$ et $\eta \in E$ on définit la fonctionnelle $J_f(\eta,.) : E \longrightarrow]-\infty,+\infty]$, telle que

$$J_f(\eta,v) = \frac{1}{2}a(v,v) + j(\eta,v) - < f,v >_E, \quad \forall v \in E.$$

Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier si la forme bilinéaire est symétrique. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle (2.4) réalise le **minimum d'une énergie** (très naturelle en physique ou en mécanique).

Pour démontrer le Théorème 2.2.1, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.1.
On se place sous les hypothèses du Théorème 2.2.1. Soient f*,* $\eta \in E$ *et* J_f *l'énergie définie pour tout* $v \in E$*, par*

$$J_f(\eta, v) = \frac{1}{2}\, a(v, v) + j(\eta, v) - < f, v >_E . \tag{2.5}$$

Soit $u_\eta \in E$ *une solution unique de l'inéquation variationnelle* (2.4)*. Alors* u_η *est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que*

$$J_f(\eta, u_\eta) = \min_{v \in E} J_f(\eta, v). \tag{2.6}$$

Réciproquement, si $u_\eta \in E$ *est un point minimum de l'énergie* J_f*, alors* u_η *est la solution unique de la formulation variationnelle* (2.4).

Démonstration.

1. Supposons que u_η est une solution unique de la formulation variationnelle (2.4) et la fonctionnelle $j(\eta, .)$ est propre (*i.e.*, $j(\eta, .) < +\infty$, $\forall \eta \in E$). Donc les opérations sur $j(\eta, .)$ sont bien définies.
   Par ailleurs, on a pour tout $v \in E$

$$\begin{aligned} J_f(\eta, v) - J_f(\eta, u_\eta) &= \frac{1}{2}a(v, v) + j(\eta, v) - < f, v >_E - \frac{1}{2}a(u_\eta, u_\eta) - \\ &\quad j(\eta, u_\eta) + < f, u_\eta >_E \\ &= \frac{1}{2}\Big[a(v, v) - a(u_\eta, u_\eta)\Big] + j(\eta, v) - j(\eta, u_\eta) + \\ &\quad < f, u_\eta - v >_E \\ &= \frac{1}{2}\Big[a(v, v) - a(u_\eta, u_\eta) - a(u_\eta - v, u_\eta - v)\Big] + \\ &\quad j(\eta, v) - j(\eta, u_\eta) + < f, v - u_\eta >_E + \\ &\quad \frac{1}{2}a(u_\eta - v, u_\eta - v). \end{aligned}$$

   En utilisant les propriétés de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, on obtient

$$\begin{aligned} J_f(\eta, v) - J_f(\eta, u_\eta) = a(u_\eta, v - u_\eta) - j(\eta, u_\eta) + j(\eta, v) - < f, v - u_\eta >_E \\ + \frac{1}{2}a(u_\eta - v, u_\eta - v). \end{aligned}$$

   Pour chaque $v \in E$, en utilisant (2.2)(b) et (2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} J_f(\eta, v) - J_f(\eta, u_\eta) &\geq \frac{1}{2}a(u_\eta - v, u_\eta - v) \\ &\geq \frac{m}{2}||u_\eta - v||_E^2 \geq 0. \end{aligned}$$

   Ce qui montre que u_η est un unique point de minimum de J_f sur E.

2. Réciproquement, supposons u_η est un point de minimum de J_f sur E, c'est-à-dire, pour tout $\eta \in E$, on a
$$J_f(\eta, v) \geq J_f(\eta, u_\eta), \quad \forall v \in E.$$
Alors, pour tout $v \in E$ et $t \in [0,1]$, nous avons
$$J_f\big(\eta, u_\eta + t(v - u_\eta)\big) = J_f\big(\eta, (1-t)u_\eta + tv\big) \geq J_f(\eta, u_\eta).$$
Et comme
$$J_f(\eta, v) = \frac{1}{2}a(v,v) + j(\eta, v) - < f, v >_E, \quad \forall v \in E$$
alors, on a
$$\frac{1}{2}a\big(u_\eta + t(v-u_\eta), u_\eta + t(v-u_\eta)\big) + j\big(\eta, u_\eta + t(v-u_\eta)\big) - < f, u_\eta + t(v-u_\eta) >_E$$
$$\geq \frac{1}{2}a(u_\eta, u_\eta) + j(\eta, u_\eta) - < f, u_\eta >_E .$$
En utilisant les propriétés de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ et la convexité de $j(\eta, .)$, on obtient pour tout $v \in E$
$$\frac{1}{2}a(u_\eta, u_\eta) + \frac{t^2}{2}a(v-u_\eta, v-u_\eta) + \frac{t}{2}a(u_\eta, v-u_\eta) + \frac{t}{2}a(v-u_\eta, u_\eta) + (1-t)j(\eta, u_\eta)$$
$$+tj(\eta, v) - < f, u_\eta >_E - t < f, v - u_\eta >_E$$
$$\geq \frac{1}{2}\, a(u_\eta, u_\eta) + j(\eta, u_\eta) - < f, u_\eta >_E .$$
En déduit que
$$t\, a(u_\eta, v-u_\eta) + \frac{t^2}{2}a(v-u_\eta, v-u_\eta) + t\big(j(\eta, v) - j(\eta, u_\eta)\big) \geq t < f, v - u_\eta >_E .$$
On divise par t, on obtient
$$a(u_\eta, v-u_\eta) + j(\eta, v) - j(\eta, u_\eta) + \frac{t}{2}\, a(u_\eta - v, u_\eta - v) \geq < f, v - u_\eta >_E .$$
Par passage à la limite quand $t \longrightarrow 0^+$, on a
$$a(u_\eta, v-u_\eta) + j(\eta, v) - j(\eta, u_\eta) \geq < f, v - u_\eta >_E .$$
Pour tout $v \in E$. On conclut que $u_\eta \in E$ est une solution d'inéquation variationnelle (2.4).

Maintenant, montrons l'unicité de la solution du problème de minimisation de J_f qui défini ci-dessus.

Soient u_η et u'_η deux éléments de E qui vérifient (2.6) et que $u_\eta \neq u'_\eta$. Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}J_f(\eta,u_\eta)+\frac{1}{2}J_f(\eta,u'_\eta)-J_f\Big(\eta,\frac{u_\eta+u'_\eta}{2}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}a(u_\eta,u_\eta)+j(\eta,u_\eta)-<f,u_\eta>_E+\frac{1}{2}a(u'_\eta,u'_\eta)+j(\eta,u'_\eta)\\
&\quad -<f,u'_\eta>_E\Big]-\Big[\frac{1}{2}a(\frac{u_\eta+u'_\eta}{2},\frac{u_\eta+u'_\eta}{2})+j(\eta,\frac{u_\eta+u'_\eta}{2})\\
&\quad -<f,\frac{u_\eta+u'_\eta}{2}>_E\Big]\\
&= \frac{1}{8}a(u_\eta,u_\eta)+\frac{1}{8}a(u'_\eta,u'_\eta)-\frac{2}{8}a(u_\eta,u'_\eta)+\frac{1}{2}j(\eta,u_\eta)+\frac{1}{2}j(\eta,u'_\eta)\\
&\quad -j(\eta,\frac{u_\eta+u'_\eta}{2})\\
&= \frac{1}{8}a(u_\eta-u'_\eta,u_\eta-u'_\eta)+\frac{1}{2}j(\eta,u_\eta)+\frac{1}{2}j(\eta,u'_\eta)-j(\eta,\frac{u_\eta+u'_\eta}{2}).
\end{aligned}$$

Si $u_\eta \neq u'_\eta$, alors d'après la coercitive de la forme bilinéaire $a(.,.)$ et la convexité de $j(\eta,.)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}J_f(\eta,u_\eta)+\frac{1}{2}J_f(\eta,u'_\eta)-J_f\Big(\eta,\frac{u_\eta+u'_\eta}{2}\Big) \geq \frac{m}{8}\|u_\eta-u'_\eta\|_E^2+\frac{1}{2}j(\eta,u_\eta)+\frac{1}{2}j(\eta,u'_\eta)\\
-\frac{1}{2}j(\eta,u_\eta)-\frac{1}{2}j(\eta,u'_\eta).
\end{aligned}$$

On obtient

$$\frac{1}{2}J_f(\eta,u_\eta)+\frac{1}{2}J_f(\eta,u'_\eta)-J_f\Big(\eta,\frac{u_\eta+u'_\eta}{2}\Big) \quad \geq \quad \frac{m}{8}\|u_\eta-u'_\eta\|_E^2.$$

D'où

$$\frac{1}{2}J_f(\eta,u_\eta)+\frac{1}{2}J_f(\eta,u'_\eta) > J_f\Big(\eta,\frac{u_\eta+u'_\eta}{2}\Big).$$

D'autre part, le problème de minimisation de J_f nous donne

$$J_f(\eta,u_\eta)=\min_{v\in E} J_f(\eta,v)$$

et

$$J_f(\eta,u'_\eta)=\min_{v\in E} J_f(\eta,v)$$

alors

$$J_f(\eta,u_\eta)=J_f(\eta,u'_\eta)=\min_{v\in E} J_f(\eta,v)$$

par conséquent, on trouve que

$$\min_{v\in E} J_f(\eta, v) > J_f\Big(\eta, \frac{u_\eta + u'_\eta}{2}\Big)$$

qui est contradiction.

D'où $u_\eta = u'_\eta$ ce qui démontre l'unicité de la solution du problème de minimisation de J_f d'un côté de l'autre on montre l'unicité de la solution de (2.4). ■

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.2.1.

Démonstration du Théorème 2.2.1.

Pour montrer l'existence et unicité de la solution u_η de (2.4), il suffit de démonter l'existence et l'unicité d'un point de minimum de la fonctionnelle J_f.

1-Existence.

Supposons qu'il existe $\ell_f = \min\limits_{v\in E} J_f(\eta, v)$ et $j: \ E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle propre, alors on déduit que pour η fixé dans E, $J_f(\eta, .): \ E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est propre et par conséquent $\ell_f < \ +\infty$.

Montrons que $J_f(\eta, .)$ est convexe et s.c.i pour tout $\eta \in E$ fixé.

i) Convexité.

Pour tous $v \in E$ et $f \in E$, on a

$$J_f(\eta, v) = \frac{1}{2}a(v, v) + j(\eta, v) - < f, v >_E .$$

Soient $v,\ v' \in \mathcal{D}(J_f)$ et $t \in [0, 1]$, montrons que

$$J_f\big(\eta, tv + (1-t)v'\big) \leq \ tJ_f(\eta, v) + (1-t)J_f(\eta, v').$$

ou

$$J_f\big(\eta, tv + (1-t)v'\big) - tJ_f(\eta, v) - (1-t)J_f(\eta, v') \leq \ 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
J_f\big(\eta, tv + (1-t)v'\big) - tJ_f(\eta, v) - (1-t)J_f(\eta, v') = \\
&\frac{1}{2}a\big(tv + (1-t)v', tv + (1-t)v'\big) + j\big(\eta, tv + (1-t)v'\big) - \\
&< f, tv + (1-t)v' >_E - t\Big[\frac{1}{2}a(v, v) + j(\eta, v) - < f, v >_E \Big] \\
&-(1-t)\Big[\frac{1}{2}a(v', v') + j(\eta, v') - < f, v' >_E \Big].
\end{aligned}$$

Par la convexité de la fonctionnelle $j(\eta,.)$, pour tout $\eta \in E$ et les propriétés de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$, on a

$$\begin{aligned} J_f\big(\eta, tv+(1-t)v'\big) - tJ_f(\eta,v) - (1-t)J_f(\eta,v') &\leq \frac{1}{2}\Big[a(tv,tv) + a\big(tv,(1-t)v'\big) \\ &+a\big((1-t)v',tv\big) + a\big((1-t)v',(1-t)v'\big)\Big] + tj(\eta,v) \\ &+(1-t)j(\eta,v') - t < f,v >_E -(1-t) < f,v' >_E \\ &-t\Big[\frac{1}{2}a(v,v) + j(\eta,v) - < f,v >_E\Big] \\ &-(1-t)\Big[\frac{1}{2}a(v',v') + j(\eta,v') - < f,v' >_E\Big]. \end{aligned}$$

Par simplification de calcul, on trouve

$$\begin{aligned} J_f\big(\eta, tv+(1-t)\big) - tJ_f(\eta,v) - (1-t)J_f(\eta,v') &\leq \frac{t^2}{2}a(v,v) + t(1-t)a(v,v') \\ &+\frac{(1-t)^2}{2}a(v',v') + tj(\eta,v) + (1-t)j(\eta,v') - t < f,v >_E \\ &-(1-t) < f,v' >_E - \frac{t}{2}a(v,v) - tj(\eta,v) + t < f,v >_E \\ &-\frac{(1-t)}{2}a(v',v') - (1-t)j(\eta,v') + (1-t) < f,v' >_E \\ &\leq \frac{t(t-1)}{2}a(v,v) + t(1-t)a(v,v') + \frac{t(t-1)}{2}a(v',v'). \end{aligned}$$

D'après la continuité de $a(.,.)$, on a

$$\begin{aligned} J_f\big(\eta, tv+(1-t)v'\big) &- tJ_f(\eta,v) - (1-t)J_f(\eta,v') \\ &\leq \frac{t(t-1)}{2}\Big[a(v,v) - 2a(v,v') + a(v',v')\Big] \\ &\leq \frac{t(t-1)}{2}\Big[m||v||_E^2 - 2M||v||_E||v'||_E + m'||v'||_E^2\Big] \\ &\leq \frac{t(t-1)}{2}\Big((m + \frac{M^2}{m})||v||_E^2 + (m'+m)||v'||_E^2\Big) \leq 0. \end{aligned}$$

Donc on résulte la convexité de J_f.

ii) Semi continuité inférieure.

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers v dans E, $f \in E$. D'après les propriétés de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$, nous avons que $v_n \longmapsto a(v_n,v_n)$ est convexe et s.c.i. Alors

$$\liminf_{n\to+\infty} a(v_n,v_n) \geq a(v,v)$$

et comme $j(\eta,.)$ convexe et s.c.i, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} j(\eta,v_n) \geq j(\eta,v)$$

donc, on a

$$\liminf_{n\to+\infty}\left\{a(v_n,v_n)+j(\eta,v_n)-<f,v_n>_E\right\} \geq a(v,v)+j(\eta,v) \\ -<f,v>_E\,.$$

On résulte que

$$\liminf_{n\to+\infty} J_f(\eta,v_n) \geq J_f(\eta,v)$$

d'où J_f est s.c.i faiblement sur E donc s.c.i fortement dans E.
Puisque $J_f(\eta,.)$ est propre convexe et s.c.i, donc elle admet un minimum $\ell_f = \min\limits_{v\in E} J_f(v) < +\infty$ atteint à la solution u_η.

En effet, considérons $(u_{\eta_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ une suite d'éléments de E, telle que

$$J_f(\eta,u_{\eta_n}) \longrightarrow \ell_f \text{ quand } n\to+\infty.$$

On a $j(\eta,.):\ E \longrightarrow]-\infty,+\infty]$ est propre, convexe et s.c.i, alors $j(\eta,.)$ est bornée par une fonction affine, i.e., il existe $\alpha\in E$ et $\beta\in\mathbb{R}$ tel que

$$j(\eta,u_{\eta_n}) \geq <\alpha,u_{\eta_n}>_E+\beta, \text{ pour tout } \ n\in\mathbb{N}$$

d'après (2.2)(b), on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} J_f(\eta,u_{\eta_n}) &= \frac{1}{2}a(u_{\eta_n},u_{\eta_n})+j(\eta,u_{\eta_n})-<f,u_{\eta_n}>_E \\ &\geq \frac{m}{2}||u_{\eta_n}||_E^2+<\alpha,u_{\eta_n}>_E-||f||_E||u_{\eta_n}||_E+\beta \end{aligned}$$

donc

$$J_f(\eta,u_{\eta_n}) \geq \frac{m}{2}||u_{\eta_n}||_E^2-||\alpha||_E||u_{\eta_n}||_E-||f||_E||u_{\eta_n}||_E+\beta,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Cela montre que $(u_{\eta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans E.

En effet,
supposons que $(u_{\eta_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ n'est pas bornée, alors il existe une sous-suite $(u_{\eta_{nk}})_{nk\in\mathbb{N}} \subset (u_{\eta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $||u_{\eta_{nk}}||_E \longrightarrow +\infty$ quand $k\to+\infty$, et d'après la formule précédent, on a

$$J_f(\eta,u_{\eta_{nk}}) \longrightarrow +\infty \text{ quand } k\to\infty$$

et comme $J_f(\eta,u_{\eta_n}) \longrightarrow \ell_f$ quand $n\to+\infty$, on peut voir que $\ell_f=+\infty$ ce qui est une contradiction avec $\ell_f<+\infty$.

D'autre part, d'après le Théorème 1.3.5 d'Eberlein Smulyan, il existe un élément $u_\eta \in E$ et une sous-suite $(u_{\eta_{n_p}})_{np\in\mathbb{N}} \subset (u_{\eta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$(u_{\eta_{n_p}}) \rightharpoonup (u_\eta) \text{ dans } E \text{ quand } p \to +\infty.$$

On a donc

$$\lim_{p\to+\infty} \inf J_f(\eta, u_{\eta_{n_p}}) \geq J_f(\eta, u_\eta)$$

et comme $J_f(\eta, u_{\eta_n}) \longrightarrow \ell_f$ quand $n \to +\infty$, on obtient que $\ell_f \geq J_f(\eta, u_\eta)$.
Pour l'inégalité inverse, on a par définition de $\ell_f = \inf\limits_{u_\eta \in E} J_f(\eta, u_\eta)$ la deuxième inégalité $\ell_f \leq J_f(\eta, u_\eta)$. Donc on conclut que $J_f(\eta, u_\eta) = \ell_f$. Ce qui montre que l'élément $u_\eta \in E$ est un minimum de J_f dans E.

2-Unicité.
Le résultat d'unicité de la solution du problème variationnelle est une conséquence de la résolution du problème de minimisation de J_f.
Ce qui termine la démonstration. ■

Résolution du problème $P.I.Q.V$.

Dans cette sous-section, nous considérons les inégalités quasi-variationnelles de type elliptique, c'est-à-dire que la fonctionnelle $j(\cdot,\cdot)$ doit dépendre explicitement de la solution. Ainsi, pour un $f \in E$ donné, on considère le problème suivant:

Problème $P.I.Q.V$.
Trouver un élément $u \in E$, tel que

$$a(u, v-u) + j(u,v) - j(u,u) \;\geq\; < f, v-u >_E, \;\; \forall v \in E. \tag{2.7}$$

Grâce au Théorème 2.2.1, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2.2. ***(d'existence et d'unicité du problème $P.I.Q.V$)***
Supposons que les deux hypothèses (2.2) et (2.3) sont satisfaites et $m > \alpha$. Alors pour tout $f \in E$, l'inéquation quasi-variationnelle (2.7) admet une unique solution. De plus, cette solution dépend continûment de f.

Avant de détailler la démonstration de ce théorème, nous donnons les principaux résultats de cette étude, à savoir un problème d'existence et d'unicité de la solution du problème $P.I.Q.V$. Pour cela on définit l'application $\Lambda : E \longrightarrow E$ par

$$\Lambda\eta = u_\eta, \quad \forall \eta \in E. \tag{2.8}$$

Et nous continuons avec le résultat de point fixe suivant.

Lemme 2.2.2.
Si $m > \alpha$, alors Λ admet un unique point fixe $\eta^* \in E$.

Démonstration.

Soit $\eta_1, \eta_2 \in E$. On désigne par u_1 et u_2 deux solutions de (2.4) pour $\eta = \eta_i, (i = 1, 2)$, c'est-à-dire que $u_1 = u_{\eta_1}$ et $u_2 = u_{\eta_2}$. Alors

$$a(u_1, v - u_1) + j(\eta_1, v) - j(\eta_1, u_1) \geq < f, v - u_1 >_E, \quad \forall v \in E.$$

$$a(u_2, v - u_2) + j(\eta_2, v) - j(\eta_2, u_2) \geq < f, v - u_2 >_E, \quad \forall v \in E.$$

En prenant $v = u_2$ dans la première inégalité et $v = u_1$ dans la deuxième, on obtient

$$a(u_1, u_2 - u_1) + j(\eta_1, u_2) - j(\eta_1, u_1) \geq < f, u_2 - u_1 >_E .$$

$$a(u_2, u_1 - u_2) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2) \geq < f, u_1 - u_2 >_E .$$

La forme $a(\cdot, \cdot)$, est bilinéaire, donc

$$-a(u_1, u_1 - u_2) + j(\eta_1, u_2) - j(\eta_1, u_1) \geq \; - < f, u_1 - u_2 >_E .$$

$$-a(-u_2, u_1 - u_2) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2) \geq < f, u_1 - u_2 >_E .$$

On additionne membre à membre les deux inégalités, on obtient

$$-a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + j(\eta_1, u_2) - j(\eta_1, u_1) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2) \geq 0.$$

Donc

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq j(\eta_1, u_2) - j(\eta_1, u_1) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2). \tag{2.9}$$

D'après (2.2)(b), on a

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq m\|u_1 - u_2\|_E^2. \tag{2.10}$$

D'après (2.3)(d), on a

$$j(\eta_1, u_2) - j(\eta_1, u_1) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2) \leq \alpha\|\eta_1 - \eta_2\|_E\|u_1 - u_2\|_E. \tag{2.11}$$

D'après (2.9),(2.10) l'inégalité (2.11) devient

$$m\|u_1 - u_2\|_E^2 \leq \alpha\|\eta_1 - \eta_2\|_E\|u_1 - u_2\|_E.$$

Nous utilisons l'inégalité $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. On obtient

$$\|\Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2\|_E = \|u_1 - u_2\|_E \leq \frac{\alpha}{m}\|\eta_1 - \eta_2\|_E. \tag{2.12}$$

Lorsque $m > \alpha$, alors l'application Λ donné par la formule (2.8) est une contraction dans E. Donc le lemme 2.2.2 découle directement du théorème de point fixe. ■

Maintenant, nous avons tout ce qu'il faut pour montrer le théorème 2.2.2 d'existence et d'unicité d'inéquation quasi-variationnelle.

Démonstration du Théorème 2.2.2.

La démonstration de ce théorème s'effectuera en trois étapes, et elle est basée sur les résultats du théorème 2.2.1, le lemme 2.2.2 et les arguments du théorème de point fixe.

Supposons que les conditions (2.2) et (2.3) sont satisfaites, $f \in E$ et $m > \alpha$.

Première étape: Existence.

Soit η^* le point fixe de l'application Λ obtenu dans le lemme 2.2.2, alors $\eta^* = \Lambda\eta^*$ et par la définition (2.8), on a $\Lambda\eta^* = u_{\eta^*}$. Donc

$$\eta^* = \Lambda\eta^* = u_{\eta^*}$$

et comme l'équation (2.4) est vérifiée pour tout $\eta \in E$, alors elle est vérifie pour $\eta = \eta^*$. Si on remplace η par η^* dans (2.4), on trouve

$$a(u_{\eta^*}, v - u_{\eta^*}) + j(\eta^*, v) - j(\eta^*, u_{\eta^*}) \geq < f, v - u_{\eta^*} >_E, \quad \forall v \in E.$$

Puisque $\eta^* = u_{\eta^*}$, alors

$$a(u_{\eta^*}, v - u_{\eta^*}) + j(u_{\eta^*}, v) - j(u_{\eta^*}, u_{\eta^*}) \geq < f, v - u_{\eta^*} >_E, \quad \forall v \in E.$$

On obtient que u_{η^*} est une solution d'inéquation quasi-variationnelle (2.7), ce qui conclut la partie d'existence.

Deuxième étape: Unicité.

Supposons maintenant que u est une solution de (2.7), c'est-à-dire

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq < f, v - u >_E, \quad \forall v \in E$$

pour tout $\eta \in E$. Si on pose $\eta = u$, alors

$$a(u, v - u) + j(\eta, v) - j(\eta, u) \geq < f, v - u >_E, \quad \forall v \in E.$$

On déduit que u est une solution de problème variationnelle.
D'autre part, d'après le théorème 2.2.1 on a que l'inégalité (2.4) admet une solution unique que l'on note u_η. Alors on a $u_\eta = u$, plus précisément

$$u_\eta = u = \eta.$$

Donc on déduit que u_η est une autre solution de problème (P.I.Q.V).
De plus, par la définition de l'application Λ, on a $\Lambda\eta = u_\eta$, pour tout $\eta \in E$.
On déduit que

$$\eta = \Lambda\eta$$

donc η est un point fixe de Λ.
Depuis le lemme 2.2.2, l'application Λ admet un unique point fixe, noté par $\eta^* \in E$, tel que on trouve que

$$\eta^* = \Lambda\eta^* = u_{\eta^*}.$$

Par conséquent

$$\eta = \eta^*.$$

Ce qui conclut que $u = u_{\eta^*}$. Donc on termine la partie d'unicité.

Troisième étape.

Pour montrer que l'application de E dans E qui à tout élément u de E associe l'élément f de E (i.e, $f \longmapsto u$) est Lipschitzienne, supposons que u_1 et u_2 deux solutions de $(P.I.Q.V.2)$ pour $f = f_1$ et $f = f_2$ respectivement. Alors

$$a(u_1, v - u_1) + j(u_1, v) - j(u_1, u_1) \geq < f_1, v - u_1 >_E, \quad \forall v \in E.$$

$$a(u_2, v - u_2) + j(u_2, v) - j(u_2, u_2) \geq < f_2, v - u_2 >_E, \quad \forall v \in E.$$

Prenons $v = u_2$ dans la première inégalité et $v = u_1$ dans la deuxième, on obtient

$$-a(u_1, u_1 - u_2) + j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) \geq \; - < f_1, u_1 - u_2 >_E .$$

$$-a(-u_2, u_1 - u_2) + j(u_2, u_1) - j(u_2, u_2) \geq < f_2, u_1 - u_2 >_E .$$

Par l'addition des deux inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} -a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) - j(u_2, u_2) & \\ \geq \; - < f_1, u_1 - u_2 >_E + < f_2, u_1 - u_2 >_E & \\ = \; - < f_1 - f_2, u_1 - u_2 >_E . & \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq & \Big| j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) - j(u_2, u_2) \Big| \\ & + \Big| < f_1 - f_2, u_1 - u_2 >_E \Big|. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (2.2)(b), on a

$$m\|u_1 - u_2\|_E^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2).$$

D'après (2.3)(d), on a aussi

$$j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) - j(u_2, u_2) \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_E^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\Big| < f_1 - f_2, u_1 - u_2 >_E \Big| \leq \|f_1 - f_2\|_E \|u_1 - u_2\|_E.$$

Par ailleurs, les résultats précédents nous donne aussi

$$m\|u_1 - u_2\|_E^2 \quad \leq \quad \alpha\|u_1 - u_2\|_E^2 + \|f_1 - f_2\|_E \|u_1 - u_2\|_E.$$

Nous utilisons l'inégalité $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. On obtient

$$\begin{aligned}(m-\alpha)\|u_1 - u_2\|_E^2 &\leq \|f_1 - f_2\|_E \|u_1 - u_2\|_E \\ &\leq \frac{(m-\alpha)}{2}\|u_1 - u_2\|_E^2 + \frac{1}{2(m-\alpha)}\|f_1 - f_2\|_E^2\end{aligned}$$

alors

$$\frac{(m-\alpha)}{2}\|u_1 - u_2\|_E^2 \leq \frac{1}{2(m-\alpha)}\|f_1 - f_2\|_E^2.$$

Quand $m > \alpha$, on trouve

$$\|u_1 - u_2\|_E^2 \leq \frac{1}{(m-\alpha)^2}\|f_1 - f_2\|_E^2.$$

D'où

$$\|u_1 - u_2\|_E \leq \frac{1}{m-\alpha}\|f_1 - f_2\|_E.$$

Ce qui conclut que la solution de $(P.I.Q.V)$ dépend continûment de f.
Ce qui détermine la démonstration. ∎

Chapitre 3

Problèmes de contact avec frottement

L'objet de ce chapitre est d'étudier un type des problèmes aux limites de contact avec frottement entre un corps déformable et une fondation. Nous supposons le long de ce chapitre que le processus est statique pour des matériaux élastiques. Nous construisons une formulation variationnelle de ce problème et nous décrivons les hypothèses et les équations qui modélisent les problèmes anti-plans ainsi que les conditions aux limites avec frottement. Finalement, les résultats que nous obtenons concernant l'existence et l'unicité de la solution faible de ce problème, la preuve est basée sur des arguments d'inéquations quasi-variationnelles.

3.1 Petits rappels

Dans cette partie de ce chapitre, nous regroupons les propriétés principales des espaces fonctionnels que nous utiliserons et quelques résultats concernant les distributions pour définir les espaces de Sobolev, ce n'est pas obligatoire mais les possibilités de dériver n'importe qu'elle distribution et de détecter les distributions qui sont des fonctions vont permettre une définition rapide.

3.1.1 Rappels sur les espaces L^p

Dans tout la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue et une fonction f sera considérée de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour $1 < p < \infty$, on note l'exposant conjugué de p par q tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ et pour $p = 1$, nous posons $q = \infty$.

3.1.1.1 Définitions et propiétés élémentaires

Le cas $1 \leq p < +\infty$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables définies sur Ω à valeurs réelles dont la puissance p-ième de la valeur absolue est intégrable pour la mesure de Lebesgue. En réalité, les éléments de cet espace sont des classes de fonctions qui coïncident sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Muni de sa norme naturelle

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \tag{3.1}$$

pour tout $f \in L^p(\Omega)$. Cet espace est un espace de Banach (c'est-à-dire, un espace vectoriel normé complet). De plus il est réflexif pour $1 < p < +\infty$, et son dual $(L^p)' = L^q$. Pour $p = 1$, $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif et son dual $(L^1)' = L^\infty$.

Le cas particulier $p = 2$.

Le cas $p = 2$ est particulier parce que dans ce cas, la norme $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ découle d'un produit scalaire suivant:
Si f et g sont dans $L^2(\Omega)$, on a

$$< f, g >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

L'application $<\cdot\,,\cdot>_{L^2(\Omega)}$ est un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. Dans ce cas, la norme $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ vérifie

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{< f, f >_{L^2(\Omega)}}.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ muni de cette norme est un espace de Hilbert, et cet espace est identifie a son dual (ce qui n'est pas vrai dans d'autre cas, pour $p \neq 2$).
Dans ce chapitre nous aurons besoin d'espace

$$L^2(\Omega)^n = \big\{f = (f_i), \quad f_i \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, n\big\},$$

ce qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire canonique

$$< f, g >_{L^2(\Omega)^n} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i(x)\, g_i(x)\ \mathrm{d}x \tag{3.2}$$

et la norme associée à ce produit scalaire

$$\|f\|_{L^2(\Omega)^n} = \Big(\sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i^2(x)\ \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Le cas $\mathbf{p} = +\infty$.

On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω, ces éléments de cet espace sont des classes de fonctions qui sont bornées sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. On note

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \;=\; \inf\{\, c > 0, \quad |f(x)| \leq c \;\text{ p.p sur } \Omega\}$$

une norme associée à l'espace $L^\infty(\Omega)$. Cet espace est de Banach, n'est pas refléxif et son dual est strictement plus gros que $L^1(\Omega)$, c'est-à-dire que $L^1(\Omega) \subsetneq (L^\infty(\Omega))'$.

3.1.2 Introduction aux espaces de Sobolev

3.1.2.1 Rappels sur les distributions

Dans cette partie Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$ et $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

3.1.2.1.1 Notations

Pour un point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on va noter l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ par D_i.
On rappelle que la longueur d'un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ est donnée par $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, et que l'opérateur différentiel D^α d'ordre α défini par

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

3.1.2.1.2 Espaces fonctionnels

On désigne par $C^0(\Omega)$ ou $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à valeurs réelles.
Pour tout entier positif $m \in \mathbb{N}$, on peut désigner les espaces $C^m(\Omega)$, (resp. $C^m(\overline{\Omega})$) les espaces des fonctions m fois continûment différentiables sur Ω, (resp. sur $\overline{\Omega}$), on note

$$C^m(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega), \quad D^\alpha\varphi \in C(\Omega) \;\text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

Support d'une fonction continue.

Le support d'une fonction $\varphi \in C(\Omega)$ est le sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ noté *supp* φ et défini par

$$\textit{supp}\ \varphi = \overline{\{x \in \Omega, \quad \varphi(x) \neq 0\}}.$$

On dit qu'une fonction φ est à support compact sur Ω, s'il existe un compact K dans Ω, tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus K$.

On va noter $C_c^m(\Omega)$ $\big($resp. $C_c^m(\overline{\Omega})\big)$ le sous-espace de $C^m(\Omega)$ $\big($resp. $C^m(\overline{\Omega})\big)$ formé par des fonctions de classe $C^m(\Omega)$ $\big($resp. $C^m(\overline{\Omega})\big)$ à support compact sur Ω $\big($resp. sur $\overline{\Omega}$ $\big)$.
Pour m un entier fini et Ω un ouvert borné, l'espace $C^m(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|.\|_{C^m(\overline{\Omega})}$ est un espace de Banach, telle que

$$\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \big|D^\alpha \varphi(x)\big|.$$

Espace des fonctions test (d'essai).

Maintenant, on notera

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega).$$

L'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω. Pour mieux comprendre quel est le sens de l'opérateur $D^\alpha\varphi$ pour des fonctions φ qui ne sont pas dérivables, nous rappelons brièvement la définition des distributions sur Ω.
On va désigner par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions test, noté aussi $C_c^\infty(\Omega)$ qui est l'ensemble des fonctions φ de classe C^∞ à support compact sur Ω.

Notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

On dit qu'une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers φ lorsque:

i) Les supports de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont contenus dans un même ensemble borné indépendent de n.

ii) Les dérivées de chaque ordre de (φ_n) convergent uniformément vers les dérivées correspondantes de φ, c'est-à-dire $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformément sur Ω, pour tout α multi-entier positif.

Les distributions forment un espace vectoriel noté $\mathcal{D}'(\Omega)$ (le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$). Donc une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$. C'est-à-dire, une application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ faisant correspondre à une fonction test φ un nombre réel $< T, \varphi >$ ou $T(\varphi)$.
Où $<\cdot\,,\cdot>$ désigne le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$.

• **Linéarité de la forme:**

Pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$< T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 >= \alpha < T, \varphi_1 > +\beta < T, \varphi_2 >.$$

• **Continuité de la forme linéaire:**

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$< T, \varphi_n > \longrightarrow < T, \varphi >, \text{ dans } \mathbb{R}.$$

On distingue deux classes de distributions :
les distributions **régulières** et les autres, dites **singulières**.
Les distributions régulières sont associées à des fonctions localement intégrables (i.e., $f \in L^1_{loc}(\Omega)$; si pour tout sous-ensemble compact K de Ω, la restriction $f|_K$ de f à K est un élément de $L^1(K)$), telles que

$$< T_f, \varphi > = < f, \varphi > = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

où T_f est la distribution associée à f.
On utilise souvent la même notation f pour désigner une fonction ou une distribution (T_f), donc le sens étant précisé dans le contexte.

Une propriété générale donne qu'on peut approcher toute distribution de $\mathcal{D}'$ par une suite de distributions régulières associées à des fonctions test de $\mathcal{D}$, on dit que l'espace $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}'$.

Notion de dérivée faible.

La notion de dérivée faible est une extension de la notion de dérivée usuelle pour des fonctions qui ne sont pas forcément dérivables.
Pour f localement intégrable sur Ω, On dit que $f$est dérivable au sens faible, s'il existe des fonctions w_i localement intégrables sur Ω, pour $i \in \{1, ..., n\}$ telles que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega w_i(x)\varphi(x)dx.$$

De même, pour tout α multi-indice, par intégration par parties $|\alpha|$-fois on a

$$\int_\Omega (D^\alpha f(x))\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (D^\alpha \varphi(x))f(x)dx.$$

Ces résultats motivent ainsi la définition de la dérivée $D^\alpha T_f$ d'une distribution $T_f \in \mathcal{D}'$. On pose alors

$$D^\alpha T_f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T_f(D^\alpha \varphi).$$

Si f admet une dérivée partielle (classique) par rapport à la i-ème variable, alors elle est également dérivable au sens faible par rapport à cette i-ème variable, et la dérivée au sens faible (qui est toujours unique) coïncide avec la dérivée au sens fort. En revanche, il existe des fonctions dérivables au sens faible qui ne sont pas dérivables au sens fort.

3.1.2.2 Définitions et quelques propriétés des espaces de Sobolev

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et k un entier positive.

3.1.2.2.1 Espaces $W^{k,p}(\Omega)$

On note $W^{k,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions $f \in L^p(\Omega)$ telles que les dérivées $D^\alpha f$ au sens des distributions (avec α un multi-indice vérifiant $|\alpha| \leq k$) soient des fonctions de $L^p(\Omega)$, i.e.,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega),\ D^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \text{pour}\ \ |\alpha| \leq k\}.$$

On munit $W^{k,p}(\Omega)$ de la norme

$$||f||_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si}\ \ p < +\infty \\ \\ \sup\limits_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si}\ \ p = +\infty. \end{cases}$$

L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ muni de cette norme est un espace de Banach et $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.
On peut montrer que la norme

$$||f||_{k,p} = \begin{cases} \sum\limits_{0\leq|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_{L^p(\Omega)}, & \text{si}\ \ 1 \leq p < \infty \\ \\ \sum\limits_{0\leq|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si}\ \ p = +\infty \end{cases}$$

est une norme équivalente à la précédente (plus de détails voir [3]) . L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ a les mêmes propriétés quelle que soit la norme utilisée (soit $||\cdot||_{k,p}$ où $||\cdot||_{W^{k,p}}$).

3.1.2.2.2 Espaces $H^{k,p}(\Omega)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace de Sobolev $H^{k,p}(\Omega)$ comme étant le complété de l'espace $C^{\infty,k,p}(\Omega)$ définie par :

$$C^{\infty,k,p}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega),\ D^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \ \text{pour}|\alpha| \leq k\},$$

pour la norme

$$||f||_{k,p} = \sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_{L^p(\Omega)}.$$

Grâce au théorème de Meyers-Serrin (voir [8]) qui identifie les deux espaces $H^{k,p}(\Omega)$ et $W^{k,p}(\Omega)$, on peut définir les espaces de Sobolev de deux manières naturelles, autrement dit

$$H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega), \qquad \forall k \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq p < +\infty.$$

Dans le cas particulier $p = 2$, on écrit $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, nous désignerons par $H^k(\Omega)$ l'espace de Sobolev défini par

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \quad D^\alpha f \in L^2(\Omega),\ \forall\alpha,\ |\alpha| \leq k\}$$

où $D^\alpha f$ est la dérivèe au sens des distributions, on introduit sur $H^k(\Omega)$ le produit scalaire

$$\begin{aligned} < f, g >_{H^k(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} < D^\alpha f, D^\alpha g >_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

où $<\cdot\,,\cdot>_{L^2(\Omega)}$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$, et la norme associée $||f||_{H^k(\Omega)} = \sqrt{< f, f >_{H^k(\Omega)}}$. L'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ muni du produit scalaire $< .,. >_{H^k(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

3.1.2.2.3 Espace $H_0^1(\Omega)$

On définit le sous espace $W_0^{k,p}(\Omega)$ de $W^{k,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$, dans $W^{k,p}(\Omega)$, on écrit $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$.
Dans le cas particulier $p = 2$, on définit l'éspace $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu'on note aussi

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

3.1.2.2.4 Domaine lipschitzienne

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Le domaine Ω est dit lipschitzien si il existe une une famille finie de boules ouvertes $(B(x_i, r_i))_{i=1,\ldots,n}$ telle que $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$ et sur chaque $(B(x_i, r_i)$ il existe un système de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ et une fonction g_i lipschitzienne telle que

$$\Omega \cap B(x_i, r_i) = \{(x_1, ..., x_n) \in B(x_i, r_i) :\ x_n > g_i(x_1, \cdots, x_{n-1})\}.$$

Cela signifie que la frontière de Ω peut-être vue localement comme le graphe d'une fonction lipschitzienne.

3.1.2.2.5 Théorème de trace

On termine cette partie de ce chapitre par l'énoncé du théorème de trace. Rappelons un résultat concernant la restriction au bord ou trace des fonctions des espaces de Sobolev: si Ω un domaine lipschitzienne avec une frontière $\partial\Omega$ et $1 \leq p < \infty$, alors il existe une application linéaire continue $\gamma\colon W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ qui à une fonction v définie sur Ω associe sa restriction γv au bord $\partial\Omega$ (i.e, $\gamma v = v|_{\partial\Omega}$) vérifie l'estimation

$$\|\gamma v\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \qquad \forall v \in W^{1,p}(\Omega),$$

où la constante $c > 0$ dépend de Ω.
La continuité de l'application de trace permet de définir l'espace

$$H_0^1(\Omega) = \big\{v \in H^1(\Omega), \quad \gamma v = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega\big\},$$

qui est un sous-espace hilbertien de $H^1(\Omega)$, cet espace est constitué les fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.

3.2 Notions simples de mécanique du solide

Rappelons qu'en mécanique du solide les grandeurs de base sont les forces et les déplacements, qui permettent de calculer directement des énergies.
En mécanique des milieux continus, il en est de même, mais on travaille avec des grandeurs normalisées. Pour simplifier disons que les contraintes sont des forces par unité de surface et les déformations sont des variations de longueur par unité de longueur.

Définition d'un solide.

Un solide est un corps qui ne peut subir aucune déformation. Les différents points d'un solide restent ainsi à des distances fixes les uns des autres (ces points sont discrets). Dans ce cas on appellera d'un solide indéformable.

Vecteurs Contrainte.

Le but de la mécanique appliquée au matériau est de calculer la «contrainte» s'exerçant en un point sur une «facette» donnée d'un matériau. Cette contrainte est représentée par un vecteur $\vec{\sigma}$.
La composante de ce vecteur perpendiculaire à la facette représente une contrainte normale σ_n (équivalent à une pression), alors que la composante parallèle à la facette, une contrainte tangentielle σ_τ (voir la figure 3.1).
Ces deux composantes jouent un rôle très important pour le matériau, puisque les contraintes normales induisent des ruptures de type fragile, alors que les contraintes de cisaillement induisent de la plasticité. Le but des calculs de mécanique est de déterminer pour un point donnée les facettes qui supportent un vecteur contrainte particulier. On peut voir que toutes les contraintes de toutes les facettes peuvent être déterminées par la connaissance du tenseur des contraintes en un point.

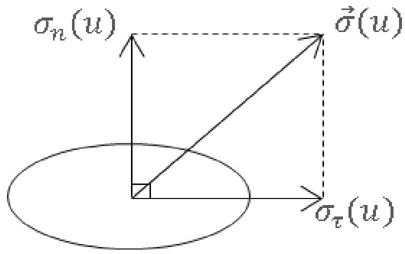

FIGURE 3.1 – Composantes d'un vecteur contrainte.

Champ de déplacement.

Les déformations d'un objet sont mesurées à partir d'une position initiale, qui est généralement la position de repos de l'objet dans laquelle aucun force n'est appliquée à l'objet.
On définit alors le champ vectoriel de déplacement, généralement noté u qui est simplement pour chaque point le vecteur reliant sa position au repos à sa position actuelle dans la configuration déformée.

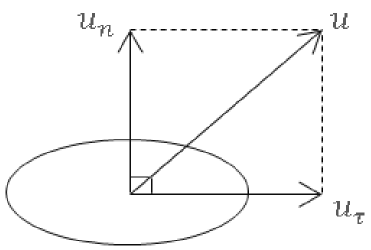

FIGURE 3.2 – Composantes d'un vecteur de déplacement.

Tenseurs.

Dans un certain nombre de domaines de la physique, il est nécessaire d'introduire l'outil mathématique des tenseurs. Très souvent, lorsqu'on parle de tenseur, on veut dire champ de tenseurs.
On se place dans un espace de dimension d, avec en général $d = 2$ ou $d = 3$. On considère une quantité physique, disons a, décrite par un tenseur de rang n, que l'on note

$$a_{ijk...}$$

où les n indices $i, j, k...$ prennent des valeurs entre 1 et d. Cela signifie que le nombre minimum de quantités scalaires (= de nombres) nécessaires pour décrire complètement cette quantité physique est d^n.
Quelques exemples:

— La température T en un point est décrite par un nombre unique. C'est un scalaire, et donc un tenseur de rang 0, puisque $3^0 = 1$. Aucun indice n'est nécessaire.

— La vitesse $\overrightarrow{u}$ est un tenseur de rang 1, car il est nécessaire d'avoir $3^1 = 3$ nombres (les projections de $\overrightarrow{u}$ selon les 3 axes) pour décrire entièrement $\overrightarrow{u}$. Il suffit d'un indice, disons i, et l'on note $\dot{u}_i$ ce tenseur.

— Les dérivées spatiales de la vitesse forment un tenseur de rang 2 ; en effet, il est nécessaire d'avoir $3^2 = 9$ nombres pour décrire toutes les combinaisons de dérivées spatiales. Ce tenseur, très utile en mécanique des fluides, est noté $G_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Les tenseurs peuvent être utilisés dans des bases quelconques, cependant, on n'utilisera dans le cadre de ce cours que la base des coordonnées cartésiennes en dimension $d = 3$, avec $i = 1, 2, 3$ correspondant aux coordonnées x, y, z. Dans une telle base, un tenseur de rang 2 peut se représenter comme une matrice $d \times d$ (ici 3×3), les lignes étant numérotées par i et les colonnes par j.

Tenseur des déformations.

Pour représenter les déformations du matériau, on définit en chaque point un tenseur des déformations, noté ε qui est symétrique d'ordre 2 servant à décrire l'état de déformation local résulte de contrainte (efforts internes).

Tenseur des contraintes.

Le tenseur des contraintes, noté σ est également une matrice 3×3 symétrique. C'est tout comme le tenseur des déformations, une approximation de ce qui se passe en chaque point de matériau.

Tenseur d'élasticité.

Le tenseur d'élasticité est un objet mathématique utilisé en élasticité. C'est un tenseur symétrique d'ordre 4 noté $\mathcal{A}$.

Frottement.

Le frottement est une force s'opposant aux mouvements d'un corps en contact avec un autre ou la force opposée à celle qui est à l'origine du mouvement. Un frottement est dit sec, si le contact est direct entre les deux corps.

Frottement statique de glissement.

Le glissement décrit un mouvement relatif entre deux éléments en contact. Lorsque du glissement, il y a du frottement (frottement de glissement).

Un corps reposant sur un autre et sollicité au glissement par une force tangentielle à leur surface de contact, ne commence son glissement qu'à partir d'une valeur de cette force dite "frottement statique ".

Élasticité linéaire.

La notion d'élasticité s'intéresse exclusivement à la déformation illustré dans la figure suivante.

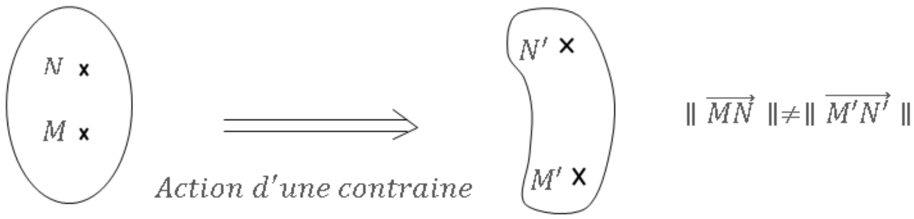

FIGURE 3.3 – Déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte.

L'élasticité étudie les déplacements, les déformations et les contraintes dans un solide soumis à des forces extérieures.
Nous adopterons les hypothèses suivantes:

- Le matériau est **homogène** (il a les mêmes propriétés en tout point) et **isotrope** (en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions).
- Le comportement du matériau est **linéaire** (les relations entre les contraintes et les déformations sont linéaires) et **élastique** (le solide reprend sa forme initiale dès que les forces appliquées sont supprimées).

3.3 Problème physique d'élasticité linéarisée

Dans cette partie, nous présentons les équations du problème statique d'élasticité linéarisée avec conditions aux limites de contact unilatéral avec frottement de glissement. Nous commençons par présenter le problème sans contact ni frottement. Ensuite, nous définissons les deux conditions de contact et de frottement tout d'abord d'une manière classique puis nous donnons le problème complet qui sera la base de tout la suite.

3.3.1 Problème d'élasticité linéarisée

Nous nous limitons au cas d'un solide élastique frottant sur une surface rigide plane immobile pour simplifier la présentation.
On considère un solide élastique qui occupe l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $(d = 2, 3)$, de frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$ constituée de trois parties ouvertes disjointes $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_C$ telles que $mes(\Gamma_D) > 0$ et l'ensembles Γ_D, Γ_N et Γ_C forment une partition disjointe de $\partial\Omega$, illustré dans la figure suivante.

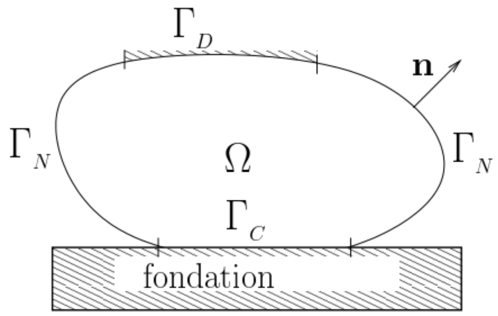

FIGURE 3.4 – Corps élastique Ω en contact frottant avec une fondation rigide.

Les notations classiques des problèmes d'élasticité sont utilisées ici, on note:

- **Le champ des déplacements:**

$$u = u(x,t) = (u_i(x,t)) \colon \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

tels que $[0,T]$ l'intervalle de temps, $T > 0$ et $i = 1, ..., d$.

- **Le tenseur des déformations linéarisées :**

$$\varepsilon \colon \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d \text{ et } \varepsilon(u) = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

tel que $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ et $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques de second ordre dans $\mathbb{R}^d$ (i.e., l'espace des matrices symétriques d'ordre d).

- **Le tenseur des contraintes :**

$$\sigma \colon \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d \quad \text{et} \quad \sigma(u) = \sigma_{ij}(u).$$

Le corps est soumis à une densité de forces volumiques dans Ω, par exemple son poids et à une densité de forces surfaciques sur Γ_N.

Le champ de déplacement est connu sur la partie de mesure non nulle Γ_D. La partie Γ_N est soumise à une condition de Neumann, Γ_D est soumise à une condition de Dirichlet et la partie restante Γ_C est la zone de contact avec ou sans frottement entre le corps et une fondation rigide plane.

3.3.2 Problème d'élasticité sans contact ni frottement

Pour un problème d'élasticité sans contact ni frottement, le déplacement $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ du corps satisfait aux équations suivantes :

$$\begin{cases} div\ \sigma(u) + f_0 = 0, & \text{dans}\ \ \Omega & \textbf{(Equation d'équilibre)} & (3.4) \\ \sigma(u) = \mathcal{A}\varepsilon(u), & \text{dans}\ \ \Omega & & (3.5) \\ u = 0, & \text{sur}\ \ \Gamma_D & \textbf{(Condition de Dirichlet)} & (3.6) \\ \sigma(u)n = f_2, & \text{sur}\ \ \Gamma_N & \textbf{(Condition de Newmen)} & (3.7) \end{cases}$$

où f_0 représente la densité de force volumique (une force ramenée au volume dans lequel elle est appliqué), f_2 désigne les forces surfaciques imposées sur Γ_N, n est la normale unitaire sortante de Ω sur $\partial\Omega$, $\mathcal{A}$ est le tenseur d'élasticité du quatrième ordre et div représente l'opérateur divergence $div\ \sigma = (\sigma_{ij,j})$ tel que $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$.
Notons par $u = (u_i)$, $\ i = \overline{1,d}$ le vecteur de déplacement, (a_{ijkh}), $i,j,k,h \in \overline{1,d}$ les composantes du tenseur $\mathcal{A}$ et par $\sigma = (\sigma_{ij})$, $i,j = \overline{1,d}$ le tenseur de contraintes, tel que

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u).$$

L'équation (3.4) représente l'équation d'équilibre à laquelle on ajoute la relation de comportement et les conditions de Dirichlet et Neumann.

Le cas symétrique.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, le tenseur des déformations est relié au tenseur des contraintes par la loi de Hooke généralisée. On a

$$\sigma = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))I \tag{3.8}$$

où λ et μ sont des coefficients de lamé et satisfaisant $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ et $tr(\varepsilon(u))$ est le tenseur de trace de $\varepsilon(u)$

$$tr(\varepsilon(u)) = \varepsilon_{ii}(u),$$

et I représente le tenseur d'identité (la matrice d'identité) sur $\mathbb{R}^d$.
Par les composantes, l'équation (3.8) s'écrit

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda\varepsilon_{ii}(u)\delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le delta Kronecker, i.e.,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

3.3.3 Problème d'élasticité avec contact et frottement

Dans cette partie, nous spécialisons les conditions de contact et de frottement d'un corps élastique en contact frottant avec une fondation rigide plane.

3.3.3.1 Conditions de contact

Nous passons maintenant à la description de diverses conditions sur la surface de contact Γ_C, ce qui sont divisées naturellement dans la direction normale et ceux qui sont dans la direction tangentielle. Pour les décrire, nous désignons par u_n et u_τ les composantes normale et tangentielle du déplacement u sur la frontière, elles sont données par

$$u_n = u.n, \quad u_\tau = u - u_n n. \tag{3.9}$$

Nous désignons également par σ_n et σ_τ les composantes normale et tangentielle du tenseur de contrainte σ, telles que

$$\sigma_n(u) = (\sigma(u)n).n, \quad \sigma_\tau(u) = \sigma(u)n - \sigma_n(u)n, \tag{3.10}$$

où σ_τ représente le frottement sur la surface de contact Γ_C.

Pour donner un sens à la décomposition précédente, on suppose que Γ_C est de régularité C^1. On suppose aussi qu'il n'ya pas de distance initiale entre le solide et la fondation rigide.

3.3.3.2 Conditions de Frottement de glissement

L'absence des forces tangentielles de frottement est donnée par

$$\sigma_\tau(u) = 0.$$

Cette façon de voir le contact implique que la force de contact tangentielle est nulle dans la zone de contact. On est dans le cas d'un glissement parfait, cette force tangentielle est non nulle dans la plupart des contacts réels.

Sur la surface de contact Γ_C, le frottement de glissement est modélisée par les conditions suivantes

$$\begin{cases} \sigma_\tau(u) \leq g(|u|), & si\ u = 0 \\ \\ \sigma_\tau(u) = -g(|u|)\frac{u}{|u|}, & si\ u \neq 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

tel que $g\colon \Gamma_C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est le seuil de frottement.

3.4 Modèle mathématique du problème physique

Nous commençons par fixer quelques notations.

<u>Notations.</u>

1. *La notation "." représente le produit scalaire dans l'espace $\mathbb{R}^d$, ce qui nous permet d'écrire*
$$u.v = u_i v_i, \ \ \|v\| = (v.v)^{1/2} \textit{ pour tout } u = (u_i),\ v = (v_i) \in \mathbb{R}^d.$$
on note aussi
$$div\tau = \tau_{1,1} + \tau_{2,2} \ \text{ avec } \ \tau = (\tau_1(x_1, x_2, t), \tau_2(x_1, x_2, t)) \tag{3.12}$$
or $\tau = (\tau_1(x_1, x_2), \tau_2(x_1, x_2))$
$$\nabla v = (v_{,1}, v_{,2}) \ \text{ avec } \ v = v(x_1, x_2, t) \ \text{ or } \ v = v(x_1, x_2). \tag{3.13}$$

2. *La notation $\|.\|$ représente la norme Euclidienne dans l'espace $\mathbb{S}^d$, on a*
$$\sigma.\tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}, \ \ \|\tau\| = (\tau.\tau)^{1/2} \textit{ pour tout } \sigma = (\sigma_{ij}),\ \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d.$$

Maintenant, nous supposons que

- Les forces volumiques f_0 dans Ω et les forces surfaciques f_2 sur Γ_N sont de la forme suivante
$$\mathbf{f_0} = (0, 0, f_0) \text{ avec } f_0 = f_0(x_1, x_2, t) \colon \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{3.14}$$
$$\mathbf{f_2} = (0, 0, f_2) \text{ avec } f_2 = f_2(x_1, x_2, t) \colon \Gamma_N \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{3.15}$$
- Par la suite, nous supposons que f_0 et f_2 engendrent une déformation sur le corps avec un déplacement u qui est indépendant de x_3, tel que
$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (0, 0, u) \text{ avec } u = u(x_1, x_2, t) \colon \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{3.16}$$
Et le tenseur des déformations $\varepsilon(u)$ est donné par
$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) \text{ avec } \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j \in \overline{1, 3}.$$
Tel que
$$\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,2} \\ \frac{1}{2}u_{,1} & \frac{1}{2}u_{,2} & 0 \end{pmatrix}$$
donc $tr\varepsilon(u) = 0$.

- Comme le matériau dans cette partie est supposé élastique, on peut écrire son loi de comportement de la manière suivante.

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda(tr\varepsilon(u))I \tag{3.17}$$

tels que λ et μ sont des coefficients de Lamé, $tr\varepsilon(u) = \varepsilon_{ii}(u)$, I le tenseur d'identité sur $\mathbb{R}^d$. On obtient

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} \\ \mu u_{,1} & \mu u_{,2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu u_{,1}. \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu u_{,1}. \end{cases}$$

donc la loi d'équilibre sera écrite comme suit

$$div\,(\sigma(u)) + f_0 = 0. \tag{3.19}$$

Tel que $div\,\sigma(u) = (\sigma_{ij,j})$. Alors on a

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0, \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0, \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_0 = 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Comme u et f_0 ne dépendent que des variables x_1, x_2 et $\mu = \mu(x_1, x_2)$. Il découle de (3.18) que les deux premières équations de (3.20) sont satisfaites de façon identique. De plus, la dernière équation dans (3.20) devient

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + f_0 = 0.$$

D'autre part, on a

$$\nabla u = (u_{,1}, u_{,2}),$$

donc

$$\mu\nabla u = (\mu u_{,1}, \mu u_{,2}),$$

d'où

$$div\,(\mu\nabla u) = div\,(\mu u_{,1}, \mu u_{,2}) = \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2}.$$

Alors l'équation (3.19) devient

$$div\,(\mu\nabla u) + f_0 = 0 \ \text{dans}\,\Omega. \tag{3.21}$$

- Conditions de Dirichlet et Neumann.

  Nous décrivons maintenant les conditions sur la frontière $\partial\Omega$. Nous supposons que les déplacements sont bloqués sur la frontière Γ_D, ainsi (3.16) nous donne

$$u = 0, \quad \text{dans } \Gamma_D,$$

ce qui est la condition de Dirichlet.

Soit n le vecteur normale unitaire sur $\partial\Omega$. Nous avons

$$n = (n_1, n_2, 0) \ \text{ avec } \ n_i = (x_1, x_2) : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \tag{3.22}$$

On désigne par $\partial_n u$ la dérivée normale du déplacement, donnée par

$$\partial_n u = \nabla u.n = u_{,1} n_1 + u_{,2} n_2 \tag{3.23}$$

avec les notions ci-dessus, on a les égalités suivantes

$$\begin{cases} \tau.n = \tau_1 n_1 + \tau_2 n_2, \\ \\ \tau.\nabla v = \tau_1 v_{,1} + \tau_2 v_{,2}. \end{cases} \tag{3.24}$$

À partir de (3.18), (3.22) et (3.23), on obtient le vecteur $\sigma(u)n = (\sigma_{ij} n_j)$ tel que

$$\sigma(u)n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} \\ \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} \\ \\ \mu u_{,1} & \mu u_{u,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \\ n_2 \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ \mu u_{,1} n_1 + \mu u_{,2} n_2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(u)n = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ \mu \nabla u.n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ \mu \partial_n u \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que

$$\sigma(u)n = (0, 0, \mu \partial_n u). \tag{3.25}$$

Maintenant nous utilisons (3.7), (3.15) et (3.25), pour obtenir

$$\sigma(u)n = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ \mu \partial_n u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ f_2 \end{pmatrix}$$

donc $\mu \partial_n u = f_2$ sur Γ_N. Ceci est la nouvelle forme de la condition de Neumann.

- Conditions du frottement de glissement.

  Nous décrivons maintenant la condition de frottement. D'abord à partir de (3.16) et (3.22), nous déduisons que le déplacement normal disparait $u_n = 0$, ce qui montre que le contact est bilatéral, c'est-à-dire que le contact est conservé pendant toute la durée du processus.

  En utilisant maintenant (3.16), (3.18), (3.13) et (3.22) nous conclurons que

$$u_\tau = (0,0,u), \quad \sigma_n(u) = 0, \quad \sigma_\tau(u) = (0,0,\mu\partial_n u) \tag{3.26}$$

  Nous pouvons maintenant décrire les principales conditions de frottement. Nous supposons que le frottement est modélisé par les conditions (3.11) ci-dessus sur Γ_C. En utilisant (3.26) et (3.11), il est simple de voir que les conditions de frottement du glissement deviennent

$$\begin{cases} |\mu\partial_n u| \leq g(|u|), & si\ u = 0 \\ \mu\partial_n u = -g(|u|)\dfrac{u}{|u|}, & si\ u \neq 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

  La fonction g est une fonction donnée.

Maintenant, d'après ce que nous avons ci-dessus, le problème d'élasticité avec contact et frottement du glissement (P_{CF}) est le suivant.

Problème P_{CF}. *Trouver le champ de déplacements* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$(P_{CF}) \begin{cases} div(\mu\nabla u) + f_0 = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{dans } \Gamma_D \\ \mu\partial_n u = f_2, & \text{dans } \Gamma_N \\ \begin{cases} |\mu\partial_n u| \leq g(|u|), & \text{si } u = 0, \\ \mu\partial_n u = -g(|u|)\frac{u}{|u|}, & \text{si } u \neq 0, \end{cases} & \text{dans } \Gamma_C \end{cases}$$

3.4.1 Quelques hypothèses

Pour étudier le problème P_{CF}, on suppose que le coefficient de Lamé satisfait

$$\mu \in L^{\infty}(\Omega) \text{ et existe } \mu^{*} > 0 \text{ tel que } \mu(x) > \mu^{*} \quad p.p\ x \in \Omega. \tag{3.28}$$

Nous supposons dans ce qui suit que les forces volumiques de densité f_0 et les forces surfaciques de densité f_2 satisfont

$$f_0 \in L^2(\Omega), \quad f_2 \in L^2(\Gamma_N). \tag{3.29}$$

On suppose aussi que le seuil de frottement g satisfait ce qui suit

$$g \in L^{\infty}(\Gamma_C) \ \text{ et } \ g(x) \geq 0, \ p.p\ x \in \Gamma_C,$$

et

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad g : \Gamma_C \longrightarrow \mathbb{R}_{+}. \\ \\ \text{(b)} \quad \exists\ L_g \geq 0, \quad \text{tel que} \\ \qquad\qquad |g(|x_1|) - g(|x_2|)| \leq L_g |x_1 - x_2|, \ \forall x_1, \ x_2 \in \Gamma_C. \\ \\ \text{(c)} \quad x \longmapsto g(x) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_C. \end{cases} \tag{3.30}$$

3.4.2 Formulation variationnelle

On va transformer le problème physique au cas mathématique nous trouvons une inéquation quasi-variationnelle. Pour Présenter la formulation variationnelle de problème (PCF), nous introduisons l'espace fonctionnel suivant.

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \colon v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

tel que $mes\,\Gamma_D > 0$, $(V, <.,.>)$ est un fermé dans $H^1(\Omega)$, ce qui est un espace de Hilbert associée au champ de déplacement u muni du produit scalaire

$$< u, v >_V = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \ \mathrm{d}x, \qquad \forall u, v \in V.$$

De plus, la norme associée est définie par

$$||v||_V = ||\nabla v||_{L^2(\Omega)^2}, \qquad \forall v \in V \tag{3.31}$$

cette norme est équivalente à la norme usuel de $||.||_{H^1(\Omega)}$. Par le théorème de trace du Sobolev on déduit qu'il existe une constante positive $c_V > 0$ satisfait

$$||v||_{L^2(\Gamma_C)} \leq c_V ||v||_V, \qquad \forall v \in V. \tag{3.32}$$

Nous rappelons la ***formule de Green***[4], pour tout $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in H^1(\Omega)^2$ par l'équation

$$\int_\Omega \tau \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega div\, \tau \; v \, \mathrm{d}x = \int_\Gamma (\tau.n)\, v \, \mathrm{d}a, \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

tel que $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_C \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

Par la suite, nous définissons la forme bilinéaire $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ et la fonctionnelle $j\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, par les égalités suivantes

$$a(u,v) = \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x, \qquad \forall u, v \in V \tag{3.33}$$

$$j(u,v) = \int_{\Gamma_C} g(|u|)|v| \, \mathrm{d}a, \qquad \forall u, v \in V \tag{3.34}$$

et comme V et un espace de Hilbert alors d'après le théorème de représentation de Riez, il existe un unique élément $f \in V$, tel que

$$< f, v >_V = \int_\Omega f_0 \, v \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} f_2 \, v \, \mathrm{d}a, \qquad \forall v \in V \tag{3.35}$$

où $f_0 \in L^2(\Omega)$ et $f_2 \in L^2(\Gamma_N)$.

Avec ces notations, on peut passer d'un problème d'élasticité avec contact et frottement au problème quasi-variationnelle de type elliptique qui s'intéresse à trouver un élément $u \in V$ tel que

$$a(u, v-u) + j(u,v) - j(u,u) \geq < f, v-u >_V \qquad \forall v \in V.$$

Maintenant, nous allons présenter dans le Lemme qui suit la formulation quasi-variationnelle du problème élastique (P_{CF}).

Lemme 3.4.1. *Supposons que le champ de déplacements $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution du problème élastique, alors $u \in V$ et de plus, u vérifiait le système suivant*

$$a(u, v-u) + j(u,v) - j(u,u) \geq < f, v-u >_V \qquad \forall v \in V. \tag{3.36}$$

Démonstration.

Supposons que le problème mécanique (P_{CF}) admet une solution u, telle que $u \in V$ donc $\mu\nabla u \in H^1(\Omega)^2$, et soit $v \in V$. Nous multiplions l'équation $div\ (\mu\nabla u) + f_0 = 0$ par $(v-u)$, on trouve que

$$div\ (\mu\nabla u)(v-u) + f_0(v-u) = 0.$$

En intégrant le résultat sur Ω, on a

$$\int_\Omega div(\mu\nabla u)(v-u)\ \mathrm{d}x + \int_\Omega f_0(v-u)\ \mathrm{d}x = 0, \qquad \forall v \in V.$$

En utilisant la formule de Green, on trouve

$$\int_\Omega (\mu\nabla u)\cdot \nabla(v-u)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f_0(v-u)\ \mathrm{d}x + \int_\Gamma (\mu\nabla u\cdot \eta)\,(v-u)\ \mathrm{d}a, \qquad \forall v \in V.$$

Par la notation (3.23), on a

$$\int_\Omega (\mu\nabla u)\cdot \nabla(v-u)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f_0(v-u)\ \mathrm{d}x + \int_\Gamma \mu\partial_n u(v-u)\ \mathrm{d}a, \qquad \forall v \in V. \tag{3.37}$$

D'abord calculons l'intégrale $\int_\Gamma \mu\partial_n u(v-u)\ \mathrm{d}a$.

Puisque l'intégrale sur Γ est divisé en $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_C$ et chaque élément $v \in V$ s'annule sur Γ_D. Alors

Calculons l'intégral sur $\mathbf{\Gamma_D}$:

Suivant le problème (P_{CF}), on a $u = 0$ sur Γ_D. Donc

$$\int_{\Gamma_D} \mu\partial_n u(v-u)\ \mathrm{d}a = 0.$$

Calculons l'intégral sur $\mathbf{\Gamma_N}$:

Suivant le problème (P_{CF}), on a $\mu\partial_n u = f_2$. Donc

$$\int_{\Gamma_N} \mu\partial_n u(v-u)\ \mathrm{d}a = \int_{\Gamma_N} f_2(v-u)\ \mathrm{d}a.$$

Calculons l'intégral sur $\mathbf{\Gamma_C}$:

Suivant le problème (P_{CF}), nous pouvons montré que

$$\mu\partial_n u(v-u) \geq g(|u|)|u| - g(|u|)|v| \quad \text{sur } \Gamma_C.$$

En effet,

Si $u \neq 0$. D'après le problème (P_{CF}), on a

$$\begin{aligned}\mu\partial_n u(v-u) = -g(|u|)\frac{u}{|u|}(v-u) &= -g(|u|)\frac{uv}{|u|} + g(|u|)\frac{u^2}{|u|}\\ &= g(|u|)|u| - g(|u|)\frac{uv}{|u|}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a $uv \leq |uv|$, alors $\dfrac{uv}{|u|} \leq \dfrac{|uv|}{|u|} = |v|$.

Donc

$$\mu\partial_n u(v-u) \geq g(|u|)|u| - g(|u|)|v|.$$

<u>Si $u=0$.</u> On a aussi

$$\mu\partial_n u(v-u) = \mu(\partial_n u)v \geq -|\mu\partial_n u||v|.$$

D'après le problème (P_{CF}), on a $|\mu\partial_v u| \leq g(|u|)$. Donc

$$\begin{aligned}\mu\partial_v u(v-u) &\geq -g(|u|)|v| \\ &= g(|u|)|u| - g(|u|)|v|.\end{aligned}$$

D'où sur Γ_C, on a

$$\int_{\Gamma_C} \mu\partial_n u(v-u)\ \mathrm{d}a \geq \int_{\Gamma_C} g(|u|)|u|\ \mathrm{d}a - \int_{\Gamma_C} g(|u|)|v|\ \mathrm{d}a.$$

En remplaçant les résultats dans (3.37), on trouve

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mu\nabla u\cdot \nabla(v-u)\ \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_C} g(|u|)|v|\ \mathrm{d}a - \int_{\Gamma_C} g(|u|)|u|\ \mathrm{d}a \geq& \int_{\Omega} f_0(v-u)\ \mathrm{d}x \\ &+ \int_{\Gamma_N} f_2(v-u)\ \mathrm{d}a.\end{aligned}$$

En utilisant les relations (3.33), (3.34) et (3.35), alors on obtient

$$a(u, v-u) + j(u,v) - j(u,u) \geq < f, v-u >_V \qquad \forall v \in V.$$

Ce qui conclut la démonstration. ∎

3.4.3 Résultat d'existence et d'unicité

Cette section comporte un résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 3.4.1. *Supposons que* (3.28) *et* (3.35) *sont satisfaites. Alors, le problème quasi-variationnel suivant :*
Trouver $u \in V$, tel que

$$a(u, v-u) + j(u,v) - j(u,u) \geq < f, v-u >_V \qquad \forall v \in V. \tag{3.38}$$

possède une seule solution u qui satisfaite (3.38).
Tel que, $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilineaire sur V associée au coefficient d'elasticité et $j : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle décrivant de frottement.

Démonstration.

Notons tout d'abord que la preuve de ce théorème est basée sur des arguments et des propriétés des inéquations variationnelles, quasi-variationnelles et les arguments du théorème de point fixe.
Nous commençons par montrer les conditions suivante.

1. **Continuité de la forme bilinéaire symétrique.**
   La forme $a(\cdot,\cdot)$ vérifiant

$$a(\cdot,\cdot)\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire symétrique et}$$

pour $\mu \in L^\infty(\Omega)$, on a

$$a(u,v) = \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \; \mathrm{d}x \qquad \forall u, v \in V.$$

Soient u et $v \in V$, alors

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \; \mathrm{d}x \right| \leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x \right|$$

d'après (3.13), on a aussi

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq ||\mu||_{L^\infty(\Omega)} \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} u_{,i} v_{,i} \; \mathrm{d}x \right| \\ &= ||\mu||_{L^\infty(\Omega)} \left| \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_{,i} v_{,i} \; \mathrm{d}x \right| \end{aligned}$$

en utilisant (3.2), on trouve

$$|a(u,v)| \leq ||\mu||_{L^\infty(\Omega)} \left| < \nabla u, \nabla v >_{L^2(\Omega)^2} \right|$$

et d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (3.31), on obtient

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq ||\mu||_{L^\infty(\Omega)} ||\nabla u||_{L^2(\Omega)^2} ||\nabla v||_{L^2(\Omega)^2} \\ &= ||\mu||_{L^\infty(\Omega)} ||u||_V ||v||_V \end{aligned}$$

donc il existe $M = ||\mu||_{L^\infty(\Omega)} > 0$, tel que

$$|a(u,v)| \leq M ||u||_V ||v||_V, \qquad \forall u, v \in V.$$

D'où la continuité de la forme $a(\cdot,\cdot)$.

2. **Coercitive de la forme bilinéaire symétrique.**
   Pour $\mu \in L^{\infty}(\Omega)$ et pour tout $v \in V$, on a

$$a(v,v) = \int_{\Omega} \mu \nabla v . \nabla v \ \mathrm{d}x.$$

   Par (3.13) et (3.28), on a

$$\begin{aligned} a(v,v) &\geq \mu^* \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} v_{,i}^2 \ \mathrm{d}x \\ &= \mu^* \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} v_{,i}^2 \ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

   En utilisant (3.3) et (3.31) , on obtient

$$\begin{aligned} a(v,v) &\geq \mu^* ||\nabla v||_{L^2(\Omega)^2} \\ &= \mu^* ||v||_V, \qquad \forall v \in V. \end{aligned}$$

   Donc il existe $m = \mu^* > 0$, tel que

$$a(v,v) \geq m \, ||v||_V^2, \qquad \forall v \in V.$$

   D'où la coercivité de la forme $a(\cdot,\cdot)$.

3. Maintenant, il reste à montrer la vérification des conditions (2.3) sur la fonctionnelle j.

   <u>3-1 Convexité.</u>
   Supposons $\eta \in V$ (fixé), $t \in [0,1]$ et $v, \ v' \in V$, alors

$$\begin{aligned} j(\eta, tv + (1-t)v') &= \int_{\Gamma_C} g(|\eta|) \big| tv + (1-t)v' \big| \ \mathrm{d}a \\ &\leq t \int_{\Gamma_C} g(|\eta|)|v| \ \mathrm{d}a + (1-t) \int_{\Gamma_C} g(|\eta|)|v'| \ \mathrm{d}a \\ &\leq tj(\eta, v) + (1-t)j(\eta, v') \end{aligned}$$

   donc

$$j(\eta, tv + (1-t)v') \leq tj(\eta, v) + (1-t)j(\eta, v'), \quad \forall v, v' \in V, \ t \in [0,1].$$

   D'où la convexité de la fonctionnelle.

3-2 Semi continuité inférieure.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ une suite d'élément de V, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n \underset{V}{\longrightarrow} v$. Alors

$$\begin{aligned}\Big|j(\eta, v_n) - j(\eta, v)\Big| &= \Big|\int\limits_{\Gamma_C} g(|\eta|)|v_n| \text{ d}a - \int\limits_{\Gamma_C} g(|\eta|)|v| \text{ d}a\Big| \\ &= \Big|\int\limits_{\Gamma_C} g(|\eta|)(|v_n| - |v|) \text{ d}a\Big| \\ &\le \int\limits_{\Gamma_C} g(|\eta|)\Big||v_n| - |v|\Big| \text{ d}a \\ &\le \int\limits_{\Gamma_C} g(|\eta|)\big|v_n - v\big| \text{ d}a \\ &\le \Big(\int\limits_{\Gamma_C} g(|\eta|)^2 \text{ d}a\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\Gamma_C} \big|v_n - v\big|^2 \text{ d}a\Big)^{1/2} \\ &\le ||g||_{L^2(\Gamma_C)}||v_n - v||_{L^2(\Gamma_C)}.\end{aligned}$$

Et par (3.32), on a

$$\Big|j(\eta, v_n) - j(\eta, v)\Big| \le c_V||g||_{L^2(\Gamma_C)}||v_n - v||_V.$$

Et comme

$$||v_n - v||_V \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \inf j(\eta, v_n) = j(\eta, v), \quad \forall\eta \in V.$$

En déduit que la fonctionnelle $j(\eta, .)$ pour tout $\eta \in V$, est continue donc elle est s.c.i sur V.

3-3 Soient u_1, u_2, v_1 et $v_2 \in V$, en utilisant (3.30) et (3.34), on trouve que

$$\begin{aligned}j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) &= \int\limits_{\Gamma_C} \big[g(|u_1|) - g(|u_2|)\big](|v_2| - |v_1|)\text{d}a \\ &\le \int\limits_{\Gamma_C} Lg|u_1 - u_2||v_1 - v_2|\text{d}a \\ &\le Lg\Big(\int\limits_{\Gamma_C} |u_1 - u_2|^2\text{d}a\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_{\Gamma_C} |v_1 - v_2|^2\text{d}a\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le Lg||u_1 - u_2||_{L^2(\Gamma_C)}||v_1 - v_2||_{L^2(\Gamma_C)}.\end{aligned}$$

D'aprés (3.32), on obtient

$$j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \le c_V^2 Lg||u_1 - u_2||_V||v_1 - v_2||_V$$

alors il existe $\alpha = c_V^2 Lg \geq 0$, tel que

$$j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \alpha ||u_1 - u_2||_V ||v_1 - v_2||_V.$$

Utilisons le théorème (2.2.2), il suit que le problème élastique (P_{FC}) admet une seule solution $u \in V$. Cette solution peut considérer comme étant la solution faible du problème anti-plane de contact.

Ce qui détermine la démonstration. ■

Conclusion

Ce travail concerne essentiellement l'étude de quelques problèmes aux limites gouvernés par le système de Lamé de type elliptique linéaire qui modélisent les petites vibrations dans un domaine ouvert borné Ω et à frontière régulière Γ de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$. Les techniques utilisées sont celles de la méthode de point fixe et des arguments des inéquations quasi-variationnelles. L'objectif d'étudier les problèmes aux limites de contact avec frottement entre un corps déformable et une fondation dans un processus statique pour des matériaux élastiques est de caractériser le comportement d'un corps déformable et de savoir comment les forces qui sont appliquées à ce corps modélisent sa déformation, son mouvement, son déplacement... Et comment réagit la surface de contact.

Bibliographie

[1] **R.A. Adams,** *Sobolev spaces*, Academic Press1975.

[2] **R.A. Adams, J. Fournier,** *Sobolev Espace*, Elsevier(2003).

[3] **R.A. Adams, J. Fournier,** *Some imbedding theorems for Sobolev spaces*, Canad. J. Math. 23, (1971), 517–530.

[4] **G. Allaire,** *Analyse numérique et optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique,(2005)

[5] **D. Azé,** *Eléments d'Analyse Convexe et Variationnelle*, Ellipses, (1998).

[6] **A. Bensoussan, M-Goursat, J-L. Lions,** *Contôle impulsionnel et I.Q.V Stationnaires*, C.R.A.S, 276, (1973).

[7] **R. Beroui, F. Bouhala,** *Application de Lax-Milgram aux Inéquations Variationnelles*, Sous la direction de : **S. Medjerab**, mémoire de Master, Spécialité Mathématiques fondamentales, Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel.

[8] **P. Bérard,** *Espaces de Sobolev*, Résumé du cours de MEDP Maéétrise de mathématiques, Institut Fourier UMR 5582 UJF-CNRS, (2001-2002).

[9] **N. Boccara,** *Analyse Fonctionnelle*, Une introduction pour physiciens, Ellipses (1984).

[10] **F. Boyer,** *Analyse Fonctionnelle*, cours de Master Mathématiques et Applications Première année, Aix-Marseille Université, (2015).

[11] **H. Brezis,** *Analyse fonctionnelle Théorie et Applications*, $2^{\text{ème}}$ tirage, Masson 1987.

[12] **A. Derbazi, M. Dalah,** Thèse de Doctorat, *Modélisation Mathematiques des problemes electro-élastique de contact avec frottement*, Sous la direction de :Pr. M. Dalah, Université de Frèees Mentouri Constantine,(2016).

[13] **J. A. Dieudonné.** - *Eléments d'analyse*, Tome I, Fondements de l'analyse moderne, 3ème edition, Paris- Gauthier-Villars, (1979).

[14] **G. Duvaut, J.L.Lions,** *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, (1972).

[15] **I. Ekeland, R. Temam,** *Convex analysis and variational problems*, American Elsevier Publishing Company, Inc, New York, (1976).

[16] **G. Fichera.** *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno,* Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I., 5, 1964.

[17] **J.B. Hiriart-Urruty,** C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, I and II, Springer-Verlag, (1993).

[18] **V. Isakov,** *Sobolev Espace in Mathématics III, Apllication in Mathématical physiques*, Springer (2009).

[19] **H.B. Khenous, M. Patrick Laborde, M. Yves Renard,** *Problèmes de contact unilatéral avec frottement de Coulomb en élastostatique et élastodynamique. Etude mathématique et résolution numérique*, Thèse de Dotorat sous la direction de : M. Patrick Laborde et M. Yves Renard, Département de Génie Mathématique et Modélisation - INSA de Toulouse Laboratoire Mathématiques pour l'Industrie et la Physique (UMR 5640) N 801, (2005).

[20] **Y. Privat,** *Espaces Vectoriels Normés et Topologie*, Polycopié de cours 2èmme année Cycle Préparatoire Polytechnique, Université Henri Poincaré Nancy 1. (2000).

[21] **P.A. Ravirat, J.M. Thomas,** *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*, Masson (1988).

[22] **R.T. Rockafellar,** *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, (1970).

[23] **W. Rudin,** *Functional analysis*, McGraw-Hill 1973.

[24] **H. Saoud, S. Adly, M. Théra,** *Étude des problèmes unilatéraux,* Thèse de Dotorat sous la direction de : S. Adly et M. Théra, Département Maths-Info, Laboratoire XLIM, Université de Limoges, N 12 (2009).

[25] **L. Schwartz,** *Analyse hilbertienne*, Paris-Hermann, (1979).

[26] **A. Signorini.** *Questioni de elasticita non linearizzata e semi-linearizzata.* Rend de Matematica, Rome, 1959.

[27] **M. Sofonea, A. Matei,** *Variational inequalities with applications.* A study of antiplane frictional contact problems, Advances inmachanics and mathematics, Springer,(2009).

[28] **M. Sofonea,** *Problèmes non linéaires dans la Théorie de l'élasticité*, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie,(1993).

[29] **L. Tartar,** *I.Q.V abstraites*, C.R.A.S, 278, (1974).

[30] **P. Villaggio,** *Mathematical Models for Elastic*, Cambridge University Press, New York, (1997).

[31] **M. Willem,** *Analyse Convexe et Optimisation* (3ème édition), Editions Ciaco, Bruxelles, (1989).

[32] **M. Willem,** *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Cassini, Paris, (2003).