REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Option : Analyse et Applications

Thème

Problèmes de contrôle optimal gouvernés par les équations de Navier-Stokes

Présenté par :

Bouchefra Djahida

Devant le Jury :

Président	R. Belhadef	M.C.B. Univ. Jijel
Encadreur	N. Arada	M.C.B. Univ. Jijel
Examinateur	F. Aliouane	M.C.B. Univ. Jijel

Promotion 2016/2017

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à N. Arada pour les conseils, l'orientation et l'assistance qu'il m'a apporté.

Je remercie F. Aliouane et R. Belhadef d'avoir accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements vont encore à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, à mes amis et à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin.

Mes plus vifs remerciements à ma chère mère, à mes frères et soeurs, qui m'ont accompagnée et soutenue durant toutes ces années.

Une pensée émue et particulière pour mon père qui aurait été comblé s'il était encore parmis nous.

Djahida

TABLE DES MATIÈRES

1 Contrôle optimal des équations de Navier-Stokes stationnaires **1**

1.1 Notations et cadre fonctionnel 2

1.2 Équation d'état 4

1.3 Existence d'un contrôle optimal 7

1.4 Équation linéarisée 8

1.5 Continuité et dérivabilité de l'état par rapport au contrôle 10

1.6 Équation adjointe 12

1.7 Conditions nécessaires d'optimalité 12

2 Contrôle optimal des équations de Navier-Stokes instationnaires **14**

2.1 Notations et cadre fonctionnel 15

2.2 Équation d'état 18

2.2.1 Existence, unicité et régularité 18

2.2.2 Estimations lipschitziennes 26

2.3 Équation linéarisée 28

2.4 Dérivabilité de l'état par rapport au contrôle 31

2.5 Équation adjointe 33

2.6 Conditions nécessaires d'optimalité 35

Bibliographie **38**

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Lors de l'étude des conditions d'optimalité pour des problèmes de contrôle optimal, une étape fondamentale est consacrée à l'analyse mathématique de l'équation d'état. Les difficultés majeures sont généralement liées à l'existence, l'unicité et la régularité des solutions dans un cadre fonctionnel adéquat. Si la solution n'est pas unique où n'est pas "suffisamment" régulière, établir des conditions d'optimalité peut s'avérer être une tâche difficile.

L'exemple type est considéré dans le premier chapitre de ce mémoire avec un problème gouverné par une équation de Navier-Stokes stationnaire. En effet, on ne peut généralement pas garantir que la solution de l'équation de Navier-Stokes stationnaire est unique, à moins d'imposer des restrictions sur la taille de la variable contrôle. Le même type de problème sera rencontré en analysant des aspects a priori différents : la différentiabilité de l'état par rapport au contrôle, la solvabilité de l'équation linéarisée associée à l'équation d'état, où encore celle de l'équation adjointe. Pour plus détails sur ces aspects, voir par exemple [5], [6] et [7] où des restrictions sur l'ensemble des contrôles admissibles sont imposées. Dans l'approche considérée dans ce mémoire, la restriction porte uniquement sur le contrôle optimal.

Ces difficultés étant principalement liées au terme convectif, on s'attendrait à les retrouver quand on considère des problèmes de contrôle gouvernés par une équation de Navier-Stokes instationnaire. Si le cas tridimensionnel est encore hors de portée et reste un problème ouvert, le cas bidimensionnel (considéré dans le chapitre 2) peut être complètement étudié, et ce sans imposer aucune restriction sur le contrôle. Ce type de problème a été étudié dans [9]. Nous obtenons le même type de résultat, mais en suivant une approche quelque peu différente.

Dans chacun des deux chapitres, le plan est le suivant : nous commençons par présenter les notations et les résultats auxiliaires nécessaires. Suit alors une analyse complète de l'équation d'état, de l'équation linéarisée, l'étude de la dérivabilité de l'état par rapport au contrôle et, finalement, l'établissement des conditions nécessaires d'optimalité.

CHAPITRE 1

CONTRÔLE OPTIMAL DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRES

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de contrôle optimal gouverné par un système décrivant l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et donné par

$$\begin{cases} -\nu\Delta y + (y\cdot\nabla)\, y + \nabla p = u & \text{dans } \Omega, \\ \nabla\cdot y = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.1}$$

où p est la pression, u est la densité massique de forces extérieures, $\nu > 0$ est la viscosité du fluide, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ est un domaine borné de frontière Γ.

L'objectif est d'étudier l'existence d'un contrôle optimal et d'établir les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème de contrôle optimal suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser} \quad J(u,y) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |y - y_d|^2\, dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2\, dx \\ u \in U_{ad} \text{ et } (u,y) \text{ satisfait (1.1),} \end{cases}$$

où $\lambda \geq 0$, $y_d \in L^2(\Omega)$ est un champs de vitesse voulu, l'ensemble des contrôles admissibles U_{ad} est convexe, fermé et non vide dans $L^2(\Omega)$.

Le plan du chapitre est le suivant : dans la section 1.1, nous présentons les notations, précisons le cadre fonctionnel et rappelons certains résultats auxiliaires nécessaires pour la suite. La section

1.2 est consacrée à l'analyse mathématique de l'équation d'état. L'existence d'une solution faible est établie en utilisant une méthode de Galerkin appropriée. Comme déjà indiqué dans l'introduction, l'unicité de la solution n'est garantie que pour des données suffisamment petits (typiquement, nous avons une restriction sur le contrôle et/où la viscosité). Dans la section 1.3, nous montrons que le problème de contrôle optimal admet au moins une solution. Dans la section 1.4, nous étudions la solvabilité de l'équation linéarisée. Appliquant le théorème de Lax-Milgram pour établir l'existence et l'unicité de la solution, nous sommes amenés, encore une fois, à restreindre les données du problème pour garantir la coercivité de la forme bilinéaire correspondante. (Les mêmes aspects et les mêmes difficultés seront rencontrés lors du traitement de l'équation adjointe dans la section 1.6). Dans la section 1.5, la continuité lipschitzienne et la dérivabilité au sens de Gâteaux de l'application qui au contrôle associe l'état sont analysés. Ces aspects sont importants pour établir les conditions nécessaires d'optimalité, énoncées et prouvées dans la section 1.7.

1.1 Notations et cadre fonctionnel

Dans ce chapitre, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$). La frontière de Ω est notée Γ et est de classe C^2. Pour $u, v \in \mathbb{R}^d$, on définit le produit scalaire par $u \cdot v = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$. On utilisera aussi la notation

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Les espaces de Sobolev sont notés $W^{k,p}(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$ et $1 < p < +\infty$) et leurs normes $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$. On pose $W^{0,p}(\Omega) = \|\cdot\|_p$. Pour $p = 2$, on pose $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ et $\|\cdot\|_{W^{k,p}} = \|\cdot\|_{H^k}$. Afin d'éliminer la pression dans la formulation faible du problème étudié, nous considérons les espaces des champs de vitesse à divergence nulle H et V définis par

$$H = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla \cdot v = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } v \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$
$$V = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \nabla \cdot v = 0 \text{ dans } \Omega\},$$

où n est la normale unitaire extérieure. Rappelons maintenant certaines inégalités classiques, qui seront largement utilisées par la suite.

Lemme 1.1.1 (Inégalité de Poincaré). *Il existe une constante positive C_P, dépendant de d et de Ω, telle*

$$\|y\|_2 \leq C_P \|\nabla y\|_2 \qquad \forall y \in H_0^1(\Omega).$$

où C_P est la constante de Poincaré.

Preuve. Voir par exemple [3], Chapitre 2. □

Lemme 1.1.2 (Inégalité de Sobolev). *Il existe une constante positive C_S, dépendant de d et de Ω, telle*

$$\|y\|_4 \leq C_S \|\nabla y\|_2 \qquad \forall y \in H_0^1(\Omega).$$

où C_S est la constante de Sobolev.

Preuve. Voir par exemple [3], Chapitre 2. □

Lemme 1.1.3 (Inégalité de Young). *Soient $a, b > 0$ et $p, q \in]1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Nous terminerons la section signalant des propriétés notables liées à la forme trilinéaire b définie par

$$b(y, \varphi, w) = ((y \cdot \nabla) \varphi, w).$$

Lemme 1.1.4. *Soient $w, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ et $y \in V$. Alors nous avons*

$$b(y, \varphi, w) = -b(y, w, \varphi), \tag{1.2}$$

$$b(y, \varphi, \varphi) = 0. \tag{1.3}$$

Preuve. La propriété (1.2) est une conséquence de la propriété (1.3) lorsque nous remplaçons φ par $\varphi + w$. En effet,

$$\begin{aligned} b(y, \varphi, \varphi) &= b(y, \varphi + w, \varphi + w) \\ &= b(y, \varphi, \varphi) + b(y, \varphi, w) + b(y, w, \varphi) + b(y, w, w). \end{aligned}$$

Donc

$$b(y, \varphi, w) = -b(y, w, \varphi).$$

Pour prouver (1.3), il suffit d'appliquer la formule de Green

$$b(y, \varphi, \varphi) = -\int_\Omega \operatorname{div} y \, \varphi \, dx - \int_\Gamma y \cdot n \cdot \varphi \, ds$$

et de remarquer que le second membre est nul pour $y \in V$. □

1.2 Équation d'état

Nous allons établir des résultats d'existence, d'unicité pour l'équation d'état et obtenir des estimations a priori qui nous seront utiles pour la suite.

Définition 1.2.1. *Soit $u \in L^2(\Omega)$. Une fonction $y \in V$ est une solution faible de* (1.1) *si*

$$\nu\,(\nabla y, \nabla \phi) + b(y, y, \phi) = (u, \phi) \qquad \textit{pour tout } \phi \in V.$$

Lemme 1.2.1. *(Voir le lemme 9.3.1 dans [3]) Soit $\mathbb{P}$ une fonction continue de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, dans lui-même telle que pour un certain $R > 0$*

$$\mathbb{P}\zeta \cdot \zeta > 0 \qquad \textit{pour tout } \zeta \in \mathbb{R}^m \textit{ tel que } |\zeta| = R.$$

Alors, il existe $\zeta_0 \in \mathbb{R}^m$, $|\zeta_0| \leq R$ tel que $\mathbb{P}\zeta_0 = 0$.

Théorème 1.2.2. *Soit $u \in L^2(\Omega)$. Alors le problème* (1.1) *admet au moins une solution faible $y_u \in V$ et l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\nabla y_u\|_2 \leq C_P \tfrac{\|u\|_2}{\nu}, \tag{1.4}$$

où C_P est la constante de Poincaré.

Preuve. La solution correspondante est construite grâce à la méthode de Galerkin, en utilisant un développement dans une base appropriée. Suivant [8], il existe un ensemble de fonctions propres $(\omega_j)_j \subset V \cap H^2(\Omega)$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta\omega_j + \nabla p_j = \lambda_j \omega_j & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \omega_j = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \omega_j = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.5}$$

Ces fonctions forment une base pour V et une base orthonormée pour H. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous notons V_m l'espace vectoriel engendré par les m premières fonctions propres $(\omega_j)_{1,\cdots,m}$. Le problème approché est défini par

$$\begin{cases} \text{Chercher } y_m = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \zeta_{im}\omega_i \text{ solution de} \\ \nu\,(\nabla y_m, \nabla \omega_j) + b\,(y_m, y_m, \omega_j) = (u, \omega_j) \qquad 1 \leq j \leq m. \end{cases} \tag{1.6}$$

Nous divisons la démonstration en deux étapes.

Étape 1. Solvabilité et estimation a priori. Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé et considérons l'application $\mathbb{P} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$\mathbb{P}(\zeta)_j = \nu\left(\nabla y_m, \nabla \omega_j\right) + b\left(y_m, y_m, \omega_j\right) - \left(u, \omega_j\right) \qquad 1 \leq j \leq m,$$

où $y_m = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \zeta_{im}\omega_i$. Il est clair que $\mathbb{P}$ est continue. Prouvons alors que $\mathbb{P}(\zeta) \cdot \zeta > 0$ si $|\zeta|$ est suffisamment grand. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\zeta) \cdot \zeta &= \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(\zeta)_j \zeta_{jm} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\nu\left(\nabla y_m, \nabla \omega_j\right) + b\left(y_m, y_m, \omega_j\right) - \left(u, \omega_j\right)\right) \zeta_{jm} \\
&= \nu\left(\nabla y_m, \nabla\left(\sum_{j=1}^{m} \zeta_{jm}\omega_j\right)\right) + b\left(y_m, y_m, \sum_{j=1}^{m} \zeta_{jm}\omega_j\right) - \left(u, \sum_{j=1}^{m} \zeta_{jm}\omega_j\right) \\
&= \nu \left\|\nabla y_m\right\|_2^2 + b\left(y_m, y_m, y_m\right) - \left(u, y_m\right) \\
&= \nu \left\|\nabla y_m\right\|_2^2 - \left(u, y_m\right).
\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Hölder et de Poincaré, et le fait que

$$\left\|y_m\right\|_2^2 = \left\|\sum_{i=1}^{m} \zeta_{im}\omega_i\right\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \zeta_{im}\zeta_{jm}\left(\omega_i, \omega_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \zeta_{im}\zeta_{im} = |\zeta|^2$$

il vient que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\zeta) \cdot \zeta &\geq \nu \left\|\nabla y_m\right\|_2^2 - \|u\|_2 \left\|y_m\right\|_2 \\
&\geq \tfrac{\nu}{C_P^2} \left\|y_m\right\|_2^2 - \|u\|_2 \left\|y_m\right\|_2 \\
&= \left\|y_m\right\|_2 \left(\tfrac{\nu}{C_P^2} \left\|y_m\right\|_2 - \|u\|_2\right) \\
&= |\zeta| \left(\tfrac{\nu}{C_P^2} |\zeta| - \|u\|_2\right) \\
&\longrightarrow +\infty \qquad \text{quand } |\zeta| \to +\infty.
\end{aligned}$$

Ceci implique qu'il existe une constante positive R tel que $\mathbb{P}(\zeta)\cdot\zeta > 0$ pour tout $\zeta \in \partial B(0, R)$ et, d'après le lemme 1.2.1, il existe $\zeta_m^0 \in \mathbb{R}^m$, $|\zeta_m^0| \leq R$ tel que $\mathbb{P}\zeta_m^0 = 0$. La fonction $y_m = \sum_{i=1}^{m} \zeta_{im}^0\, \omega_i$ satisfait donc

$$\nu\left(\nabla y_m, \nabla \omega_j\right) + b\left(y_m, y_m, \omega_j\right) - \left(u, \omega_j\right) = 0$$

pour tout $1 \leq j \leq m$. Autrement dit, y_m est solution du problème (1.6).

Multipliant alors (1.6) par ζ_{im}^0 et sommant, nous obtenons

$$\nu \left\|\nabla y_m\right\|_2^2 = (u, y_m) - b\left(y_m, y_m, y_m\right) = (u, y_m).$$

Utilisant l'inégalité de Hölder et de Poincaré, on obtient

$$\nu \left\|\nabla y_m\right\|_2^2 \leq \|u\|_2 \left\|y_m\right\|_2 \leq C_P \|u\|_2 \left\|\nabla y_m\right\|_2$$

et donc

$$\left\|\nabla y_m\right\|_2 \leq \tfrac{C_P}{\nu} \|u\|_2. \tag{1.7}$$

Étape 2. Passage à la limite. Prenant en compte l'estimation uniforme (1.7), il vient qu'il existe une sous-suite, indexée par m pour simplifier, et $y \in V$ tel que

$$y_m \longrightarrow y \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Prenant en compte l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$, nous en déduisons que

$$y_m \longrightarrow y \quad \text{fortement dans } L^4(\Omega).$$

Considérons le terme convectif. Des arguments classiques montrent que

$$\begin{aligned}
\left|b\left(y_m, y_m, \omega_j\right) - b\left(y, y, \omega_j\right)\right| &\leq \left|b\left(y_m - y, y_m, \omega_j\right)\right| + \left|b\left(y, y_m - y, \omega_j\right)\right| \\
&= \left|b\left(y_m - y, y_m, \omega_j\right)\right| + \left|-b\left(y, \omega_j, y_m - y\right)\right| \\
&\leq \left(\left\|\nabla y_m\right\|_2 \left\|\omega_j\right\|_4 + \|y\|_4 \left\|\nabla \omega_j\right\|_2\right) \left\|y_m - y\right\|_4.
\end{aligned}$$

Prenant en compte (1.7) et les résultats de convergence précédemment établis, nous déduisons que

$$\lim_{m \to +\infty} b\left(y_m, y_m, \omega_j\right) = b\left(y, y, \omega_j\right).$$

Passant alors à la limite dans (1.6), il vient que y satisfait

$$\nu\left(\nabla y, \nabla \omega_j\right) + b\left(y, y, \omega_j\right) = \left(u, \omega_j\right)$$

et par densité

$$\nu\left(\nabla y, \nabla \phi\right) + b\left(y, y, \phi\right) = (u, \phi) \qquad \forall \phi \in V.$$

Autrement dit, y est une solution faible de (1.1). $\square$

Si l'existence d'une solution faible de l'équation d'état (1.1) est garantie, l'unicité de cette solution ne peut-être obtenue que si l'on impose des restrictions sur la taille de la variable contrôle. Plus précisemment, nous avons le reśultat suivant.

Proposition 1.2.3. *Soit $u \in L^2(\Omega)$. Il existe une constante κ_1, dépendant de d et de Ω uniquement, tel que si*

$$\tfrac{\kappa_1}{\nu^2} \|u\|_2 < 1, \tag{1.8}$$

alors (1.1) *admet une solution faible unique.*

Preuve. Supposons que (1.1) admet deux solutions y_1, y_2 et posons $y = y_1 - y_2$. Il est facile de voir que y satisfait

$$\nu (\nabla y, \nabla \phi) + b(y, y_1, \phi) + b(y_2, y, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in V.$$

En choisissant $\phi = y$ on obtient

$$\nu \|\nabla y\|_2^2 = -b(y, y_1, y) - b(y_2, y, y) = -b(y, y_1, y)$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Sobolev et l'estimation (1.4), il vient que

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla y\|_2^2 &\leq \|\nabla y_1\|_2 \|y\|_4^2 \leq C_S^2 \|\nabla y_1\|_2 \|\nabla y\|_2^2 \\ &\leq \tfrac{\kappa_1}{\nu} \|u\|_2 \|\nabla y\|_2^2, \end{aligned}$$

où $\kappa_1 = C_P C_S^2$, C_S étant la constante d'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$. Par conséquent, si

$$\nu - \tfrac{\kappa_1}{\nu} \|u\|_2 > 0,$$

alors nous avons nécessairement que $\|\nabla y\|_2 = 0$. Utilisant l'inégalité de Poincaré, il vient que $\|y\|_2 = 0$. Donc $y = 0$, i.e. $y_1 = y_2$. □

1.3 Existence d'un contrôle optimal

Théorème 1.3.1. *Supposons que U_{ad} est borné dans $L^2(\Omega)$ où que $\lambda > 0$. Alors le problème de contrôle optimal (P) admet au moins une solution.*

Preuve. Soit $(u_k, y_k)_k \subset U_{ad} \times V$ une suite minimisante. Comme $(u_k)_k$ est uniformément bornée dans l'ensemble convexe fermé U_{ad}, il existe $u \in U_{ad}$ et une sous-suite, que l'on indexera par k pour simplifier, qui converge vers u pour la topologie faible de $L^2(\Omega)$. De l'autre côté, prenant en compte le théorème 1.2.2, nous obtenons

$$\|\nabla y_k\| \leq C_P \tfrac{\|u_k\|_2}{\nu},$$

et donc $(y_k)_k$ est uniformément bornée dans V. Il existe $y \in V$ et une sous-suite, que l'on indexera par k pour simplifier, qui converge vers y pour la topologie faible de V. Utilisant les résultats de compacité dans les espaces de Sobolev, nous déduisons que $(y_k)_k$ converge fortement vers y dans $L^4(\Omega)$. Il vient alors que pour tout $\phi \in V$, on a

$$\begin{aligned}
|b(y_k, y_k, \phi) - b(y, y, \phi)| &\leq |b(y_k - y, y_k, \phi)| + |b(y, y_k - y, \phi)| \\
&= |b(y_k - y, y_k, \phi)| + |b(y, \phi, y_k - y)| \\
&\leq (\|\nabla y_k\|_2 \|\phi\|_4 + \|y\|_4 \|\nabla \phi\|_2) \|y_k - y\|_4 \\
&\longrightarrow 0 \qquad \text{quand } k \to +\infty.
\end{aligned}$$

Prenant en compte ces résultats de convergence et passant à la limite dans la formulation variationnelle correspondante à y_k

$$\nu(\nabla y_k, \nabla \phi) + b(y_k, y_k, \phi) = (u_k, \phi) \qquad \forall \phi \in V,$$

on obtient

$$\nu(\nabla y, \nabla \phi) + b(y, y, \phi) = (u, \phi) \qquad \forall \phi \in V$$

autrement dit (u, y) satisfait (1.1). Grâce à la continuité et à la convexité de J, nous déduisons que J est semi continue inférieurement pour la topologie faible et

$$J(u, y) \leq \liminf_k J(u_k, y_k) = \inf(P).$$

Ceci montre que (u, y) est une solution de (P). $\square$

1.4 Équation linéarisée

Afin d'établir les conditions d'optimalité, nous avons besoin d'analyser l'équation linéaire suivante

$$\begin{cases}
-\nu \Delta z + (z \cdot \nabla) y_u + (y_u \cdot \nabla) z + \nabla p = w & \text{dans } \Omega, \\
\nabla \cdot z = 0 & \text{dans } \Omega, \\
z = 0 & \text{sur } \Gamma,
\end{cases} \tag{1.9}$$

où $u \in L^2(\Omega)$, $y_u \in V$ étant une solution faible de (1.1) et $w \in L^2(\Omega)$.

Définition 1.4.1. *Soit $w \in L^2(\Omega)$. Une fonction $z \in V$ est solution faible de* (1.9) *si*

$$\nu(\nabla z, \nabla \phi) + b(z, y_u, \phi) + b(y_u, z, \phi) = (w, \phi) \quad \forall\, \phi \in V.$$

Proposition 1.4.1. *Soit $u \in L^2(\Omega)$ satisfaisant (1.8) et soit $y_u \in V$ l'unique solution faible de (1.1) correspondante à u. Pour $w \in L^2(\Omega)$, le problème (1.9) admet une solution unique $z_{uw} \in V$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\nabla z_{uw}\|_2 \leq \mathcal{L}\left(\|u\|_2\right)\|w\|_2,$$

où $\mathcal{L}$ est définie par $\mathcal{L}(t) = \frac{C_P \nu}{\nu^2 - \kappa_1 t}$.

Preuve. Considérons la forme bilinéaire définie par

$$B(z_1, z_2) = \nu\left(\nabla z_1, \nabla z_2\right) + b\left(z_1, y_u, z_2\right) + b\left(y_u, z_1, z_2\right).$$

Prenant en compte le lemme 1.1.4, on a

$$\begin{aligned} B(z, z) &= \nu\|\nabla z\|_2^2 + b\left(z, y_u, z\right) + b\left(y_u, z, z\right) \\ &= \nu\|\nabla z\|_2^2 + b\left(z, y_u, z\right) \qquad \forall z \in V. \end{aligned}$$

De l'autre côté, en utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Sobolev et en prenant en compte l'estimation (1.4), on obtient

$$\left|b\left(z, y_u, z\right)\right| \leq \|\nabla y_u\|_2\|z\|_4^2 \leq C_S^2\|\nabla y_u\|_2\|\nabla z\|_2^2 \leq \frac{\kappa_1}{\nu}\|u\|_2\|\nabla z\|_2^2.$$

Il vient alors que

$$B(z, z) \geq \left(\nu - \kappa_1 \frac{\|u\|_2}{\nu}\right)\|\nabla z\|_2^2 \tag{1.10}$$

et B est coercive sur V car u satisfait (1.8). Prouvons maintenant la continuité de B. Des arguments similaires montrent que

$$\begin{aligned} \left|b\left(z_1, y_u, z_2\right) + b\left(y_u, z_1, z_2\right)\right| &\leq \|z_1\|_4\|\nabla y_u\|_2\|z_2\|_4 + \|y_u\|_4\|\nabla z_1\|_2\|z_2\|_4 \\ &\leq 2C_S^2\|\nabla z_1\|_2\|\nabla y_u\|_2\|\nabla z_2\|_2 \\ &\leq 2\kappa_1\frac{\|u\|_2}{\nu}\|\nabla z_1\|_2\|\nabla z_2\|_2 \\ &\leq 2\nu\|\nabla z_1\|_2\|\nabla z_2\|_2 \qquad \forall z_1, z_2 \in V. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left|B\left(z_1, z_2\right)\right| \leq 3\nu\|\nabla z_1\|_2\|\nabla z_2\|_2.$$

La forme bilinéaire B étant continue et coercive sur $V \times V$, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, nous déduisons que le problème (1.9) admet une solution unique z_{uw} dans V. Prenant en compte (1.10), on obtient

$$\begin{aligned} \left(\nu - \kappa_1\frac{\|u\|_2}{\nu}\right)\|\nabla z_{uw}\|_2^2 &\leq B\left(z_{uw}, z_{uw}\right) = \left(w, z_{uw}\right) \\ &\leq C_P\|w\|_2\|\nabla z_{uw}\|_2 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

1.5 Continuité et dérivabilité de l'état par rapport au contrôle

Nous allons commencer par établir des résultats relatifs à la continuité lipschitzienne (locale) de l'application qui au contrôle associe l'état. Ces résultats seront utiles pour l'analyse ultérieure des conditions nécessaires d'optimalité.

Lemme 1.5.1. *Soient $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ avec u_2 vérifiant la restriction* (1.8), *et soient y_{u_1} et y_{u_2} les solutions faibles de* (1.1) *correspondantes. Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\nabla (y_{u_1} - y_{u_2})\|_2 \leq \mathcal{L}(\|u_2\|_2) \|u_1 - u_2\|_2 ,$$

où $\mathcal{L}$ est définie dans la proposition 1.4.1.

Preuve. Notons y et u les différences $y_{u_1} - y_{u_2}$ et $u_1 - u_2$. Prenant en compte la formulation variationnelle de (1.1) pour u_1 et u_2, il vient que

$$\nu (\nabla y, \nabla \phi) + b(y_{u_1}, y_{u_1}, \phi) - b(y_{u_2}, y_{u_2}, \phi) = (u, \phi) \qquad \forall \phi \in V.$$

Choisissant $\phi = y$, et utilisant le lemme 1.1.4, on obtient

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla y\|_2^2 &= (u, y) - b(y_{u_1}, y_{u_1}, y) + b(y_{u_2}, y_{u_2}, y) \\ &= (u, y) - b(y, y_{u_2}, y). \end{aligned}$$

Comme

$$|(u, y)| \leq \|u\|_2 \|y\|_2 \leq C_P \|u\|_2 \|\nabla y\|_2$$

et

$$|b(y, y_{u_2}, y)| \leq \|\nabla y_{u_2}\|_2 \|y\|_4^2 \leq \tfrac{C_P}{\nu} \|u_2\|_2 \|y\|_4^2 \leq \tfrac{\kappa_1}{\nu} \|u_2\|_2 \|\nabla y\|_2^2$$

nous déduisons que

$$\left(\nu - \kappa_1 \tfrac{\|u_2\|_2}{\nu}\right) \|\nabla y\|_2 \leq C_P \|u\|_2 .$$

Ceci complète la preuve. □

À présent, nous nous intéressons à la dérivabilité de l'état par rapport au contrôle. Pour u, w dans $L^2(\Omega)$ et $\rho \in]0,1[$ soit $u_\rho = u + \rho w$. Soit y_u la solution unique de (1.1) correspondant à u et soit y_{u_ρ} la solution unique de (1.1) correspondant à u_ρ. Dans le reste de la section, et afin de simplifier la notation, nous utiliserons y_ρ au lieu de y_{u_ρ}. Posons $z_\rho = \frac{y_\rho - y_u}{\rho}$. Substituant dans la formulation faible correspondante, il vient que

$$\nu\left(\nabla z_\rho, \nabla \phi\right) + b\left(z_\rho, y_u, \phi\right) + b\left(y_\rho, z_\rho, \phi\right) = (w, \phi) \tag{1.11}$$

pour tout $\phi \in V$.

Proposition 1.5.2. *Soient $u, w \in L^2(\Omega)$ avec u vérifiant la restriction* (1.8). *Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\left\|\nabla z_\rho\right\|_2 \leq \mathcal{L}\left(\|u\|_2\right)\|w\|_2,$$

où $\mathcal{L}$ est définie dans la proposition 1.4.1.

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition 1.4.1. □

Proposition 1.5.3. *Soient $u, w \in L^2(\Omega)$ avec u vérifiant la restriction* (1.8) *et soit z la solution de (1.9) correspondant à $y = y_u$ et w. Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\left\|\nabla\left(z_\rho - z\right)\right\|_2 \leq C\rho,$$

où C dépend uniquement de Ω, ν, n, $\|u\|_2$ et $\|w\|_2$.

Preuve. Prenant en compte (1.11) et la formulation faible correspondante à z, on peut voir que $\chi_\rho = z_\rho - z$ satisfait

$$\nu\left(\nabla \chi_\rho, \nabla \phi\right) + b\left(\chi_\rho, y_u, \phi\right) + b\left(y_\rho - y_u, z_\rho, \phi\right) + b\left(y_u, \chi_\rho, \phi\right) = 0 \quad \forall \phi \in V.$$

Choisissant $\phi = \chi_\rho$, il vient que

$$\nu\left\|\nabla \chi_\rho\right\|_2^2 = -b\left(\chi_\rho, y_u, \chi_\rho\right) - b\left(y_\rho - y_u, z_\rho, \chi_\rho\right).$$

Grâce au théorème 1.2.2 et à la proposition 1.4.1, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|b\left(\chi_\rho, y_u, \chi_\rho\right) + b\left(y_\rho - y_u, z_\rho, \chi_\rho\right)\right| &\leq \left\|\chi_\rho\right\|_4^2\left\|\nabla y_u\right\|_2 + \left\|y_\rho - y_u\right\|_4\left\|\nabla z_\rho\right\|_2\left\|\chi_\rho\right\|_4 \\
&\leq \kappa_1 \tfrac{\|u\|_2}{\nu}\left\|\nabla \chi_\rho\right\|_2^2 + C_S^2\,\mathcal{L}\left(\|u\|_2\right)\left\|\nabla\left(y_\rho - y_u\right)\right\|_2\left\|\nabla \chi_\rho\right\|_2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il vient que

$$\left(\nu - \kappa_1 \tfrac{\|u\|_2}{\nu}\right)\left\|\nabla \chi_\rho\right\|_2 \leq C_S^2\,\mathcal{L}\left(\|u\|_2\right)\left\|\nabla\left(y_\rho - y_u\right)\right\|_2$$

et grâce au lemme 1.5.1, on obtient finalement

$$\left(\nu - \kappa_1 \tfrac{\|u\|_2}{\nu}\right)\left\|\nabla \chi_\rho\right\|_2 \leq \left(C_S \mathcal{L}\left(\|u\|_2\right)\right)^2\|w\|_2\,\rho.$$

Ceci complète la preuve. □

1.6 Équation adjointe

Soit $u \in L^2(\Omega)$ satisfaisant (1.8) et soit $y_u \in V$ la solution faible de (1.1) correspondant à u. Nous sommes intéressés par la solvabilité du système adjoint

$$\begin{cases} -\nu\Delta\psi + (\nabla y_u)^\top \psi - (y_u \cdot \nabla)\,\psi + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \psi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.12}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

Définition 1.6.1. *Une fonction $\psi \in V$ est une solution faible de* (1.12) *si*

$$\nu\,(\nabla\psi, \nabla\phi) + b\,(\phi, y_u, \psi) + b\,(y_u, \phi, \psi) = (f, \phi) \quad \forall\ \phi \in V.$$

Proposition 1.6.1. *Soit $u \in L^2(\Omega)$ satisfaisant (1.8) et soit $y_u \in V$ la solution faible de* (1.1) *correspondant à u. Pour $f \in L^2(\Omega)$, le problème* (1.12) *admet une solution unique $\psi \in V$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\nabla\psi\|_2 \leq \mathcal{L}\,(\|u\|_2)\,\|f\|_2\,,$$

où $\mathcal{L}$ est définie dans la Proposition 1.4.1.

Preuve. L'existence et l'unicité d'une solution, ainsi que l'estimation a priori, peuvent être obtenues par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de la proposition 1.4.1. □

1.7 Conditions nécessaires d'optimalité

Le résultat principal de ce chapitre sera énoncé et démontré dans cette section.

Théorème 1.7.1. *Soit $(\bar{u}, \bar{y})$ une solution de (P) un contrôle optimal avec $\bar{u}$ satisfaisant (1.8). Alors il existe $\bar{\psi} \in V$, solution faible du problème suivant*

$$\begin{cases} -\nu\Delta\bar{\psi} + (\nabla\bar{y})^\top \bar{\psi} - (\bar{y} \cdot \nabla)\,\bar{\psi} + \nabla p = \bar{y} - y_d & \textit{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \bar{\psi} = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \bar{\psi} = 0 & \textit{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.13}$$

tel que

$$\left(\bar{\psi} + \lambda\bar{u}, v - \bar{u}\right) \geq 0 \qquad \textit{pour tout } v \in U_{ad}. \tag{1.14}$$

Preuve. Pour $\rho \in]0,1[$ et $v \in U_{ad}$, soit $u_\rho = \bar{u} + \rho\,(v - \bar{u}) \in U_{ad}$, $y_\rho = y_{u_\rho}$ et $z_\rho = \frac{y_\rho - \bar{y}}{\rho}$. Il est clair que (u_ρ, y_ρ) est admissible pour (P) et donc on a

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{J(u_\rho,y_\rho)-J(\bar{u},\bar{y})}{\rho} \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}. \tag{1.15}$$

De l'autre côté, de simples calculs montrent que

$$\begin{aligned}
J(u_\rho, y_\rho) - J(\bar{u}, \bar{y}) &= \tfrac{1}{2}\|y_\rho - y_d\|_2^2 + \tfrac{\lambda}{2}\|u_\rho\|_2^2 - \tfrac{1}{2}\|\bar{y} - y_d\|_2^2 - \tfrac{\lambda}{2}\|\bar{u}\|_2^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\|(y_\rho - \bar{y}) + (\bar{y} - y_d)\|_2^2 + \tfrac{\lambda}{2}\|u_\rho - \bar{u} + \bar{u}\|_2^2 - \tfrac{1}{2}\|\bar{y} - y_d\|_2^2 - \tfrac{\lambda}{2}\|\bar{u}\|_2^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\|y_\rho - \bar{y}\|_2^2 + (y_\rho - \bar{y}, \bar{y} - y_d) + \tfrac{\lambda}{2}\|u_\rho - \bar{u}\|_2^2 + \lambda\,(u_\rho - \bar{u}, \bar{u})
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{J(u_\rho,y_\rho)-J(\bar{u},\bar{y})}{\rho} = (z_\rho, \bar{y} - y_d) + \lambda\,(v - \bar{u}, \bar{u}) + \tfrac{\rho}{2}\|z_\rho\|_2^2 + \tfrac{\rho\lambda}{2}\|v - \bar{u}\|_2^2. \tag{1.16}$$

Grâce à la proposition 1.5.2 et à l'inégalité de Poincaré, nous savons que la suite $(z_\rho)_\rho$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. D'autre part, grâce à la proposition 1.5.3, elle converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers $\bar{z}_v$, la solution de l'équation linéarisée suivante

$$\begin{cases}
-\nu\Delta z + z\cdot\nabla\bar{y} + \bar{y}\cdot\nabla z + \nabla p = v - \bar{u} & \text{dans } \Omega, \\
\nabla\cdot z = 0 & \text{dans } \Omega, \\
z = 0 & \text{sur } \Gamma.
\end{cases}$$

Prenant alors en compte (1.15) et passant à la limite dans (1.16), nous obtenons

$$(\bar{z}_v, \bar{y} - y_d) + \lambda\,(v - \bar{u}, \bar{u}) \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}. \tag{1.17}$$

Considérons maintenant l'équation adjointe (1.13). D'après la proposition 1.6.1, ce problème admet une solution faible unique $\bar{\psi} \in V$. Posant $\phi = \bar{\psi}$ dans la formulation variationnelle correspondant à $\bar{z}_v$, on obtient

$$\nu\left(\nabla\bar{z}_v, \nabla\bar{\psi}\right) + b\left(\bar{z}_v, \bar{y}, \bar{\psi}\right) + b\left(\bar{y}, \bar{z}_v, \bar{\psi}\right) = \left(v - \bar{u}, \bar{\psi}\right).$$

Choisissant alors $\phi = \bar{z}_v$ dans la formulation variationnelle correspondant à $\bar{\psi}$, on obtient

$$\nu\left(\nabla\bar{\psi}, \nabla\bar{z}_v\right) + b\left(\bar{z}_v, \bar{y}, \bar{\psi}\right) + b\left(\bar{y}, \bar{z}_v, \bar{\psi}\right) = (\bar{y} - y_d, \bar{z}_v).$$

Combinant les deux identités, nous déduisons que

$$\left(v - \bar{u}, \bar{\psi}\right) = (\bar{y} - y_d, \bar{z}_v).$$

La conclusion vient en substituant dans (1.17). □

CHAPITRE 2

CONTRÔLE OPTIMAL DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES INSTATIONNAIRES

Dans ce chapitre, nous établissons les conditions nécessaires d'optimalité pour un problème de contrôle optimal gouverné par un système décrivant l'écoulement instationnaire d'un fluide incompressible et donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + (y \cdot \nabla)\, y + \nabla p = u & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0,T), \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où p est la pression, u est la densité massique de forces extérieures, $\nu > 0$ est la viscosité du fluide, y_0 une condition initiale donnée, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné de frontière Γ, et $T > 0$ est un temps fixé. Nous notons I l'intervalle $(0,T)$, Q le cylindre espace-temps $\Omega \times I$ et $\Sigma = \Gamma \times I$.

L'objectif est de contrôler le système via une force mécanique conduisant la vitesse du fluide vers un état donné. Plus précisément, on considère le problème de contrôle optimal suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser} \quad J(u,y) = \frac{1}{2} \displaystyle\int_Q |y - y_d|^2 \, dxdt + \frac{\lambda}{2} \int_Q |u|^2 \, dxdt \\ u \in U_{ad} \text{ et } (u,y) \text{ satisfait (2.1),} \end{cases}$$

où $\lambda \geq 0$, $y_d \in L^2(Q)$ est un champs de vitesse voulu, l'ensemble des contrôles admissibles U_{ad} est convexe, fermé et non vide dans $L^2(Q)$ et $y_0 \in L^2(\Omega)$.

Même si les techniques utilisées pour l'analyse des équations aux dérivées partielles associées sont différentes, le plan de ce chapitre est similaire à celui du chapitre précédent. Dans la section 2.1, nous présentons les notations, précisons le cadre fonctionnel et rappelons certains résultats auxiliaires nécessaires. La section 2.2 est consacrée à l'analyse mathématique de l'équation d'état. L'existence d'une solution faible est établie en utilisant une méthode de Faedo-Galerkin appropriée. Contrairement au cas stationnaire (et au cas tridimensionnel instationnaire), l'unicité d'une solution faible peut être établie sans restriction sur le contrôle. Nous établissons aussi des résultats de régularité et montrons, sous des conditions de régularité naturelles des données, que la solution de l'équation d'état est en fait une solution forte. Cette propriété est fondamentale lors de l'analyse numérique de l'équation d'état et de l'équation adjointe associée, où lors de l'établissement des conditions suffisantes d'optimalité. Des estimations de stabilité lipschitzienne sont aussi établies dans cette section.

Une approche similaire est appliquée dans la section 2.3 pour étudier la solvabilité de l'équation linéarisée. La dérivabilité au sens de Gâteaux de l'application qui au contrôle associe l'état est analysée dans la section 2.4. Dans la section 2.5, un changement de variable approprié permet de passer d'un problème avec condition terminale à un problème avec condition initiale. L'équation adjointe est alors ramenée à une EDP aux propriétés similaires à celles de l'équation linéarisée. Finalement, les conditions nécessaires d'optimalité sont établies dans la section 2.6.

2.1 Notations et cadre fonctionnel

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert, nous noterons $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathcal{O}$ à support compact. Afin d'éliminer la pression dans la formulation faible du problème étudié, nous considérons les espaces des champs de vitesse à divergence nulle H et V définis dans le Chapitre 1. L'espace H est équippé du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ induit par $L^2(\Omega)$. Le produit de dualité entre l'espace V et son espace dual V' est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nous rappelons que H, V et V' forment un tripet de Gelfand

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$$

i.e. l'espace de Hilbert H est identifié avec son dual H', V étant dense dans H avec injection continue. Une conséquence des identifications précédentes est que

$$\langle u, v\rangle = (u, v)\,, \qquad u \in H, v \in V. \tag{2.2}$$

On notera $L^2(I;X)$ l'espace des fonctions de carré intégrable définies de I dans X et muni de la norme

$$\|v\|_{L^2(I;X)} = \left(\int_I \|v(t)\|_X^2 \; dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De même, $L^\infty(I;X)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées définies de I dans X et est muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(I;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\bar{I}} \|v(t)\|_X\,.$$

L'espace $C(\bar{I};X)$ des fonctions continues de $\bar{I} = [0,T]$ dans X est muni de la norme

$$\|v\|_{C(\bar{I};X)} = \sup_{t\in\bar{I}} \|v(t)\|_X\,.$$

Afin de gérer les dérivées par rapport au temps, on considère l'espace

$$W(I) = \left\{v \in L^2(I;V) \mid \tfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(I;V')\right\}$$

muni de la norme $\|v\|_{W(I)} = \|v\|_{L^2(I;V)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(I;V')}$. Il est bien connu que $W(I)$ est un espace réflexif et qu'il satisfait les propriétés énoncées ci-dessous.

Lemme 2.1.1. *L'espace $W(I)$ s'injecte continûment dans $C(\bar{I};H)$ et on a la formule d'intégration par parties suivante*

$$\int_0^t \left\langle \tfrac{\partial u(s)}{\partial t}, v(s)\right\rangle ds + \int_0^t \left\langle \tfrac{\partial v(s)}{\partial t}, u(s)\right\rangle ds = (u(t), v(t)) - (u(0), v(0)) \tag{2.3}$$

pour tout $u, v \in W(I)$, $t \in \bar{I}$. En particulier, on a

$$\int_0^t \left\langle \tfrac{\partial u(s)}{\partial t}, u(s)\right\rangle ds = \tfrac{1}{2}\left(\|u(t)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2\right) = \tfrac{1}{2}\int_0^t \tfrac{d}{dt}\|u(s)\|_H^2 \; ds \tag{2.4}$$

pour tout $u \in W(I)$ et $t \in \bar{I}$.

Preuve. Voir le lemme 1.2, p. 261 dans [8].

De plus, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.1.2. *Soient u et g sont deux fonctions dans $L^1(I;V)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

- *Pour toute fonction* $\psi \in \mathcal{D}(I)$, *on a*

$$\int_I u(t)\psi'(t)\,dt = -\int_I g(t)\psi(t)\,dt.$$

- *Pour tout* $w \in V'$, *on a*

$$\tfrac{d}{dt}\langle u, w\rangle = \langle g, w\rangle$$

dans le sens des distributions.

Preuve. Voir le lemme 1.1, p. 250 dans [8]. □

En plus des inégalités classiques déjà énoncées au Chapitre 1, nous aurons besoin de l'inégalité d'interpolation donnée ci-dessous. Valable seulement en dimension 2, elle permet de garantir l'unicité de la solution faible pour le problème de Navier-Stokes et joue un rôle primordial dans l'analyse de la régularité de cette solution.

Lemme 2.1.3 (Inégalité d'interpolation). *On a*

$$\|v\|_4 \leq 2^{\frac{1}{4}}\, \|v\|_2^{\frac{1}{2}}\, \|\nabla v\|_2^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Nous énonçons maintenant des résultats utiles pour l'analyse de la régularité de la solution faible. Soit $\mathbb{P} : L^2(\Omega) \longrightarrow H$ l'opérateur de projection de Helmholtz et posons $\mathbb{A} = -\mathbb{P}\Delta$. Il est bien connu que $\mathbb{P}$ est un opérateur linéaire et borné et qu'il est caractérisé par l'égalité $\mathbb{P}v = \tilde{v}$, où $\tilde{v}$ est donné par la décomposition de Helmholtz

$$v = \tilde{v} + \nabla\psi, \qquad \tilde{v} \in H \quad \text{et} \quad \psi \in H^1(\Omega).$$

Lemme 2.1.4. *Soit* $v \in V \cap H^2(\Omega)$. *Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|v\|_{H^2} \leq C\, \|\mathbb{A}v\|_2\,.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $v \in H^2 \cap V$ est solution du problème de Stokes suivant

$$\begin{cases} -\Delta w + \nabla p = \mathbb{A}v & \text{dans } \Omega, \\ div\ w = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

L'estimation est alors une conséquence directe des résultats de régularité classiques. □

Nous terminons cette section en rappelant le lemme de Gronwall.

Lemme 2.1.5. *Soit η une fonction positive absolument continue sur $\bar{I}$ telle que*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \quad p.p\, t \in I,$$

où ϕ et ψ sont des fonctions positives intégrables sur I. Alors

$$\eta(t) \leq \exp\left(\int_0^t \phi(s)ds\right)\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right), \qquad t \in I.$$

2.2 Équation d'état

2.2.1 Existence, unicité et régularité

L'analyse du problème de contrôle optimal nécessite une étude approfondie de la solvabilité de l'équation d'état. Des résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions faibles correspondantes feront l'objet de cette section.

Il convient de rappeler d'abord que les notions de "solution forte" et "solution faible" pour les équations aux dérivées partielles instationnaires peuvent inclure des concepts différents, dépendants du contexte (en particulier de la régularité des données), et que des définitions précises sont donc nécessaires.

Considérons par exemple le cas où $y_0 \in H$ et $u \in L^2(I; V')$. Une fonction $y \in W(I)$ est une solution faible de (2.1) si

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(y(t), \phi\right) + \nu\left(\nabla y(t), \nabla\phi\right) + b\left(y(t), y(t), \phi\right) = \left(u(t), \phi\right), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

est satisfait presque partout dans I et pour tout $\phi \in V$. Remarquons qu'au vu du Lemme 2.1.1, la condition initiale $y(0) = y_0 \in H$ a un sens. Les résultats concernant l'existence et l'unicité d'une solution faible y sont classiques. Ceci fera l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.2.1. *Soient $y_0 \in H$ et $u \in L^2(Q)$. Alors le problème (2.1) admet une solution faible unique. De plus, les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\|y\|_{L^\infty(I;H)} \leq \left(\|y_0\|_2 + \tfrac{C}{\sqrt{\nu}}\|u\|_{2,Q}\right), \tag{2.6}$$

$$\|\nabla y\|_{2,Q} \leq \tfrac{1}{\sqrt{\nu}}\left(\|y_0\|_2 + \tfrac{C}{\sqrt{\nu}}\|u\|_{2,Q}\right), \tag{2.7}$$

où C est une constante dépendant de Ω.

Preuve. La solution correspondante est construite grâce à la méthode de Faedo-Galerkin, en utilisant un développement dans la base définie par (1.5) considérée au Chapitre 1. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous notons V_m l'espace vectoriel engendré par les m premières fonctions propres $(\omega_j)_{1,\cdots,m}$ et P_m l'opérateur de projection orthogonale de H sur V_m. Le problème approché est défini par

$$\begin{cases} \text{Chercher } y_m(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\omega_i \text{ solution, pour } 1 \le j \le m, \text{ de} \\ \frac{d}{dt}\left(y_m(t), \omega_j\right) + \nu\left(\nabla y_m(t), \nabla\omega_j\right) + b\left(y_m(t), y_m(t), \omega_j\right) = \left(u(t), \omega_j\right), \\ y_m(0) = y_{0m} \end{cases} \tag{2.8}$$

où $y_{0m} = P_m y_0$. Il est alors clair que $(y_{0m})_m$ converge vers y_0 dans H et que $\|y_{0m}\|_2 \le \|y_0\|_2$.

Les fonctions g_{jm} sont des fonctions scalaires définies sur $\bar{I}$ et (2.8) est, relativement à ces fonctions, un système différentiel non-linéaire avec des coefficients constants et avec une condition initiale en $t = 0$. En effet, pour tout $j = 1, \cdots, m$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\omega_i, \omega_j\right) g'_{im}(t) + \nu\left(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j\right) g_{im}(t)\right) + \sum_{i,k=1}^{m} b\left(\omega_i, \omega_k, \omega_j\right) g_{im}(t) g_{km}(t) = \left(u(t), \omega_j\right)$$

ce qui donne le système non-linéaire suivant

$$\begin{cases} M g'_m(t) + N g_m(t) + B g_m(t) g_m(t) = F(t) \\ g_m(0) = y_{0m} \end{cases}$$

où, pour tout $1 \le i, j \le m$

$$M_{ij} = \left(\omega_i, \omega_j\right), \tag{2.9}$$

$$N_{ij} = \nu\left(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j\right), \tag{2.10}$$

$$\left(B(w)\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} w_k\, b(\omega_j, \omega_k, \omega_i),$$

$$F_j(t) = \left(u(t), \omega_j\right).$$

Comme les éléments $\omega_1, \cdots, \omega_m$ sont linéairement indépendants, la matrice M est inversible et le système précédent est réduit à

$$\begin{cases} g'_m(t) + M^{-1} N g_m(t) + M^{-1} A g_m(t) g_m(t) = M^{-1} F(t), \\ g_m(0) = y_{0m}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Le système différentiel (2.11) admet une solution sur un intervalle $[0, t_m]$. Si $t_m < T$, alors $\|y_m\|_2$ doit tendre vers l'infini quand t tend vers t_m. Les estimations a priori que nous allons montrer dans la suite impliquent que ce n'est pas le cas et, par conséquent, que y_m est défini sur tout l'intervalle $\bar{I}$.

Le reste de la preuve sera divisé en quatre parties. En premier lieu, nous établissons des estimations H^1 par rapport à la variable espace. Nous passons ensuite à la limite, démontrons l'unicité de la solution et établissons les estimations a priori.

Étape 1. Estimation a priori dans $L^\infty(I; H) \cap L^2(I; V)$. Multipliant (2.8) par g_{jm} et sommant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|y_m(t)\|_2^2\right) + \nu \|\nabla y_m(t)\|_2^2 &= (u(t), y_m(t)) - b\left(y_m(t), y_m(t), y_m(t)\right) \\ &= (u(t), y_m(t)) \leq \|u(t)\|_2 \|y_m(t)\|_2 \,. \end{aligned}$$

Utilisant alors l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Young, il vient que

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|y_m(t)\|_2^2\right) + \nu \|\nabla y_m(t)\|_2^2 \leq C\|u(t)\|_2 \|\nabla y_m(t)\|_2 \leq \tfrac{\nu}{2}\|\nabla y_m(t)\|_2^2 + \tfrac{c}{\nu}\|u(t)\|_2^2$$

et donc

$$\tfrac{d}{dt}\left(\|y_m(t)\|_2^2\right) + \nu \|\nabla y_m(t)\|_2^2 \leq \tfrac{c}{\nu}\|u(t)\|_2^2 \,.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et s $(0 < s < T)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|y_m(s)\|_2^2 &\leq \|y_m(0)\|_2^2 + \tfrac{c}{\nu}\int_0^s \|u(t)\|_2^2 \, dt \\ &\leq \|y_0\|_2^2 + \tfrac{c}{\nu}\|u\|_{2,Q}^2 \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\sup_{s \in \bar{I}} \|y_m(s)\|_2^2 \leq \|y_0\|_2^2 + \tfrac{c}{\nu}\|u\|_{2,Q}^2 \,. \tag{2.12}$$

De manière similaire, en intégrant entre 0 et T, on obtient

$$\|y_m(T)\|_2^2 + \nu \|\nabla y_m\|_{2,Q}^2 \leq \|y_0\|_2^2 + \tfrac{c}{\nu}\|u\|_{2,Q}^2 \,. \tag{2.13}$$

La suite $(y_m)_m$ est, par conséquent, uniformément bornée dans $L^\infty(I; H) \cap L^2(I; V)$.

Étape 2. Passage à la limite. D'après les étapes précédentes, la suite $(y_m)_m$ est bornée dans $L^\infty(I; H) \cap L^2(I; V)$. Il existe alors une sous-suite, encore indexée par m, une fonction $y \in L^\infty(I; H)$ et une fonction $y^* \in L^2(I; V)$ tel que

$$\lim_{m \to \infty} y_m = y \qquad \text{faible}^* \text{ dans } L^\infty(I; V), \tag{2.14}$$

$$\lim_{m\to\infty} y_m = y^* \qquad \text{faiblement dans } L^2(I;H^2(\Omega)). \tag{2.15}$$

De (2.14) et (2.15), nous déduisons en particulier que

$$\lim_{m\to+\infty} \int_I (y_m(t),\varphi(t))\ dt = \int_I (y(t),\varphi(t))\ dt$$

et

$$\lim_{m\to+\infty} \int_I (y_m(t),\varphi(t))\ dt = \int_I (y^*(t),\varphi(t))\ dt$$

pour tout $\varphi \in L^2(I;H)$ et donc $y \equiv y^* \in L^\infty(I;V) \cap L^2(I;H^2(\Omega))$.

• Des arguments classiques montrent que pour tout $\phi \in V$

$$|b\,(y_m(t),y_m(t),\phi) - b\,(y(t),y(t),\phi)|$$

$$= |b\,(y_m(t),y_m(t)-y(t),\phi) + b\,(y_m(t)-y(t),y(t),\phi)|$$

$$= |-b\,(y_m(t),\phi,y_m(t)-y(t)) + b\,(y_m(t)-y(t),y(t),\phi)|$$

$$\le (\|y_m(t)\|_4 \|y_m(t)-y(t)\|_4 \|\nabla\phi\|_2 + \|y_m(t)-y(t)\|_4 \|\nabla y(t)\|_2) \|\phi\|_4$$

$$\le C\,(\|\nabla y_m(t)\|_2 + \|\nabla y(t)\|_2) \|y_m(t)-y(t)\|_4 \|\phi\|_{H^1}.$$

L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$ étant compacte, grâce à (2.15) et (2.12), il vient que pour tout $\psi \in \mathcal{D}(I)$ on a

$$\left| \int_I (b\,(y_m(t),y_m(t),\phi) - b\,(y(t),y(t),\phi))\,\psi(t)\,dt \right|$$

$$\le C\left(\|\nabla y_m\|_{2,Q} + \|\nabla y\|_{2,Q}\right) \|y_m - y\|_{L^2(I;L^4)} \|\phi\|_{H^1} \|\psi\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{quand } m \to +\infty.$$

• Remarquons alors que (2.8) implique que

$$-\int_I (y_m(t),\omega_j)\,\psi'(t)\,dt + \int_I (\nu\,(\nabla y_m(t),\nabla\omega_j) + b(y_m(t),y_m(t),\omega_j))\,\psi(t)\,dt$$

$$= \int_I (u(t),\omega_j)\,\psi(t)\,dt + (y_{0m},\omega_j)\,\psi(0) \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}(-\infty,T).$$

Prenant en compte les résultats de convergence précédents et passant à la limite, nous obtenons

$$-\int_I (y(t),\omega_j)\,\psi'(t)\,dt + \int_I (\nu\,(\nabla y(t),\nabla\omega_j) + b(y(t),y(t),\omega_j))\,\psi(t)\,dt$$

$$= \int_I (u(t),\omega_j)\,\psi(t)\,dt + (y_0,\omega_j)\,\psi(0) \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}(-\infty,T).$$

Arguant par densité, il vient que

$$-\int_I (y(t),\phi)\,\psi'(t)\,dt + \int_I (\nu\,(\nabla y(t),\nabla\phi) + b(y(t),y(t),\phi))\,\psi(t)\,dt$$

$$= \int_I (u(t),\phi)\,\psi(t)\,dt + (y_0,\phi)\,\psi(0) \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}(-\infty,T) \text{ et } \forall\phi \in V. \tag{2.16}$$

Choisissant $\psi \in \mathcal{D}(I)$, nous obtenons l'égalité suivante (prise dans le sens des distributions)

$$\tfrac{d}{dt}\,(y(t),\phi) + \nu\,(\nabla y(t),\nabla\phi) + b(y(t),y(t),\phi) = (u(t),\phi) \qquad \forall\phi \in V. \tag{2.17}$$

• Prouvons maintenant que $y(0) = y_0$. Multipliant l'identité précédente par $\psi \in \mathcal{D}(-\infty,T)$ et intégrant par parties, on obtient

$$\int_I (y(t),\phi)\,\psi'(t)\,dt + \int_I (\nu\,(\nabla y(t),\nabla\phi) + b(y(t),y(t),\phi))\,\psi(t)\,dt$$

$$= \int_I (u(t),\phi)\,\psi(t)\,dt + (y(0),\phi)\,.$$

Comparant avec (2.16), on obtient

$$(y(0) - y_0,\phi)\,\psi(0) = 0.$$

Choisissant ψ telle que $\psi(0) = 1$, il vient que $y(0) = y_0$.

• Reste à prouver que $\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(I;V')$. Soit $\mathcal{A}y$ la forme linéaire définie par

$$\langle \mathcal{A}y(t),\phi\rangle = (\nabla y(t),\nabla\phi) \qquad \forall\phi \in V.$$

Il est facile de voir que $\mathcal{A}y$ est une forme continue dans $L^2(I;V)$. De même, soit $\mathcal{B}y$ la forme linéaire définie par

$$\langle \mathcal{B}y(t),\phi\rangle = b\,(y(t),y(t),\phi) \qquad \forall\phi \in V.$$

Utilisant (2.5), pour tout $\varphi \in L^2(I;V)$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_I \langle \mathcal{B}y(t),\varphi(t)\rangle\,dt\right| &= \left|-\int_I b\,(y(t),\varphi(t),y(t))\right| \\
&\le \int_I \|y(t)\|_4^2\,\|\nabla\varphi(t)\|_2\,dt \\
&\le \sqrt{2}\int_I \|y(t)\|_2\,\|\nabla y(t)\|_2\,\|\nabla\varphi(t)\|_2\,dt \\
&\le C\,\|y\|_{L^\infty(I;H)}\,\|y\|_{L^2(I;V)}\,\|\varphi\|_{L^2(I;V)}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\|\mathcal{B}y\|_{L^2(I;V')} = \sup_{\substack{\varphi\in L^2(I;V) \\ \|\varphi\|_{L^2(I;V)}\leq 1}} \left| \int_I \langle \mathcal{B}y(t), \varphi(t)\rangle \, dt \right| \leq C \|y\|_{L^\infty(I;H)} \|y\|_{L^2(I;V)}$$

montrant ainsi que $By \in L^2(I;V')$. Vu que y satisfait (2.17), utilisant (2.2), on obtient

$$\langle y'(t), \phi\rangle = \langle u(t) - \nu\mathcal{A}y(t) - \mathcal{B}y(t), \phi\rangle \qquad \forall \phi \in V$$

et comme $u - \nu\mathcal{A}y - \mathcal{B}y \in L^2(I;V')$, d'après le lemme 2.1.2, on déduit que $\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(I;V')$.

Étape 3. Unicité. Soient y_1 et y_2 deux solutions faibles de (2.1). Alors $y = y_1 - y_2$ satisfait

$$\left(\tfrac{\partial y(t)}{\partial t}, \phi\right) + \nu\left(\nabla y(t), \nabla\phi\right) + b\left(y(t), y_1(t), \phi\right) + b\left(y_2(t), y(t), \phi\right) = 0 \qquad \forall \phi \in V.$$

En posant $\phi = y(t)$, et prenant en compte le lemme 2.1.2 et le lemme 1.1.4 on obtient

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|y(t)\|_2^2 + \nu\|\nabla y(t)\|_2^2 = -b\left(y(t), y_1(t), y(t)\right).$$

D'après l'inégalité (2.5) et l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} |2b\left(y(t), y_1(t), y(t)\right)| &\leq 2^{\frac{3}{2}}\|y(t)\|_2\|\nabla y_1(t)\|_2\|\nabla y(t)\|_2 \\ &\leq 2\nu\|\nabla y(t)\|_2^2 + \tfrac{1}{\nu}\|\nabla y_1(t)\|_2^2\|y(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\tfrac{d}{dt}\|y(t)\|_2^2 \leq \tfrac{1}{\nu}\|\nabla y_1(t)\|_2^2\|y(t)\|_2^2.$$

De simples calculs montrent que cette inégalité est équivalente à

$$\tfrac{d}{dt}\left(\exp\left(\tfrac{-1}{\nu}\int_0^t\|\nabla y_1(s)\|_2^2\, ds\right)\|y(t)\|_2^2\right) \leq 0.$$

Intégrant entre 0 et t, on obtient

$$\exp\left(\tfrac{-1}{\nu}\int_0^t\|\nabla y_1(s)\|_2^2\right)\|y(t)\|_2^2 \leq \|y(0)\|_2^2 = 0$$

et donc $\|y(t)\|_2 = 0$, i.e. $y_1 = y_2$.

Étape 4. Estimations a priori. Les estimations (2.6) et (2.7) sont une conséquence directe de (2.12) et (2.13). □

Il est connu que la régularité des données implique la régularité de la solution faible. Par exemple, si $y_0 \in V$ et $u \in L^2(Q)$, alors la solution est forte dans le sens que $y \in L^\infty(I;V) \cap L^2(I;H^2(\Omega))$, $\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(I;H)$ et

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t}, \phi\right) + \nu\left(\nabla y(t), \nabla \phi\right) + b\left(y(t), y(t), \phi\right) = \left(u(t), \phi\right), \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.18}$$

pour tout $\phi \in V$ et pour presque tout $t \in I$. Ce type de résultat est particulièrement intéressant pour l'analyse des conditions suffisantes d'optimalité ainsi que pour l'analyse numérique des EDP intervenant dans le problème de contrôle (i.e. équation d'état et équation adjointe).

Théorème 2.2.2. *Soient $y_0 \in V$ et $u \in L^2(Q)$. Alors le problème* (2.18) *admet une solution forte unique.*

Preuve. Nous considérons la base des valeurs propres définie dans la preuve du Théorème 2.2.1. Le problème approché est défini par

$$\begin{cases} \text{Chercher } y_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)\omega_i \text{ solution, pour } 1 \le j \le m, \text{ de} \\ \left(\frac{\partial y_m(t)}{\partial t}, \omega_j\right) + \nu\left(\nabla y_m(t), \nabla \omega_j\right) + b\left(y_m(t), y_m(t), \omega_j\right) = \left(u(t), \omega_j\right), \\ y_m(0) = y_{0m} \end{cases} \tag{2.19}$$

où $y_{0m} = P_m y_0$, P_m étant dans ce cas l'opérateur de projection orthogonale de V sur V_m. On a alors que $(y_{0m})_m$ converge vers y_0 dans V et que $\|y_{0m}\|_{H^1} \le \|y_0\|_{H^1}$. L'existence d'une solution approchée, ainsi que les estimations correspondantes dans $L^\infty(I;H) \cap L^2(I;V)$, est obtenue comme précédemment. Le reste de la preuve est divisé en trois étapes.

Étape 1. Estimation dans $L^\infty(I;V) \cap L^2(I;H^2(\Omega))$. Observons que

$$\left(\frac{\partial y_m(t)}{\partial t}, \lambda_j\omega_j\right) = \sum_{i=1}^m g'_{im}(t)\left(\omega_i, \lambda_j\omega_j\right) = \sum_{i=1}^m g'_{im}(t)\left(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla y_m(t), \nabla\omega_j\right).$$

De manière similaire, on a

$$\left(\nabla y_m(t), \lambda_j \nabla\omega_j\right) = -\left(\Delta y_m(t), \lambda_j\omega_j\right) = \left(\mathbb{A}y_m(t), \lambda_j\omega_j\right) = \left(\mathbb{A}y_m(t), \mathbb{A}\omega_j\right).$$

Multipliant (2.19) par λ_j, on obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla y_m(t), \nabla\omega_j\right) + \nu\left(\mathbb{A}y_m(t), \mathbb{A}\omega_j\right) + b\left(y_m(t), y_m(t), \mathbb{A}\omega_j\right) = \left(u(t), \mathbb{A}\omega_j\right)$$

et donc, en multipliant par $g_{jm}(t)$ et en sommant, il vient que

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\nabla y_m(t), \nabla y_m(t)\right) + \nu \left\|\mathbb{A}y_m(t)\right\|_2^2 + b\left(y_m(t), y_m(t), \mathbb{A}y_m(t)\right) = \left(u(t), \mathbb{A}y_m(t)\right).$$

Autrement dit

$$\tfrac{d}{dt}\left(\left\|\nabla y_m(t)\right\|_2^2\right) + 2\nu \left\|\mathbb{A}y_m(t)\right\|_2^2 = 2\left(u(t), \mathbb{A}y_m(t)\right) - 2b\left(y_m(t), y_m(t), \mathbb{A}y_m(t)\right). \tag{2.20}$$

Utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\left|2\left(u(t), \mathbb{A}y_m(t)\right)\right| \leq 2\|u(t)\|_2\|\mathbb{A}y_m(t)\|_2 \leq \tfrac{\nu}{2}\|\mathbb{A}y_m(t)\|_2^2 + \tfrac{2}{\nu}\|u(t)\|_2^2. \tag{2.21}$$

De manière similaire, en prenant en compte (2.5), on a

$$\begin{aligned}
|-2b(y_m(t), y_m(t), \mathbb{A}y_m(t))| &\leq 2\left\|y_m(t)\right\|_4 \left\|\nabla y_m(t)\right\|_4 \left\|\mathbb{A}y_m(t)\right\|_2 \\
&\leq C\left\|y_m(t)\right\|_2^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla y_m(t)\right\|_2 \left\|y_m(t)\right\|_{H^2}^{\frac{1}{2}} \left\|\mathbb{A}y_m(t)\right\|_2 \\
&= C\left\|y_m(t)\right\|_2^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla y_m(t)\right\|_2 \left\|\mathbb{A}y_m(t)\right\|_2^{\frac{3}{2}} \\
&\leq \tfrac{\nu}{2}\left\|\mathbb{A}y_m(t)\right\|_2^2 + \tfrac{C}{\nu^3}\left\|y_m(t)\right\|_2^2 \left\|\nabla y_m(t)\right\|_2^4.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Combinant (2.20)-(2.22), on obtient alors

$$\tfrac{d}{dt}\|\nabla y_m(t)\|_2^2 + \nu\|\mathbb{A}y_m(t)\|_2^2 \leq \tfrac{2}{\nu}\left\|u(t)\right\|_2^2 + \tfrac{C}{\nu^3}\left\|y_m(t)\right\|_2^2 \left\|\nabla y_m(t)\right\|_2^4. \tag{2.23}$$

L'inégalité de Gronwall implique

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla y_m(t)\right\|_2^2 &\leq \exp\left(\tfrac{C}{\nu^3}\int_0^t \left\|y_m(s)\right\|_2^2 \left\|\nabla y_m(s)\right\|_2^2 ds\right)\left(\left\|\nabla y_m(0)\right\|_2^2 + \int_0^t \tfrac{2}{\nu}\left\|u(s)\right\|_2^2\, ds\right) \\
&\leq \exp\left(\tfrac{C}{\nu^3}\int_I \left\|y_m(s)\right\|_2^2 \left\|\nabla y_m(s)\right\|_2^2 ds\right)\left(\left\|\nabla y_{0m}\right\|_2^2 + \tfrac{2}{\nu}\left\|u\right\|_{2,Q}^2\right) \\
&\leq \exp\left(\tfrac{C}{\nu^3}\left\|y_m\right\|_{L^\infty(I;L^2)}^2 \left\|\nabla y_m\right\|_{2,Q}^2\right)\left(\left\|y_0\right\|_{H^1}^2 + \tfrac{2}{\nu}\left\|u\right\|_{2,Q}^2\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\left\|\nabla y_m\right\|_{L^\infty(I;L^2)}^2 \leq \exp\left(\tfrac{C}{\nu^3}\left\|y_m\right\|_{L^\infty(I;L^2)}^2 \left\|\nabla y_m\right\|_{2,Q}^2\right)\left(\left\|y_0\right\|_{H^1}^2 + \tfrac{2}{\nu}\left\|u\right\|_{2,Q}^2\right). \tag{2.24}$$

Grâce aux estimations (2.12) et (2.13), nous déduisons que $(y_m)_m$ est uniformément bornée dans $L^\infty(I;V)$. De manière similaire, intégrant (2.23) entre 0 et T donne

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla y_m(T)\right\|_2^2 + \nu\left\|\mathbb{A}y_m\right\|_{2,Q}^2 \\
&\leq \left\|\nabla y_m(0)\right\|_2^2 + \tfrac{2}{\nu}\left\|u\right\|_{2,Q}^2 + \tfrac{C}{\nu^3}\int_I \left\|y_m(s)\right\|_2^2 \left\|\nabla y_m(s)\right\|_2^4\, ds \\
&\leq \left\|y_0\right\|_{H^1}^2 + \tfrac{2}{\nu}\left\|u\right\|_{2,Q}^2 + \tfrac{C}{\nu^3}\left\|y_m\right\|_{L^\infty(I;L^2)}^2 \left\|\nabla y_m\right\|_{2,Q}^2 \left\|\nabla y_m\right\|_{L^\infty(I;L^2)}^2.
\end{aligned}$$

Prenant en compte l'estimation énoncée dans le Lemme 2.1.4, nous déduisons que

$$\begin{aligned} &\nu \left\|y_m\right\|^2_{L^2(I;H^2)} \\ &\leq C\left(\left\|y_0\right\|^2_{H^1} + \tfrac{1}{\nu}\left\|u\right\|^2_{2,Q} + \tfrac{1}{\nu^3}\left\|y_m\right\|^2_{L^\infty(I;L^2)}\left\|\nabla y_m\right\|^2_{2,Q}\left\|\nabla y_m\right\|^2_{L^\infty(I;L^2)}\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Les estimations (2.12), (2.13), combinés à (2.24), montrent que la suite $(y_m)_m$ est uniformément bornée dans $L^\infty(I;V)\cap L^2(I;H^2(\Omega))$.

Étape 2. Estimation de $\frac{\partial y_m}{\partial t}$ dans $L^2(I;H)$. Multipliant (2.8) par g'_{im} et sommant, on obtient

$$\begin{aligned} \left\|\tfrac{\partial y_m(t)}{\partial t}\right\|^2_2 &= \left(u(t) - \nu \mathbb{A} y_m(t), \tfrac{\partial y_m(t)}{\partial t}\right) - b\left(y_m(t), y_m(t), \tfrac{\partial y_m(t)}{\partial t}\right) \\ &\leq \left(\left\|u(t)\right\|_2 + \nu\left\|\mathbb{A} y_m(t)\right\|_2 + \left\|y_m(t)\right\|_4\left\|\nabla y_m(t)\right\|_4\right)\left\|\tfrac{\partial y_m(t)}{\partial t}\right\|_2 \\ &\leq C\left(\left\|u(t)\right\|_2 + \nu\left\|y_m(t)\right\|_{H^2} + \left\|y_m(t)\right\|^2_{H^2}\right)\left\|\tfrac{\partial y_m(t)}{\partial t}\right\|_2 \end{aligned}$$

et donc

$$\left\|\tfrac{\partial y_m(t)}{\partial t}\right\|_2 \leq C\left(\left\|u(t)\right\|_2 + \nu\left\|y_m(t)\right\|_{H^2} + \left\|y_m(t)\right\|^2_{H^2}\right).$$

Intégrant entre 0 et T, il vient que

$$\left\|\tfrac{\partial y_m}{\partial t}\right\|_{2,Q} \leq C\left(\left\|u\right\|_{2,Q} + \nu\left\|y_m\right\|_{L^2(I;H^2)} + \left\|y_m\right\|^2_{L^2(I;H^2)}\right). \tag{2.26}$$

Par conséquent, la suite $\left(\frac{\partial y_m}{\partial t}\right)_m$ et uniformément bornée dans $L^2(I;H)$.

Étape 3. Passage à la limite. En prenant en compte les estimations précédentes, et grâce à des arguments identiques à ceux utilisés dans la preuve du Théorème 2.2.1, on établit l'existence d'une solution faible unique y satisfaisant

$$y \in L^\infty(I;V)\cap L^2(I;H^2(\Omega)), \qquad \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(I;H).$$

Autrement dit, y est une solution forte de l'équation d'état. □

2.2.2 Estimations lipschitziennes

Nous allons établir des estimations relatives à la continuité lipschitzienne de l'état par rapport au contrôle.

Soient $u_1, u_2 \in L^2(Q)$ et soient y_1 et y_2 les solutions respectives de (2.1).

Proposition 2.2.3. *Soient $u_1, u_2 \in L^2(Q)$ et soient y_1, y_2 les solutions faibles respectives. Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\left\|y_1 - y_2\right\|_{L^\infty(I;H)} + \left\|y_1 - y_2\right\|_{L^2(I;V)} \leq L\left(\left\|y_0\right\|_2 + \left\|u_2\right\|_2\right)\left\|u_1 - u_2\right\|_{2,Q},$$

où $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante dépendant seulement de Ω, T et ν.

Preuve. Soient $y = y_1 - y_2$ and $u = u_1 - u_2$. Alors y est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + (y_1 \cdot \nabla)\, y + (y \cdot \nabla)\, y_2 + \nabla p = u_1 - u_2 & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.27}$$

Autrement dit, y satisfait la formulation variationnelle

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t}, \phi\right) + \nu\left(\nabla y(t), \nabla \phi\right) &= (u(t), \phi) - b\left(y_1(t), y_1(t), \phi\right) + b\left(y_2(t), y_2(t), \phi\right) \\ &= (u(t), \phi) - b\left(y(t), y_2(t), \phi\right) - b\left(y_1(t), y(t), \phi\right) \\ &= (u(t), \phi) - b\left(y(t), y_2(t), \phi\right) + b\left(y_1(t), \phi, y(t)\right) \end{aligned}$$

pour tout $\phi \in V$ et presque tout $t \in I$. Choisissant $\phi = y(t)$ et prenant en compte le lemme 1.1.4, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left\|y(t)\right\|_2^2 + 2\nu\left\|\nabla y(t)\right\|_2^2 = 2\left(u(t), y(t)\right) - 2b\left(y(t), y_2(t), y(t)\right). \tag{2.28}$$

Les inégalités de Cauchy-Schwarz, Poincaré et Young impliquent que

$$\begin{aligned} |2(u(t), y(t))| &\leq 2\|u(t)\|_2\|y(t)\|_2 \\ &\leq C\|u(t)\|_2\|\nabla y(t)\|_2 \\ &\leq \frac{\nu}{2}\left\|\nabla y(t)\right\|_2^2 + \frac{C}{\nu}\left\|u(t)\right\|_2^2. \end{aligned}$$

De même, grâce à (2.5) et à l'inégalité de Young, il vient que

$$\begin{aligned} |2b(y(t), y_2(t), y(t))| &\leq 2\left\|y(t)\right\|_4^2\left\|\nabla y_2(t)\right\|_2 \\ &\leq 2^{\frac{3}{2}}\left\|y(t)\right\|_2\left\|\nabla y_2(t)\right\|_2\left\|\nabla y(t)\right\|_2 \\ &\leq \frac{\nu}{2}\|\nabla y(t)\|_2^2 + \frac{C}{\nu}\|y(t)\|_2^2\|\nabla y_2(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Ces estimations, avec (2.28), donnent

$$\frac{d}{dt}\left\|y(t)\right\|_2^2 + \nu\left\|\nabla y(t)\right\|_2^2 \leq \frac{C}{\nu}\left\|u(t)\right\|_2^2 + \frac{C}{\nu}\left\|y(t)\right\|_2^2\left\|\nabla y_2(t)\right\|_2^2.$$

Utilisant alors l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} \left\|y(t)\right\|_2^2 &\leq \exp\left(\int_0^t \frac{C}{\nu}\|\nabla y_2(s)\|_2^2\, ds\right)\left(\left\|y(0)\right\|_2^2 + \int_0^t \frac{C}{\nu}\left\|u\right\|_2^2\, ds\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{C}{\nu}\left\|\nabla y_2\right\|_{2,Q}^2\right)\frac{C}{\nu}\left\|u\right\|_{2,Q}^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\|y\|^2_{L^\infty(I;H)} \leq \tfrac{C}{\nu} \exp\left(\tfrac{C}{\nu} \|\nabla y_2\|^2_{2,Q}\right) \|u\|^2_{2,Q}. \tag{2.29}$$

Finalement, en intégrant (2.28) entre 0 et T, on obtient

$$\begin{aligned} \|y(T)\|_2^2 + \nu \|\nabla y\|^2_{2,Q} &\leq \tfrac{C}{\nu} \int_I \|y(t)\|_2^2 \|\nabla y_2(t)\|_2^2 \, dt + \tfrac{C}{\nu} \|u\|^2_{2,Q} \\ &\leq \tfrac{C}{\nu} \|y\|^2_{L^\infty(I;L^2)} \|\nabla y_2\|^2_{2,Q} + \tfrac{C}{\nu} \|u\|^2_{2,Q}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

L'estimation suit en prenant en compte (2.12), (2.29) et (2.30). □

Soient $u, w \in L^2(Q)$. Pour $0 < \rho < 1$, soit $u_\rho = u + \rho w$ une perturbation de Lagrange et soient y_u et y_ρ les solutions faibles de (2.1) correspondant à u et u_ρ, respectivement. Posons $z_\rho = \frac{y_\rho - y_u}{\rho}$.

Afin d'obtenir des conditions nécessaires d'optimalité, on commence généralement par établir (si possible) des estimations lipschitziennes similaires à celles obtenues dans la section précédente, et ce afin d'estimer uniformément la suite $(z_\rho)_\rho$ dans un cadre fonctionnel adéquat et prouver que la limite correspondante z est la solution d'une équation linéarisée associé (la différentiabilité au sens de Gâteaux de l'application qui au contrôle associe l'état est étroitement liée à la solvabilité de ce système). On introduit alors l'équation adjointe dont la solution ψ est liée à z via une formule de Green et on établit les conditions d'optimalité.

Suivant cette logique dans ce qui suit, nous commencerons par étudier la solvabilité de l'équation linéarisée correspondante. Nous analyserons ensuite la differentiabilité de $u \mapsto y_u$. Suivra l'étude de l'équation adjointe et la preuve des conditions d'optimalité.

2.3 Équation linéarisée

Soient $y \in L^2(I; H) \cap L^2(I; V)$ et $w \in L^2(Q)$ et considèrons l'équation linéaire suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \nu \Delta z + z \cdot \nabla y + y \cdot \nabla z + \nabla p = w & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans } Q, \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.31}$$

Définition 2.3.1. *La fonction $z \in W(I)$ est solution faible de (2.31) si*

$$\tfrac{d}{dt}(z(t), \phi) + \nu(\nabla z(t), \nabla \phi) + b(z(t), y(t), \phi) + b(y(t), z(t), \phi) = (w(t), \phi) \tag{2.32}$$

est satisfait presque partout dans I et pour tout $\phi \in V$.

Proposition 2.3.1. *Soient $w \in L^2(Q)$ et $y \in W(I)$. Alors le problème (2.31) admet une solution faible unique.*

Preuve. Nous considérons la base des valeurs propres définie dans la preuve du Théorème 2.2.1. Le problème approché est défini par

$$\begin{cases} \text{Chercher } z_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\omega_i \text{ solution, pour } 1 \leq j \leq m, \text{ de} \\ \left(\frac{\partial z_m(t)}{\partial t}, \omega_j\right) + \nu\left(\nabla z_m(t), \nabla \omega_j\right) - b\left(z_m(t), \omega_j, y(t)\right) + b\left(y(t), z_m(t), \omega_j\right) = \left(w(t), \omega_j\right), \\ z_m(0) = 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Pour tout $j = 1, \cdots, m$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}(\omega_i, \omega_j) g'_{im}(t) \quad &+\nu \sum_{i=1}^{m}(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j) g_{im}(t) + \sum_{i=1}^{m} b(\omega_i, y(t), \omega_j) g_{im}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{m} b(y(t), \omega_i, \omega_j) g_{im}(t) = (w(t), \omega_j) \end{aligned}$$

ce qui donne le système linéaire à coefficients non constants suivant

$$\begin{cases} M g'_m(t) + \left(N + C(y(t))\right) g_m(t) = H(t) \\ g_m(0) = 0 \end{cases}$$

où les matrices M et N sont données par (2.9) et (2.10) et où

$$\begin{aligned} &(C(y))_{ij} = b(\omega_i, y, \omega_j) + b(y, \omega_i, \omega_j) && 1 \leq i, j \leq m, \\ &H_j(t) = \left(w(t), \omega_j\right), && 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Comme la matrice M est inversible, le système précédent est réduit à

$$\begin{cases} g'_m(t) + M^{-1}\left(N + C(y(t))\right) g_m(t) = M^{-1} H(t) \\ g_m(0) = 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

Le problème (2.34) est un système différentiel linéaire à coefficients continus dans $\bar{I}$. Il admet donc une solution définie de manière unique sur $\bar{I}$.

Le reste de la preuve sera divisé en deux parties.

Étape 1. Estimation a priori dans $L^\infty(I;H)\cap L^2(I;V)$. Multipliant (2.33) par g_{jm} et sommant, nous obtenons

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|z_m(t)\|_2^2\right)+\nu\,\|\nabla z_m(t)\|_2^2 &= (w(t),z_m(t))+b\left(z_m(t),z_m(t),y(t)\right)-b\left(y(t),z_m(t),z_m(t)\right)\\ &= (w(t),z_m(t))+b\left(z_m(t),z_m(t),y(t)\right)\\ &= (w(t),z_m(t))-b\left(z_m(t),y(t),z_m(t)\right).\end{aligned}$$

Grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz, de Poincaré et de Young on a

$$\begin{aligned}|2(w(t),z_m(t))| &\le 2\|w(t)\|_2\|z_m(t)\|_2\\ &\le C\|w(t)\|_2\|\nabla z_m(t)\|_2\\ &\le \tfrac{C}{\nu}\|w(t)\|_2^2+\tfrac{\nu}{2}\|\nabla z_m(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

De même, en tenant compte de (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}|2b(z_m(t),y(t),z_m(t))| &\le 2\|z_m(t)\|_4^2\|\nabla y(t)\|_2\\ &\le 2^{\frac{3}{2}}\|z_m(t)\|_2\|\nabla y(t)\|_2\|\nabla z_m(t)\|_2\\ &\le \tfrac{\nu}{2}\|\nabla z_m(t)\|_2^2+\tfrac{C}{\nu}\|z_m(t)\|_2^2\|\nabla y(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\tfrac{d}{dt}\|z_m(t)\|_2^2+\nu\|\nabla z_m(t)\|_2^2\le \tfrac{C}{\nu}\|w(t)\|_2^2+\tfrac{C}{\nu}\|z_m(t)\|_2^2\|\nabla y(t)\|_2^2. \tag{2.35}$$

Appliquant alors l'inégalité de Gronwall, on a

$$\begin{aligned}\|z_m(t)\|_2^2 &\le \exp\left(\int_0^t \tfrac{C}{\nu}\|\nabla y(s)\|_2^2\,ds\right)\left(\|z_m(0)\|_2^2+\int_0^t\tfrac{C}{\nu}\|w(s)\|_2^2\,ds\right)\\ &= \exp\left(\tfrac{C}{\nu}\int_0^t\|\nabla y(s)\|_2^2\,ds\right)\left(\tfrac{C}{\nu}\int_0^t\|w(s)\|_2^2\,ds\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\|z_m\|_{L^\infty(I;L^2)}^2\le \tfrac{C}{\nu}\exp\left(\tfrac{C}{\nu}\|\nabla y\|_{2,Q}^2\right)\|w\|_{2,Q}^2.$$

D'un autre côté, en intégrant (2.35) entre 0 et T on obtient

$$\begin{aligned}\|z_m(T)\|_2^2+\nu\int_0^T\|\nabla z_m(t)\|_2^2dt &\le \|z_m(0)\|_2^2+\tfrac{C}{\nu}\int_0^T\|w(t)\|_2^2dt+\tfrac{C}{\nu}\int_0^T\|z_m(t)\|_2^2\|\nabla y(t)\|_2^2dt\\ &= \tfrac{C}{\nu}\int_0^T\|w(t)\|_2^2dt+\tfrac{C}{\nu}\int_0^T\|z_m(t)\|_2^2\|\nabla y(t)\|_2^2dt\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\nu\|\nabla z_m\|_{2,Q}^2 \leq \tfrac{C}{\nu}\|w\|_{2,Q}^2 + \tfrac{C}{\nu}\|z_m\|_{L^\infty(I;L^2)}^2\|\nabla y\|_{2,Q}^2.$$

La suite $(z_m)_m$ est alors uniformément bornée dans $L^2(I;V)$.

Étape 2. Passage à la limite et unicité. Les arguments sont exactement ceux utilisés dans la démonstration du Théorème 2.2.1. La seule différence notable concerne la convergence du terme convectif mais peut-être facilement gérée. □

2.4 Dérivabilité de l'état par rapport au contrôle

Pour u, w dans $L^2(Q)$ et $\rho \in]0,1[$ soit $u_\rho = u + \rho w$. Soit y_u la solution unique de (2.1) correspondant à u et soit y_{u_ρ} la solution unique de (2.1) correspondant à u_ρ. Dans le reste de la section, et afin de simplifier la notation, nous utiliserons y_ρ au lieu de y_{u_ρ}. Posons $z_\rho = \frac{y_\rho - y}{\rho}$. Substituant dans la formulation faible correspondante, il vient que

$$\tfrac{d}{dt}\left(z_\rho(t), \phi\right) + \nu\left(\nabla z_\rho(t), \nabla\phi\right) + b\left(z_\rho(t), y_u(t), \phi\right) + b\left(y_\rho(t), z_\rho(t), \phi\right) = \left(w(t), \phi\right) \tag{2.36}$$

pour tout $\phi \in V$.

Proposition 2.4.1. *Soient u, w dans $L^2(Q)$. Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|z_\rho\|_{L^\infty(I;H)} + \|z_\rho\|_{L^2(I;V)} \leq L\left(\|y_0\|_2 + \|u\|_{2,Q}\right)\|w\|_2\,,$$

où L est la fonction définie dans la proposition 2.2.3.

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition 2.2.3. □

Proposition 2.4.2. *Soient u, w dans $L^2(Q)$ et soit z la solution de (2.31) correspondant à $y = y_u$ et w. Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|z_\rho - z\|_{L^\infty(I;H)} + \|z_\rho - z\|_{L^2(I;V)} \leq C\rho,$$

où C dépend uniquement de Ω, ν, T, $\|y_0\|_2$, $\|u\|_2$ et $\|w\|_2$.

Preuve. Considérant (2.36) et (2.32), on peut facilement voir que $\chi_\rho = z_\rho - z$ satisfait

$$\tfrac{d}{dt}\left(\chi_\rho(t), \phi\right) + \nu\left(\nabla\chi_\rho(t), \nabla\phi\right) + b\left(y_u(t), \chi_\rho(t), \phi\right)$$

$$= \rho\left(w(t), \phi\right) - b\left(\chi_\rho(t), y_u(t), \phi\right) - b\left(y_\rho(t) - y_u(t), z_\rho(t), \phi\right) \qquad \forall\phi \in V.$$

Prenant $\phi = \chi_\rho(t)$, il vient que

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt} \left\| \chi_\rho(t) \right\|_2^2 + 2\nu \left\| \nabla \chi_\rho(t) \right\|_2^2 \\ &= 2\rho \left(w(t), \chi_\rho(t) \right) - 2b \left(\chi_\rho(t), y_u(t), \chi_\rho(t) \right) - 2b \left(y_\rho(t) - y_u(t), z_\rho(t), \chi_\rho(t) \right). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Des arguments similaires à ceux des sections précédentes montrent que

$$\begin{aligned} 2\rho \left| \left(w(t), \chi_\rho(t) \right) \right| &\leq 2\rho \left\| w(t) \right\|_2 \left\| \chi_\rho(t) \right\|_2 \leq C\rho \left\| w(t) \right\|_2 \left\| \nabla \chi_\rho(t) \right\|_2 \\ &\leq \tfrac{\nu}{3} \left\| \nabla \chi_\rho(t) \right\|_2^2 + \tfrac{C}{\nu} \rho^2 \left\| w(t) \right\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \left| 2b \left(\chi_\rho(t), y_u(t), \chi_\rho(t) \right) \right| &\leq 2 \left\| \chi_\rho(t) \right\|_4^2 \left\| \nabla y_u(t) \right\|_2 \\ &\leq C \left\| \chi_\rho(t) \right\|_2 \left\| \nabla \chi_\rho(t) \right\|_2 \left\| \nabla y_u(t) \right\|_2 \\ &\leq \tfrac{\nu}{3} \left\| \nabla \chi_\rho(t) \right\|_2^2 + \tfrac{C}{\nu} \left\| \chi_\rho(t) \right\|_2^2 \left\| \nabla y_u(t) \right\|_2^2 \end{aligned} \tag{2.39}$$

et

$$\begin{aligned} \left| 2b \left(y_\rho(t) - y_u(t), z_\rho(t), \chi_\rho(t) \right) \right| &= \left| -2b \left(y_\rho(t) - y_u(t), \chi_\rho(t), z_\rho(t) \right) \right| \\ &\leq 2 \left\| y_\rho(t) - y_u(t) \right\|_4 \left\| \nabla \chi_\rho(t) \right\|_2 \left\| z_\rho(t) \right\|_4 \\ &\leq \tfrac{\nu}{3} \left\| \nabla \chi_\rho(t) \right\|_2^2 + \tfrac{C}{\nu} \left\| y_\rho(t) - y_u(t) \right\|_4^2 \left\| z_\rho(t) \right\|_4^2 \\ &\leq \tfrac{C}{\nu} \left\| y_\rho(t) - y_u(t) \right\|_2 \left\| \nabla \left(y_\rho(t) - y_u(t) \right) \right\|_2 \left\| z_\rho(t) \right\|_2 \left\| \nabla z_\rho(t) \right\|_2 \\ &+ \tfrac{\nu}{3} \left\| \nabla \chi_\rho(t) \right\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Combinant (2.37)-(2.40), il vient que

$$\tfrac{d}{dt} \left\| \chi_\rho(t) \right\|_2^2 + \nu \left\| \nabla \chi_\rho(t) \right\|_2^2 \leq \tfrac{C}{\nu} F_\rho(t) + \tfrac{C}{\nu} \left\| \chi_\rho(t) \right\|_2^2 \left\| \nabla y_u(t) \right\|_2^2, \tag{2.41}$$

où

$$F_\rho(t) = \rho^2 \left\| w(t) \right\|_2^2 + \left\| y_\rho(t) - y_u(t) \right\|_2 \left\| \nabla \left(y_\rho(t) - y_u(t) \right) \right\|_2 \left\| z_\rho(t) \right\|_2 \left\| \nabla z_\rho(t) \right\|_2.$$

Utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|\chi_\rho(t)\|_2^2 \leq \exp\left(\int_0^t \tfrac{C}{\nu} \|\nabla y_u(s)\|_2^2 \, ds \right) \left(\|\chi_\rho(0)\|_2^2 + \tfrac{C}{\nu} \int_0^t F_\rho(s) \, ds \right)$$

et donc

$$\|\chi_\rho(t)\|_{L^\infty(I;L^2)}^2 \leq \tfrac{C}{\nu} \exp\left(\tfrac{C}{\nu} \|\nabla y_u\|_{2,Q}^2 \right) \int_I F_\rho(s) \, ds.$$

De même, intégrant (2.41) entre 0 et T, on obtient

$$\nu\|\nabla\chi_\rho\|_{2,Q}^2 \leq \tfrac{C}{\nu}\int_I F_\rho(s)\,ds + \tfrac{C}{\nu}\left\|\chi_\rho\right\|_{L^\infty(I;L^2)}^2 \left\|\nabla y_u\right\|_{2,Q}^2.$$

Pour conclure, nous avons besoin d'estimer la norme de F_ρ dans $L^1(I)$. On a

$$\begin{aligned}\int_I F_\rho(s)\,ds &= \rho^2\left\|w\right\|_{2,Q}^2 + \int_I \left(\left\|y_\rho(t)-y_u(t)\right\|_2 \left\|\nabla\left(y_\rho(t)-y_u(t)\right)\right\|_2 \left\|z_\rho(t)\right\|_2 \left\|\nabla z_\rho(t)\right\|_2\right) dt \\ &\leq \rho^2\left\|w\right\|_{2,Q}^2 + \left\|y_\rho - y_u\right\|_{L^\infty(I;H)} \left\|\nabla\left(y_\rho-y_u\right)\right\|_{2,Q} \left\|z_\rho\right\|_{L^\infty(I;H)} \left\|\nabla z_\rho\right\|_{2,Q}.\end{aligned}$$

Grâce à la proposition 2.2.3, on a

$$\begin{aligned}\left\|y_\rho - y_u\right\|_{L^\infty(I;H)} \left\|\nabla\left(y_\rho-y_u\right)\right\|_{2,Q} &\leq \left(L\left(\left\|y_0\right\|_2 + \left\|u\right\|_2\right)\left\|u_\rho - u\right\|_{2,Q}\right)^2 \\ &= \left(L\left(\left\|y_0\right\|_2 + \left\|u\right\|_2\right)\right)^2 \rho^2 \left\|w\right\|_{2,Q}^2.\end{aligned}$$

De même, grâce à la proposition 2.4.1, on a

$$\left\|z_\rho\right\|_{L^\infty(I;H)} \left\|\nabla z_\rho\right\|_{2,Q} \leq \left(L\left(\left\|y_0\right\|_2 + \left\|u\right\|_2\right)\right)^2 \left\|w\right\|_{2,Q}^2.$$

Combinant ces estimations, nous déduisons que

$$\int_I F_\rho(s)\,ds \leq \left(\left\|w\right\|_{2,Q}^2 + \left(L\left(\left\|y_0\right\|_2 + \left\|u\right\|_2\right)\right)^4 \left\|w\right\|_{2,Q}^4\right)\rho^2.$$

Ce qui termine la preuve. □

2.5 Équation adjointe

Soit $u \in L^2(Q)$ et soit y_u la solution faible de l'équation d'état correspondante. Afin d'établir les conditions d'optimalité, nous avons besoin d'analyser le système suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial\psi}{\partial t} - \nu\Delta\psi + \left(\nabla y_u\right)^\top\psi - \left(y_u\cdot\nabla\right)\psi + \nabla p = f & \text{dans } Q, \\ \nabla\cdot\psi = 0 & \text{dans } Q, \\ \psi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \psi(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.42}$$

où f est une fonction donnée dans $L^2(Q)$.

Définition 2.5.1. *Une fonction $\psi \in W(I)$ est une solution faible de* (2.42) *si*

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}\left(\psi(t),\phi\right) + \nu\left(\nabla\psi(t),\nabla\phi\right) + b\left(\phi, y_u(t), \psi(t)\right) + b\left(y_u(t),\phi,\psi(t)\right) = \left(f(t),\phi\right) \\ \psi(T) = 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

est satisfait presque partout dans I et pour tout $\phi \in V$.

L'utilisation d'un changement de variable approprié nous permet de nous ramener à un problème avec condition initiale équivalent. L'existence d'une solution faible pour ce nouveau problème est alors prouvée en utilisant une méthode de Faedo-Galerkin classique.

Proposition 2.5.1. *Soit $u, f \in L^2(Q)$ et soit y_u la solution faible de l'équation d'état correspondante à u. Alors le problème (2.42) admet une solution faible unique $\psi \in W(I)$.*

Preuve. Observons en premier lieu que ψ est la solution du problème avec condition terminale si, et seulement si, la fonction z définie par $z(t) = \psi(T-t)$ est la solution du problème avec condition initiale suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \nabla\Delta z + (\nabla \tilde{y}_u)^\top z - (\tilde{y}_u \cdot \nabla) z + \nabla \tilde{p} = \tilde{f} & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans } Q, \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(0) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.44}$$

où $\tilde{y}_u(t) = y_u(T-t)$, $\tilde{p}(t) = p(T-t)$ et $\tilde{f}(t) = f(T-t)$. De manière analogue, nous dirons qu'une fonction $z \in W(I)$ est une solution faible de (2.44) si

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(z(t), \phi) + \nu (\nabla z(t), \nabla \phi) + b(\phi, \tilde{y}_u(t), z(t)) + b(\tilde{y}_u(t), \phi, z(t)) = \left(\tilde{f}(t), \phi\right) \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

est satisfait presque partout dans I et pour tout $\phi \in V$. Dans le reste de la preuve, nous nous intéresserons à la solvabilité de ce nouveau problème. Considérant une fois encore la base des valeurs propres définie dans la preuve du Théorème 2.2.1, nous définissons le problème approché correspondant comme suit

$$\begin{cases} \text{Chercher } z_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)\omega_i \text{ solution, pour } 1 \le j \le m, \text{ de} \\ \left(\frac{\partial z_m(t)}{\partial t}, \omega_j\right) + \nu (\nabla z_m(t), \nabla \omega_j) + b(\omega_j, \tilde{y}_u(t), z_m(t)) + b(\tilde{y}_u(t), \omega_j, z_m(t)) = \left(\tilde{f}(t), \omega_j\right), \\ z_m(0) = 0. \end{cases}$$

Pour tout $j = 1, \cdots, m$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (\omega_i, \omega_j) g'_{im}(t) \quad &+ \nu \sum_{i=1}^m (\nabla\omega_i, \nabla\omega_j) g_{im}(t) + \sum_{i=1}^m b(\omega_j, \tilde{y}_u(t), \omega_i) g_{im}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^m b(\tilde{y}_u(t), \omega_j, \omega_i) g_{im}(t) = (\tilde{f}(t), \omega_j) \end{aligned}$$

ce qui donne le système linéaire à coefficients non constants suivant

$$\begin{cases} M g_m'(t) + (N + D(\tilde{y}_u(t)))\, g_m(t) = G(t), \\ g_m(0) = 0, \end{cases}$$

où les matrices M et N sont données par (2.9) et (2.10) et où

$$\begin{aligned} (D(y))_{ij} &= b(\omega_j, y, \omega_i) + b(y, \omega_j, \omega_i) \qquad && 1 \le i, j \le m, \\ G_j(t) &= \left(\tilde{f}(t), \omega_j\right) && 1 \le j \le m. \end{aligned}$$

Comme la matrice M est inversible, le système précédent est réduit à

$$\begin{cases} g_m'(t) + M^{-1}\left(N + D(\tilde{y}_u(t))\right) g_m(t) = M^{-1}G(t) \\ g_m(0) = 0. \end{cases} \tag{2.45}$$

Le problème (2.45) est un système différentiel linéaire à coefficients continus dans $\bar{I}$. Il admet donc une solution définie de manière unique sur $\bar{I}$.

Multipliant par g_{jm} et sommant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|z_m(t)\|_2^2\right) + \nu \|\nabla z_m(t)\|_2^2 &= \left(\tilde{f}(t), z_m(t)\right) - b\left(z_m(t), \tilde{y}_u(t), z_m(t)\right) \\ &\quad - b\left(\tilde{y}_u(t), z_m(t), z_m(t)\right) \\ &= \left(\tilde{f}(t), z_m(t)\right) - b\left(z_m(t), \tilde{y}_u(t), z_m(t)\right). \end{aligned}$$

Le reste de la preuve suit les mêmes lignes que celles utilisèes dans la preuve de la proposition 2.3.1 et sera omis. □

2.6 Conditions nécessaires d'optimalité

Le résultat principal de ce chapitre sera énoncé et démontré dans cette section.

Théorème 2.6.1. *Soit $\bar{u} \in L^2(Q)$ un contrôle optimal et soit $\bar{y}$ l'état correspondant. Il existe $\bar{\psi} \in W(I)$, solution faible du problème suivant*

$$\begin{cases} -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} - \nu \Delta \bar{\psi} + (\nabla \bar{y})^\top \bar{\psi} - (\bar{y} \cdot \nabla)\, \bar{\psi} + \nabla p = \bar{y} - y_d & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot \bar{\psi} = 0 & \text{dans } Q, \\ \bar{\psi} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \bar{\psi}(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.46}$$

tel que

$$\int_0^T \left(\bar{\psi} + \lambda \bar{u}, v - \bar{u}\right) dt \geq 0 \qquad \textit{pour tout } v \in U_{ad}. \tag{2.47}$$

Preuve. Pour $\rho \in]0,1[$ et $v \in U_{ad}$, soit $u_\rho = \bar{u} + \rho\,(v - \bar{u}) \in U_{ad}$, $y_\rho = y_{u_\rho}$ et $z_\rho = \frac{y_\rho - \bar{y}}{\rho}$. Il est clair que (u_ρ, y_ρ) est admissible et donc, par définition, on a

$$\lim_{\rho \to 0^+} \tfrac{J(u_\rho, y_\rho) - J(\bar{u}, \bar{y})}{\rho} \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}. \tag{2.48}$$

De l'autre côté, arguant comme dans le premier chapitre, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \tfrac{J(u_\rho, y_\rho) - J(\bar{u}, \bar{y})}{\rho} &= \int_I (z_\rho(t), \bar{y}(t) - y_d(t))\ dt + \lambda \int_I (v(t) - \bar{u}(t), \bar{u}(t))\ dt \\ &+ \tfrac{\rho}{2} \left\| z_\rho \right\|_{2,Q}^2 + \tfrac{\rho\lambda}{2} \left\| v - \bar{u} \right\|_{2,Q}^2. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Grâce à la proposition 2.4.1, nous savons que la suite $(z_\rho)_\rho$ est bornée dans $L^2(Q)$. D'autre part, grâce à la proposition 2.4.2, elle converge fortement dans $L^2(Q)$ vers $\bar{z}_v$, la solution de l'équation linéarisée suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \nu \Delta z + z \cdot \nabla \bar{y} + \bar{y} \cdot \nabla z + \nabla p = v - \bar{u} & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans } Q, \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Prenant alors en compte (2.48) et passant à la limite dans (2.49), nous obtenons

$$\int_I (\bar{z}_v(t), \bar{y}(t) - y_d(t))\ dt + \lambda \int_I (v(t) - \bar{u}(t), \bar{u}(t))\, dt \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}. \tag{2.50}$$

Considérons maintenant l'équation adjointe (2.46). D'après la proposition 2.5.1, ce problème admet une solution faible unique $\bar{\psi} \in W(I)$. Posant $\phi = \bar{\psi}(t)$ dans la formulation variationnelle correspondant à $\bar{z}_v$, on obtient

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt} \left(\bar{z}_v(t), \bar{\psi}(t)\right) + \nu \left(\nabla \bar{z}_v(t), \nabla \bar{\psi}(t)\right) + b\left(\bar{z}_v(t), \bar{y}(t), \bar{\psi}(t)\right) + b\left(\bar{y}(t), \bar{z}_v(t), \bar{\psi}(t)\right) \\ &= \left(v(t) - \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)\right). \end{aligned}$$

Choisissant alors $\phi = \bar{z}_v(t)$ dans la formulation variationnelle correspondant à $\bar{\psi}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt} \left(\bar{\psi}(t), \bar{z}_v(t)\right) + \nu \left(\nabla \bar{\psi}(t), \nabla \bar{z}_v(t)\right) + b\left(\bar{z}_v(t), \bar{y}(t), \bar{\psi}(t)\right) + b\left(\bar{y}(t), \bar{z}_v(t), \bar{\psi}(t)\right) \\ &= \left(\bar{y}(t) - y_d(t), \bar{z}_v(t)\right). \end{aligned}$$

Combinant les deux identités, nous déduisons que

$$2\tfrac{d}{dt}\left(\bar{z}_v(t), \bar{\psi}(t)\right) - \left(v(t) - \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)\right) - (\bar{y}(t) - y_d(t), \bar{z}_v(t)) = 0.$$

Intégrant entre 0 et T et prenant en compte le fait que $\bar{\psi}(T) = 0$ et $\bar{z}_v(0) = 0$, on obtient

$$\int_I (\bar{y}(t) - y_d(t), \bar{z}_v(t))\, dt = \int_I \left(v(t) - \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)\right) dt$$

et grâce à (2.50), nous obtenons finalement

$$\int_I \left(\bar{\psi}(t) + \lambda \bar{u}(t), v(t) - \bar{u}(t)\right) dt \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}.$$

Ceci termine la preuve. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Arada, *Optimal control of shear-thickening flows*, SIAM J. Control Optim., 51 (2013), pp. 1940-1961.

[2] N. Arada, *Optimal control of evolutionary quasi-Newtonion fluids*, SIAM J. Control Optim., 52 (2014), pp. 3401-3436.

[3] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations*, Vol. I and II, Springer Tracts in Natural Philosophy 38, 39, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1998.

[4] O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Beach, New York, 1969.

[5] J. C. De los Reyes, F. Tröltzsch, *Optimal control of the stationary Navier-Stokes equations with mixed control-state constraints*, SIAM J. Control Optim., 46 (2007), pp. 604-629.

[6] J. C. De los Reyes, R. Griesse, *State-constrained optimal control of the three-dimensional stationary Navier-Stokes equations*, J. Math. Anal. Appl., 343 (2008), pp. 257-272.

[7] T. Roubíček, F. Tröltzsch, *Lipschitz stability of optimal controls for the steady-state Navier-Stokes equations*, Control Cybernet., 32 (2003), pp. 683-705.

[8] R. Temam, *Navier-Stokes equations* , North-Holland, Amsterdam, 1977.

[9] D. Wachsmuth, F. Tröltzsch, *Second-order sufficient optimality conditions for the optimal control of Navier-Stokes equations*, ESAIM : Control Optim. Calc. Var., 12 (2006), pp. 93-119.