République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Problème de contrôle optimal dans un espace de Hilbert

Présenté par :

- Boukercha Siham.
- Boucherit Meryem.

Devant le jury :

Président	: Saïdi Soumia	MCA	Université de Jijel
Encadreur	: Affane Doria	MCA	Université de Jijel
Examinateur	: Boutana Imane	MAA	Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Remerciements

Nous tenons à remercier madame **Affane Doria** *pour la proposition du sujet de ce mémoire ainsi que pour ses conseils et son soutien tout au long de notre travail.*

Nos remerciements vont aussi aux membres de jury **Boutana Imane** *et* **Saidi Soumia** *de nous avoir fait l'honneur de bien vouloir participer au jury de ce mémoire et pour toute attention qu'elles ont prêté au jugement de ce mémoire.*

Nous tenons à remercier vivement tous les enseignants du département de mathématiques pour leurs efforts considérables.

Nos remerciements s'adressent également à **tous les amies** *qui ont contribué de prés ou de loin pour réaliser ce travail et créer une ambiance d'étude.*

Meryem et **Siham**

Table des matières

Introduction

Au cours des dernières années, il y a eu un intérêt croissant à l'optimisation des problèmes bien-posés. Ce concept est pertinent pour le contrôle optimal et la stabilité analyse des problèmes découlant des calculs des variation et programmation mathématique.

Les premiers travaux concernant les problèmes bien-posés ont été introduits par Hadamard et Tykhonov. Après, les auteurs dans [12], [13] ont développé la notion et la définition du problème bien-posés avec perturbation, et ils l'ont relie au contrôle optimal.

Dans [14], l'auteur a étudié l'équivalence entre l'affinité sur les variations des contrôles et le problème bien-posé de Hadamard et Tykhonov, il a démontré que pour les systèmes différentiels ordinaires, l'affinité des trajectoires désirées, est une condition nécessaire et suffisante pour avoir un problème bien-posé. Le but de notre travail est l'étude d'un problème de contrôle optimal quadratique dans un espace de Hilbert, pour une équation différentielle non homogène avec perturbation du premier ordre de la forme :

$$(P_1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)u(t) + C(t) \\ x(0) = v \end{cases}$$

où A le générateur infinitésimal, B un opérateur, et $v \in D(A)$, et de trouver une équivalence entre le problème bien-posé et l'affinité de la perturbation par rapport au contrôle u.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres. Dans le premier, nous rappelons quelques notions, définitions et théorèmes que nous avons utilisés dans la démonstration de certaines propositions et théorèmes nécessaires.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons un résultat d'existence de la solution pour une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$(P_2)\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, u(t))\\ x(0) = v,\end{cases}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe uniformément continue avec H et U sont des espace de Hilbert et $f : [0, T] \times U \to H$ une application. Après nous démontrons quelques propriétés de la solution du problème (P_2).

Dans le troisième chapitre, nous définissons un problème bien posé, puis nous étudions la convexité et la Gâteaux différentiabilité de la fonction quadratique :

$$\tilde{J}_{z^*} = \int_0^T [< x - y^*, P(x - y^*) >_H + < u - w^*, Q(u - w^*) >_U (t)dt]+ < x(T) - \psi^*, E(x(T) - \psi^*) >_H .$$

et $z^* = (y^*, w^*, \psi^*) \in Z = L^2(H) \times L^2(U) \times H$, et P, Q, et E sont des opérateurs .

Dans la dernière partie, nous étudions l'équivalence entre le problème bien-posé et l'affinité de la l'application f par rapport à la variable contrôle.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations

Soit Y et W deux espace de Banach on note par :

- Y^* dual topologique de Y .
- Y^{**} Bidual de Y.
- $\sigma(Y, Y^*)$ est la topologie faible sur Y.
- $\sigma(Y^*, Y)$ est la topologie $faible^*$ sur Y^*.

On note par :

- $L(W, Y)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés de $W dans\ Y$.
- $L(W)$ l'espace des opérateurs linéaires continues de W dans lui même.
- C([0, T],W) l'espace de Banach des applications continues définie de [0,T] dans W.
- $C^1([0, T], W)$ l'espace de Banach des applications continûment différentiables définies de [0,T] dans W.
- | . | valeur absolue
- $\rightharpoonup$ désigne convergence faible.
- $\rightarrow$ désigne la convergence forte.
- I application identité.
- E, E_1, E_2 des espaces vectoriels.

Soient H et U deux espaces de Hilbert.

- $Z = L^2(H) \times L^2(U) \times H$ et $X = H \times L^2(U)$ deux espaces de Hilbert .
- $L^p([0, T], W)$=$\Big\{u(.) : [0, T] \longmapsto W, u(.)\ mesurable\ et\ \ \int_{[0,T]} \|u(t)\|^p dt < +\infty\Big\}$, muni de la norme : $\|u(t)\|_p = (\int_{[0,T]} \|u(t)\|^P dt)^{1/p}$.

Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue .

- $L^1(\omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- $d(x, G)$ la distance entre x et l'ensemble G.
- $< ., . >$ désigne le produit scalaire on crochets de dualité .
- I l'élément unité d'algèbre $L(Y)$.
- $graphf$ est le graphe de la fonction f.
- $DJ(p)$ est la dérivée au sues de *Gâteaux* de la fonction J en p.
  Soit A un opérateur
- A^* est l'adjoint de l'opérateur A.
- $D(A)$ domaine de A.

1.2 Quelques définitions et théorèmes

Définition 1.2.1 *(Espace de Banach)* [11]

Soit E est un espace vectoriel, on dit que E est de Banach s'il est normé et complet pour la distance associée à la norme.

Définition 1.2.2 *(Produit scalaire)* [11]
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, et soit :

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \varphi(x, y) =< x, y > .$$

On dit que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}$

1) $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z) \qquad \forall x, y, z \in H,$

2) $\varphi(x, y + z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z) \qquad \forall x, y, z \in H,$

3) $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x, y) \qquad \forall x, y, \in H, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

4) $\varphi(x, \alpha y) = \alpha\varphi(x, y) \qquad \forall x, y, \in H, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

5) $\varphi(y, x) = \varphi(x, y) \qquad \forall x, y \in H,$

On dit que φ est définie positive :

1) $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\varphi(x, x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$

Si φ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, alors on dit que φ est un produit scalaire sur H.

Définition 1.2.3 *(Espace de Hilbert)*[4]
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $< .,. >$, alors si $(E, < .,. >)$ est complet pour la norme $< x, x >^{\frac{1}{2}}$. On dit que $(E, < .,. >)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.2.4 *On appelle opérateur linéaire borné toute application linéaire continue.*

Définition 1.2.5 *(Adjoint d'un l'opérateur)* [9]
Soient H, U deux espaces de Hilbert, et soit $A \in L(H, U)$ un opérateur linéaire borné, il un unique opérateur $A^* \in L(U, H)$ tel que, pour tout $x \in H$ et tout $y \in U$,

$$<Au, v> = <u, A^*v>, \quad \forall u \in D(A)$$

A^* est appelée l'adjoint de A.
A est dit auto-adjoint si $A = A^*$.

Proposition 1.2.6 *Soient H, U deux espaces vectoriels, si $A \in L(H, U)$ et si A^* existe, alors : $A^* \in L(U, H)$ et on a :*

$$\| A^* \|_{L(H,U)} = \| A \|_{L(U,H)} .$$

Définition 1.2.7 *(Topologie faible)* [4]
Soit Y un espace de Banach, Y^* son dual, et Y^{**} son bidual et soit $f \in Y^*$. On désigne par $\varphi_f : Y \to \mathbb{R}$ d'application définie par $\varphi_f(x) = <f, x>$. Lorsque f décrit Y^* on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in Y^*}$ d'application de Y dans $\mathbb{R}$. La topologie faible $\sigma(Y; Y^*)$ sur Y est la topologie la moins fine sur Y rendant continues toutes les application $(\varphi_f)_{f \in Y^*}$.

Proposition 1.2.8 *Soit Y un espace de Banach, et soit $(u_n)_n$ une suite de Y. On a*
(i) $u_n \rightharpoonup u$ pour $\sigma(Y, Y^*) \Leftrightarrow < f, u_n > \longrightarrow < f, u >$ pour tout $f \in Y^*$.
(ii) Si $u_n \rightharpoonup u$ pour $\sigma(Y, Y^*)$, alors $\| u_n \|$ est borné et $\| u \| \leq \liminf \| u_n \|$.

Définition 1.2.9 *(Topologie $faible^*$)* [4]
Soit Y un espace de Banach, soit Y^* son dual (muni de la norme dual)

$$\| f \| = \sup_{x \in Y; \|f\| \leq 1} | <f, x> |$$

et soit Y^{**} son bidual, c'est à dire le dual de Y^*, muni de la norme

$$\| \varphi \| = \sup_{f \in Y^*; \|f\| \leq 1} | <\varphi, f> |$$

La topologie $faible^*$ notée par $\sigma(Y^*, Y)$ est la topologie la moins fine sur Y^* rendant continues touts les application $(\varphi_x)_{x \in Y}$.

Définition 1.2.10 *Soit Y un espace Banach, Y^{**} son bidual, on a une injection canonique $g_1 : Y \longrightarrow Y^{**}$ définie comme suit : soit $x \in Y$ fixé, l'application $f \longmapsto < f, x >$ de Y^* dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur Y^*. On a donc,*

$$< g_1 x, f >_{Y^{**},Y^*} = < f, x >_{Y^*,Y} \text{ pour tout } x \in Y, \text{ pour tout } f \in Y^*.$$

Définition 1.2.11 *(Espace réflexif)*[4]
Soit Y un espace de Banach et soit g_1 l'injection canonique de Y dans Y^{**} on dit que Y est réflexif si $g_1(Y) = Y^{**}$.

Définition 1.2.12 *(l'espace L^p)* [4]
Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $L^1(\omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\| f \|_{L^1} = \int_\omega | f(t) | \, dt.$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$; on pose

$$L^p(\omega) = \{ f : \omega \to \mathbb{R}; f \quad \text{mesurable} \quad \text{et} \quad | f |^p \in L^1(\omega) \}.$$

On note

$$\| f \|_{L^p} = \left[\int_\omega | f(t) |^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Telle que $\| \, . \, \|_p$ est une norme.
Si $p = 2$, on a

$$\| f \|_{L^2} = \left[\int_\omega | f(t) |^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.2.13 *(Théorème de Fubini- Tonelli)*[4]
Soient (Y, Σ_1, μ) et (W, Σ_2, ν) deux espace mesuré tel que les deux mesure sont $\sigma - finie$. Si $f : Y \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable pour $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ et positive sur $Y \times W$, alors les application $x \longmapsto f(x, .)$ et $y \longmapsto f(., y)$ ainsi que les application

$$x \longmapsto \int_W f(x, y) d\nu(y) \text{ et } y \longmapsto \int_Y f(x, y) d\mu(x),$$

sont mesurable positives. On a de plus

$$\int \int_{Y \times W} f(x, y) d\zeta(x, y) = \int_Y [\int_W f(x, y) d\nu(y)] d\mu(x) = \int_W [\int_Y f(x, y) d\mu(x)] d\nu(y).$$

Théorème 1.2.14 *(Inégalité de Hölder)*[4]
Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p c'est à dire : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, supposons que $f \in L^p$ et $g \in L^{P'}$, alors $f.g \in L^1$ et $\int | fg | \leq \| f \|_p \| g \|_{p'}$.

Théorème 1.2.15 [6]
Soit Y un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire fermé défini de E dans Y. Si f et Af sont intégrables, alors

$$A(\int_E f dt) = \int_E Af dt.$$

Théorème 1.2.16 *Soit φ une fonction à valeurs réelles, définie sur $V_s \times (E|A)$, où V_s est un voisinage d'un point $s \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^k$ et $A \subset E$ un sous ensemble μ-négligeable. Si pour chaque $t \in V_s$, la fonction $x \longmapsto \varphi(t,x)$ est μ-intégrable sur E et si de plus, sur $V_s \times (E|A)$, la fonction φ admet une dérivée partielle par rapport à t vérifiant l'inégalité*

$$\mid \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) \mid \leq g(x)$$

où g est μ-intégrable et indépendante de t, alors la fonction

$$t \longmapsto \int \varphi(t,x) d\mu(x),$$

est dérivable au point s et l'on a

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(t,x) d\mu(x) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) d\mu(x).$$

Théorème 1.2.17 [8] *Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soit un réel $1 < p < \infty$. Le dual topologique de $L^p(\omega)$ est $L^{p'}(\omega)$ où p et p' sont conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).*

1.3 Convexité

Définition 1.3.1 [8]
Soient [a,b] un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \leq b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si pour tout $t \in [0,1]$, l'inégalité suivante est vérifiées

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad : \qquad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Définition 1.3.2 [3]
La fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite strictement convexe, si l'inégalité de convexité est stricte c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ x \neq y,\ \forall t \in]0,1[: \quad f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Définition 1.3.3 [8]
Un ensemble $K \subseteq Y$ est dit convexe si pour tout $(x,y) \in K^2$ et tout $t \in [0,1]$

$$tx + (1-t)y \in K.$$

Définition 1.3.4 *Soit Y un espace de Banach, soit $f : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. On dit que f est semi continue inférieurement(s.c.i) au point $a \in E$ si et seulement si*

$$\liminf_{x\to a} f(x) \geq f(a).$$

Théorème 1.3.5 *Soient Y un espace de Banach, M un fermé convexe non vide de Y et $J : M \mapsto \mathbb{R}$. Si J est strictement convexe sur M, alors elle a au plus un minimum sur M.*

Théorème 1.3.6 [7]
Soit Y un espace de Banach réflexif, $J : Y \times Y \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle convexe semi continue inférieurement pour la topologie forte. Si $((v_n, u_n))_n$ est une suite de $Y \times Y$ faiblement convergente vers (v, u) alors

$$J(v, u) \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} J(v_n, u_n).$$

1.4 Affinité

Définition 1.4.1 *Soient E un espace vectoriel, C un ensemble. On dit qu'une fonction $f : E \longrightarrow E$ est affine sur C si et seulement pour tout $a, b \in C$, $a \neq b$, et $t \in]0, 1[$ tell que*

$$f(ta + (1-t)b) = tf(a) + (1-t)f(b).$$

Lemme 1.4.2 *Soit E_1 et E_2 deux espaces vectoriels réels et $f : E_1 \mapsto E_2$ une fonction, telle que le graphe de f est convexe, alors f est affine.*

1.5 Gâteaux différentiabilité

Définition 1.5.1 *(Gâteaux différentiable)* [8]
Soient E,F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E, h vecteur de E, si

$$D_h f(\omega) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(\omega + th) - f(\omega)}{t}.$$

existe dans toute direction h de E. On dit que f est différentiable au sens de gâteaux au point ω

Théorème 1.5.2 [8]
Soient Y espace de Banach réflexif, M un fermé convexe non vide de Y, $J : M \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonctionnelle Gâteaux différentiable sur M, on a J est convexe si et seulement si

$$\forall (u_1, u_2) \in M \times M : J(u_1) - J(u_2) \geq < DJ(u_2), u_1 - u_2 > .$$

Théorème 1.5.3 *(Inégalité d'Euler,cas convexe)*[8]
Soient Y un espace de Banach réflexif, M un fermé convexe non vide de Y, et $J : M \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle Gâteaux différentiable sur M.
Soit $u = \min_{v \in M}(J(v))$, alors

$$\forall v \in M :< D(J(u)), v - u > \geq 0.$$

1.6 Ensemble de *Čebyšev*

Définition 1.6.1 [2]
Soit H un espace de Hilbert le sous ensemble G de H est de Čebyšev, si pour tout point $x \in H$, il existe un point unique $p_x \in G$, tel que :

$$\|x - y\| > \|x - p_x\| \text{ si } y \in G \text{ et } y \neq p_x.$$

Définition 1.6.2 *Soit (Y, d)un espace métrique, le sous ensemble G de Y est approximativement compact si pour tout $x \in Y$ et toute suite (y_n) de G tel que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x, y_n) = d(x, G),$$

il existe une sous suite (y_{n_k}) de (y_n) convergente vers un élément de G.

Corollaire 1.6.3 [2]
Si G est un sous ensemble de Čebyšev et approximativement compact, alors G est convexe.

1.7 Quelques résultats sur les semi-groupes

Dans cette partie, nous présenterons quelques résultats et théorèmes concernant les semi groupes, semi groupes uniformément continu d'opérateur linéaire borné, et le générateur infinitésimal dans un espace de Banach Y.

Définition 1.7.1 *(semi groupe)*[10]
La famille $(S(t))_{0 \leq t < +\infty} \subset L(Y)$ est appelée semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés si :
(i) S(0)= I.
(ii) S(s+t) = S(s) S(t) *pour tous $s, t \geq 0$.*

Définition 1.7.2 *Soit Y un espace de Banach, la famille $(S(t))_{0 \leq t < +\infty}$ est appelée semi groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur Y si elle vérifie les propriétés suivantes :*

i) $S(0) = I$

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ *pour tous* $t, s \geq 0$

iii) $\lim\limits_{t \to 0^+} \| S(t) - I \| = 0.$

Définition 1.7.3 [10]

Soit $(S(t))_{0 \leq t < +\infty}$ *un semi groupe. L'opérateur A défini par :*

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d^+ S(t)x}{dt}|_{t=0} \quad pour \quad x \in D(A),$$

et $D(A) = \{x \in Y : \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe}\}$
est le générateur infinitésimal du semi groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ *et D(A) est le domaine de A .*

Définition 1.7.4 *Soit Y un espace de Banach, un semi groupe* $(S(t))_{0 \leq t < +\infty}$ *d'opérateur linéaire borné sur Y est dit fortement continue si :*

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x, \quad \forall x \in Y.$$

Un semi groupe $(S(t))_{0 \leq t < +\infty}$ *fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur Y est appelé de classe* C_0*-semi groupe.*

Lemme 1.7.5 *Étant donné un opérateur A borné, il existe un unique semi-groupe uniformément continu* $(S(t))_{t \geq 0}$

$$S(t) = e^{tA}, \qquad pour\ tout\ t \geq 0$$

ayant pour générateur l'opérateur A.

Théorème 1.7.6 *Soit* $(S(t))_{0 \leq t < +\infty}$ C_0*-semi groupe d'opérateurs linéaires bornés. Alors :*

i) Il existe une constante $w \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que*

$$\| S(t) \| \leq Me^{wt} \ \ pour\ tout \ \ 0 \leq t < +\infty.$$

ii) Il existe une constante $\tau > 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que*

$$\| S(t) \| \leq M \ \ pour \ \ 0 \leq t \leq \tau.$$

Théorème 1.7.7 *Un opérateur* $A : Y \to Y$ *est le générateur infinitésimal d'un semi groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Corollaire 1.7.8 *Soit* $S(t)_{0 \leq t < +\infty}$ *un semi groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés alors :*

i) Il existe $w \geq 0$ *tel que :* $\| S(t) \| \leq e^{wt}, \forall t \geq 0.$

ii) Il existe un unique opérateur linéaire borné A tel que : $S(t) = e^{tA}$.

iii) L'opérateur A dans ii) est le générateur infinitésimal de S(t).

iiii) L'application $t \longmapsto S(t)$ *est différentiable pour la topologie de la norme et :*

$$\frac{dS(t)}{dt} = AS(t) = S(t)A.$$

Exemple 1.7.9 *Soit* l^2 *l'espace de Hilbert de toutes les suite* $\phi = (\phi)_{i\in N} \subset \mathbb{R}^N$ *telles que* $\sum_{i=1}^{+\infty} \mid \phi^i \mid^2 < \infty$. *Considérons la famille* $(S(t))_{t\geq 0}$ *d'opérateurs linéaires bornés définies par*

$$S(t) : [0,\infty] \longrightarrow L(l^2) \text{ telle que } S(t)\phi = (e^{-it}\phi^i)_{i\in N}$$

pour tous $\phi \in l^2$. *On voit que*

$$S(0)\phi = (e^{-i0}\phi^i)_{i\in N}$$

donc $S(0) = I$. *De même, pour tous* $t, s \geq 0$ *nous avons*

$$\begin{aligned} S(t)S(s)(\phi^i)_{i\in N} &= S(t)(e^{-is}\phi^i)_{i\in N} = (e^{-it}e^{-is}\phi^i)_{i\in N} \\ &= (e^{-i(t+s)}\phi^i)_{i\in N} = S(t+s)(\phi^i)_{i\in N} \end{aligned}$$

quelque soit $(\phi^i)_{i\in N} \in l^2$. *Donc* $S(t+s) = S(t)S(s)$, *pour tous* $t, s \geq 0$. *De plus, pour tout* $t \geq 0$ *et tout* $(\phi^i)_{i\in N} \subset \mathbb{R}^N$, *nous avons*

$$\begin{aligned} \parallel S(t)(\phi^i)_{i\in N} - (\phi^i)_{i\in N} \parallel_2^2 &= \parallel (e^{-it}\phi^i)_{i\in N} - (\phi^i)_{i\in N} \parallel_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mid e^{-it} - 1 \mid^2 \mid \phi^i \mid^2 . \end{aligned}$$

Comme on a

$$\mid e^{-it} - 1 \mid^2 \mid \phi^i \mid^2 \leq \mid \phi^i \mid^2$$

et la série $\sum_{i=1}^{\infty} \mid \phi^i \mid^2$ *est convergente, par théorème de Weierstrass il en résulte que la série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid e^{-it} - 1 \mid^2 \mid \phi^i \mid^2$$

est uniformément convergente. Donc

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \parallel S(t)(\phi)_{i\in N} - (\phi)_{i\in N} \parallel_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lim \mid e^{-it} - 1 \mid^2 \mid \phi^i \mid^2 = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} S(t)(\phi^i)_{i\in N} = (\phi^i)_{i\in N},$$

pour tout $(\phi^i)_{i\in N} \in l^2$. *Il s'ensuit que* $S(t)_{i\geq 0}$ *est un* C_0*-semi groupe (un semi groupe fortement continue d'opérateurs linéaires bornés sur* l^2*).*

Dans la suite, nous prouvons que le générateur infinitésimal du semi groupe fortement continue(C_0*-semi groupe) est l'opérateur linéaire A défini par*

$$A : D(A) \subset l^2 \longrightarrow l^2$$
$$A((\phi^i)_{i\in\mathbb{N}}) = (-i\phi^i)_{i\in\mathbb{N}}$$

avec

$$D(A) = \{(\phi^i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2 : (-i\phi^i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2\}.$$

Soit $(\phi^i)_{i\in N} \in l^2$ *telle que la limite*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{(S(t)-I)\phi}{t}$$

existe et soit $(\phi_1^i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$ *sa valeur. Donc*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \| \frac{S(t)(\phi^i)_{i\in N} - (\phi^i)_{i\in N}}{t} - (\phi_1^i)_{i\in N} \|_2^2 = 0$$

d'où il résulte que

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \| \frac{(e^{-it}\phi^i)_{i\in N} - (\phi^i)_{i\in N}}{t} - (\phi_1^i)_{i\in N} \|_2^2 = 0.$$

Il vient

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \sum_{i=1}^{\infty} | \frac{e^{-it}\phi^i - \phi^i}{t} - \phi_1^i |^2 = 0$$

d'où

$$\phi_1^i = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{e^{-it}\phi^i - \phi^i}{t} = -i\phi^i$$

par conséquent

$$D(A) \subseteq \{(\phi^i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2 : (-i\phi^i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2\}$$

et pour tout $(\phi^i)_{i\in\mathbb{N}} \in D(A)$ *on a*

$$A(\phi^i)_{i\in\mathbb{N}} = (-i\phi^i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Pour l'inclusion inverse, soit $(\phi^i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$ *tel que* $i(\phi^i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$. *On voit que* $\sum_{i=1}^{\infty} | i\phi^i |^2 \leq \infty$, *donc la série*$\sum_{i=1}^{\infty} | i\phi^i |^2 \leq \infty$ *est convergente. Alors pou tout* $t > 0$ *on a :*

$$\begin{aligned} \| \frac{S(t)(\phi^i)_{i\in N} - (\phi^i)_{i\in N}}{t} + (i\phi^i)_{i\in N} \|_2^2 &= \| \frac{(e^{-it}\phi^i)_{i\in N} - (\phi^i)_{i\in N}}{t} + (i\phi^i)_{i\in N} \|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} | \frac{e^{-it}\phi^i - \phi^i}{t} + i\phi^i |^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} | \frac{e^{-it} - 1}{it} + 1 |^2 | i\phi^i |^2 . \end{aligned}$$

Considérons l'application

$$g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x} + 1, \qquad \forall x > 0.$$

Alors

$$g'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x} + 1}{x^2}, \qquad \forall x > 0$$

pour l'application

$$l(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1, \qquad x \geq 0$$

on voit que $l'(x) \geq 0$*, pour tout* $x \geq 0$*. Compte tenu de la monotonie de la fonction* l *sur l'intervalle* $[0, \infty]$*, on déduit que* $g' > 0$*, pour tout* $x > 0$*. Comme*

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 1$$

il vient

$$g(x) < 1, \qquad \forall x > 0.$$

Par suite

$$\left| \frac{e^{-it} - 1}{it} + 1 \right|^2 \mid -i\phi^i \mid^2 < \mid -i\phi^i \mid^2$$

et comme la série $\sum \mid -i\phi^i \mid^2$ *converge, déduit que la série*

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-it} - 1}{it} + 1 \right|^2 \mid -i\phi^i \mid^2,$$

est uniformément continue. Par conséquent

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \parallel \frac{S(t)(\phi^i)_{i \in N} - (\phi^i)_{i \in N}}{t} + (i\phi^i)_{i \in N} \parallel_2^2$$
$$= \lim_{t \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-it} - 1}{it} + 1 \right|^2 \mid i\phi^i \mid^2 = 0.$$

Par suite $(\phi^i)_{i \in N} \in D(A)$ *et*

$$A(\phi^i)_{i \in N} = (-i\phi^i)_{i \in N}.$$

Donc

$$\{\phi \in l^2 : (-i\phi^i)_{i \in N} \in l^2\} \subseteq D(A).$$

Finalement on voit que

$$D(A) = \{\phi \in l^2 : (-i\phi^i)_{i \in N} \in l^2\}.$$

et

$$A(\phi^i)_{i \in N} = (-i\phi^i)_{i \in N}, \ \forall (\phi^i)_{i \in \mathbb{N}} \in D(A).$$

De plus $(\phi^i)_{i \in N}$ *est bornée, alors* $D(A) = l^2$ *et* A *est un opérateur linéaire borné qui engendre un semi groupe uniformément continue.*

Chapitre 2

Résultats Préliminaires

2.1 Résultat d'existence pour une équation différentielle du premier ordre non homogène

Dans cette partie on donne l'existence de la solution de l'équation différentielle du premier ordre avec une condition initiale de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)u(t) + C(t) \quad & t \in [0,T] \\ x(0) = v \end{cases}$$

où $f : [0,T] \longrightarrow Y$. Dans la suite on suppose que A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continue $(S(t))_{t>0}$, alors le problème non homogène admet une unique solution pour toute valeur initiale $v \in D(A)$.

Définition 2.1.1 *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un* $C_0 -$ *semi groupe et* A *son générateur infinitésimal,* $x : [0,T] \longrightarrow Y$ *est une solution (classique) du problème*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) \quad & t \in [0,T] \\ x(0) = v \end{cases} \tag{2.1}$$

sur $[0,T[$ *si :*

i) x *est continue sur* $[0,T[$.

ii) x *est continûment différentiable sur* $]0,T[$, $x(t) \in D(A)$ *pour* $0 < t < T$.

iii) Le problème (2.1) est satisfait sur $[0,T[$.

Soit $x : [0,T] \to Y$ *la solution du problème de Cauchy non homogène (2.1).*

Corollaire 2.1.2 *Soient* $(S(t))_{0\leq t<+\infty}$ *un semi-groupe de classe* C_0 *et* A *le générateur infinitésimal.*

Si $f \in L^1([0,T],Y)$ alors pour tout $v \in Y$ le problème (2.1) a au plus une solution, donnée par :

$$x(t) = S(t)v + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Preuve :

Soit $g : [0,T] \to Y$ définie par :

$$g(s) = S(t-s)x(s), \qquad \square$$

on a g est dérivable par rapport à s et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{dg(s)}{ds} &= S(t-s)'x(s) + S(t-s)x'(s) \\
&= -AS(t-s)x(s) + S(t-s)(Ax(s) + f(s)) \\
&= -AS(t-s)x(s) + S(t-s)Ax(s) + S(t-s)f(s) \\
&= S(t-s)f(s).
\end{aligned}$$

Si $f \in L^1([0,T],H)$ alors $S(t-s)f(s)$ est intégrable. En intégrant de 0 à t on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{dg(s)}{ds} &= S(t-s)f(s)|_0^t \\
g(s)|_0^t &= S(t-s)x(s)|_0^t = x(t) - S(t)x(0) \\
D'o\grave{u}, \quad x(t) &= S(t)v + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.
\end{aligned}$$

Unicité de la solution

Soit x_1, x_2 deux solutions dans Y du problème (2.1) pour tout $t \in [0,T]$ nous avons

$$\begin{aligned}
\| \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) \| &= \| Ax_1(t) + f(t) - Ax_2(t) - f(t) \| \\
&= \| A(x_1(t) - x_2(t)) \| \\
&= \| A(S(t)v + \int_0^t S(t-s)f(s)ds - S(t)v - \int_0^t S(t-s)f(s)ds) \| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

d'où $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t)$

Définition 2.1.3 *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continue $(S(t))_{0\leq t<+\infty}$. Soit $v \in Y$ et $f \in L^1([0,T],H)$. La fonction $x \in C([0,T],Y)$ donnée par :*

$$x(t) = S(t)v + \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

est appelée la solution faible du problème (2.1) à valeur initiale v sur $[0,T]$.

Théorème 2.1.4 *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi groupe $(S(t))_{0\leq t<+\infty}$.*
Soit $f \in L^1([0,T],H)$ une fonction continue sur $]0,T]$ $t \geq 0$ et,

$$V(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds \qquad 0 \leq t \leq T,$$

le problème non homogène (2.1) admet une solution sur $[0,T[$ pour $v \in D(A)$.
Si l'une des conditions suivantes est satisfaites
i) $V(t)$ est continument différentiable.
ii) $V(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $AV(t)$ est continue sur $]0,T[$.

Théorème 2.1.5 *Soit Y un espace de Banach, A le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continue $(S(t))_{t\geq 0}$, et*
i) $f \in L^1([0,T],Y)$.
ii) $v \in D(A)$. Alors

$$x(t) = S(t)v + \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

est continument différentiable sur $[0,T]$, et c'est une solution de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \qquad x(0) = v$$

2.2 Quelques propriétés de la solution du problème considéré

Dans cette partie on note par $L^p(H)$ au lieu de $L^p([0,T],H)$ où H espace de Hilbert, nous étudions les propriétés de la solution du problème :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)u(t) + C(t) \qquad t \in [0,T] \\ x(0) = v \end{cases} \tag{2.2}$$

Soient U espace de Hilbert. On pose $X = H \times L^2(U)$. Dans le lemme suivant on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées

(B) $K_1 \subset H$ est un sons ensemble bornée, fermée et convexe.
$K_2 \subset L^2(H) \times L^2(U)$ est un sons ensemble fermée et convexe.

(C) Pour tout $(v,u) \in X$, si $u_n \to u \in L^2(U)$, il existe une sous suite u_{n_k}telle que

$$\| f(.,u_{n_k}) - f(.,u(.)) \|_{L^1(H)} .$$

Lemme 2.2.1 *Soient $(S(t))_{0\leq t<+\infty}$ un C_0-semi groupe, A son générateur infinitésimal, $B(t) \in L^2(L(U,H))$ et $C \in L^1([0,T],H)$. Alors pour tout $(v,u) \in X$ il existe une solution $x^{(v,u)}$*

unique du problème :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)u(t) + C(t) \qquad t \in [0,T] \\ x(0) = v. \end{cases} \tag{2.3}$$

De plus, on a

(i) si $\| ((v_n, u_n) - (v,u) \|_X \longrightarrow 0$, *alors* $\| x_n^{(v_n,u_n)} - x^{(v,u)} \|_{C([0,T],H)} \longrightarrow 0$,

(ii) si $v_n \longrightarrow v$ *dans* H *et* $u_n \longrightarrow u$ *dans* $L^2(U)$, *alors* $x^{(v_n,u_n)} \rightharpoonup x^{(v,u)}$ *dans* $L^2(H)$.

Preuve :

Comme $u \in L^2(U)$ et $B \in L^2(L(U,H))$, donc $Bu \in L^1(H)$ en effet d'après le Théorème 1.2.14 on a :

$$\begin{aligned} \| B(t)u(t) \|_{L^1(H)} &= \int_0^T \mid B(t)(u)(t) \mid 1dt \\ &\leq \left(\int_0^T \| B(t)(u)(t) \|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \| Bu \|_{L^2(L(U,H))} \sqrt{T} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Soit $(v,u) \in X$, D'après le Corolaire 2.1.2 le problème (2.3) admet une solution continue telle que :

$$x^{(v,u)}(t) = S(t)v + \int_0^t S(t-s)[B(s)U(s) + C(s)]ds,$$

pour tout $t \in [0,T]$.

D'après le Théorème 1.7.6 on a $\sup_{[0,T]} \| S(t) \| < \infty$, posons $\{(v_n,u_n)\}_{n \in N} \in X$ on écrit $x_n = x^{(v_n,u_n)}$, pour tout $n \in N$.

Si $(v_n,u_n) \longrightarrow (v,u)$ dans X, on a :

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x^{(v,u)}(t) \|_H &= \| x^{(v_n,u_n)}(t) - x^{(v,u)} \|_H \\ &= \| S(t)v_n + \int_0^t S(t-s)[B(s)u_n(s) + C(s)]ds - S(t)v - \int_0^t S(t-s)[B(s)u(s) + C(s)]ds \|_H \\ &= \| S(t)v_n - S(t)v + \int_0^t S(t-s)[B(s)u_n + C(s) - (B(s)u(s) + C(s))]ds \|_H \\ &\leq \| S(t)(v_n - v) \|_H + \| \int_0^t S(t-s)B(s)(u_n(s) - u(s))ds \|_H \\ &\leq \sup_{[0,T]} \| S(t) \|_{L(H)} \| (v_n - v) \|_H + \sup_{[0,T]} \| S(t) \|_{L(H)} \int_0^t \| B(s)(u_n(s) - u(s)) \|_H \, ds \\ &\leq \sup_{[0,T]} \| S(t) \|_{L(H)} \left[\| (v_n - v) \|_H + \int_0^t \| B(s)(u_n(s) - u(s)) \|_H \, ds \right] \\ &\leq \sup_{[0,T]} \| S(t) \|_{L(H)} \left[\| v_n - v \|_H + \| B(s) \|_{L^2(L(U,H))} \| u_n - u \|_{L^2(U)} \right]. \end{aligned}$$

Si (v_n, u_n)converge vers (v, u) dans X pour tout $t \in [0, T]$. Alors $x_n(t)$ converge vers $x^{(v,u)}(t)$ dans H pour tout $t \in [0, T]$, donc $\sup\limits_{[0,T]} \| x_n(t) - x^{(v,u)}(t) \|_H \to 0$. D'où

$$\| x_n(t) - x^{(v,u)}(t) \|_{C([0,T],H)} \to 0.$$

Pour montrer (ii), considérons $v_n \rightharpoonup v$ dans H et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(U)$ et une fonction $g \in L^2(H)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^T <g(t), x_n(t) - x^{(v,u)}(t)>_H dt &= \int_0^T [<g(t), S(t)v_n + \int_0^t S(t-s)(B(s)u_n(s) + C(s))ds \\
&\quad - S(t)v - \int_0^t S(t-s)(B(s)u(s) + C(s))ds>_H dt] \\
&= \int_0^T [<g(t), S(t)(v_n - v) + \int_0^t S(t-s)B(s)(u_n(s) - u(s))ds>_H dt] \\
&= \int_0^T <g(t), S(t)(v_n - v)>_H dt \\
&\quad + \int_0^T <g(t), \int_0^t S(t-s)B(s)(u_n - u)ds>_H dt.
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.2.6 on a $\| S^*(t) \|_{L(H)} = \| S(t) \|_{L(H)}$, tel que S^* est l'adjoint de S

$$\textstyle\int_0^T <g(t), S(t)(v_n - v)>_H dt = \int_0^T <S^*(t)g(t), (v_n - v)>_H dt,$$

et

$$\textstyle\int_0^T \| S^*(t)g(t) \|_H^2 \, dt \leq \sup\limits_{[0,T]} \| S^*(t) \|_{L(H)}^2 \int_0^T \| g(t) \|_H^2 \, dt < \infty.$$

Pour tout $t \in [0, T]$ on a $S^* : L(H) \to [0, \infty[$ et $g \in L^2(H)$. Ainsi $S^*(.)g(.) \in L^2(H)$ et nous avons $v_n \rightharpoonup v$ dans H, donc

$$\int_0^T <S^*(t)g(t), (v_n - v)>_H dt = \int_0^T <S^*(t)g(t), v_n>_H dt - \int_0^T <S^*(t)g(t), v>_H dt.$$

qui converge vers 0 c'est à dire :

$$\int_0^T <g(t), S(t)(v_n - v)>_H dt \longrightarrow 0. \tag{2.4}$$

Si $t \in [0, T]$, prenons :

$$T_{g(t)} : H \longrightarrow \mathbb{R} \ \ tel\ que \ \ T_{g(t)}(p) = <g(t), p>_H \ \ pour \ \ tout \ \ p \in H,$$

et

$$h_n(t, s) = \begin{cases} S(t-s)B(s)[u_n(s) - u(s)] & si \ \ 0 \leq s \leq t \\ 0 & si \ t \leq s \leq T. \end{cases}$$

Montrons que $T_{g(t)} \in L(H, \mathbb{R})$, en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, si $t \in [0,T]$, $p, q \in H$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} T_{g(t)}(\alpha p + \beta q) &= <g(t), \alpha p + \beta q>_H \\ &= <g(t), \alpha p>_H + <g(t), \beta q>_H \\ &= \alpha <g(t), p>_H + \beta <g(t), q>_H \\ &= \alpha T_{g(t)}(p) + \beta T_{g(t)}(q), \end{aligned}$$

de plus

$$\| T_{g(t)}(p) \|_H = | <g(t), p> |_H \ \leq \| g(t) \|_H \| p \|_H = c' \| p \|_H .$$

nous aurons : $T_{g(t)} \in L(H, \mathbb{R})$. Aussi on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \| h_n(t,s) \|_H \, ds &= \int_0^T \| S(t-s)B(s)(u_n(s) - u(s)) \|_H \, ds \\ &\leq \sup_{[0,T]} \| S(\tau) \|_{L(H)} \int_0^T \| B(s)(u_n(s) - u(s)) \|_H \, ds \qquad (2.5) \\ &\leq Me^{wT} \| B \|_{L^2(L(U,H))} \| u_n(s) - u(s) \|_{L^2(U)} \, ds \\ &\leq +\infty, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^T | <g(t), h_n(t,s)> | \, ds &\leq \int_0^T \| g(t) \|_H \| h_n(t,s) \|_H \, ds \\ &\leq \| g(t) \|_H \int_0^T \| h_n(t,s) \|_H \, ds \qquad (2.6) \\ &\leq \| g(t) \|_H \| h_n(t,s) \|_{L^1(H)} . \end{aligned}$$

pour tour $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent de (2.5), (2.6) et Théorème 1.2.15, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^T <g(t), \int_0^t S(t-s)B(s)[u_n(s) - u(s)]ds>_H dt &= \int_0^T <g(t), \int_0^T h_n(t,s)ds>_H dt \\ &= \int_0^T \int_0^T <g(t), h_n(t,s)>_H ds \, dt, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^T | <g(t), h_n(t,s)>_H | \, ds \, dt &\leq \sup_{[0,T]} \| S(\tau) \|_{L(H)} \int_0^T \| g(t) \|_H \, dt \int_0^T \| B(s)[u_n(s) - u(s)] \|_H \, ds \\ &< \infty. \end{aligned}$$

par la Théorème 1.2.13 nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^T <g(t), h_n(t,s)>_H ds \, dt &= \int_0^T \int_0^T <g(t), S(t-s)B(s))(u_n(s) - u(s))>_H dt \, ds \\ &= \int_0^T < \int_0^T B^*(s)S^*(t-s)g(t)dt, u_n(s) - u(s)>_H ds. \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Où (2.7) vienne du Théorème 1.2.15 car, si $s \in [0,T]$ et $n \in \mathbb{N}$. On défini l'opérateur :

$$\tilde{T}_{n,s} : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ avec } \widetilde{T}_{n,s}(q) = <q, u_n(s) - u(s)>_U,$$

et la fonction

$$\tilde{h}(t,s) = \begin{cases} B^*(s)S^*(t-s)g(t) & si \quad s \leq t \leq T \\ 0 & si \quad 0 \leq t < s \end{cases}$$

tel que $\tilde{T}_{n,s}\tilde{h}(.,s) \in L^1([0,T],R)$ et $\tilde{h}(.,s) \in L^1(U)$

Donc si on pose

$$F(s) = \int_s^T B^*(s)S^*(t-s)g(t)dt.$$

on obtient d'après le Théorème 1.2.14 :

$$\begin{aligned}\int_0^T \| F(s) \|_U^2 \, ds &\leq \int_0^T \left(\| \int_0^T B^*(s)S^*(t-s)g(t) \|_U^2 \, dt \right)^2 \, ds \\ &\leq \sup_{[0,T]} \| S(\tau) \|_{L(H)}^2 \| B^*(s) \|_{L^2(L(H,U))}^2 \| g(t) \|_{L^1(H)}^2 \\ &\leq Me^{wT} \| B^*(s) \|_{L^2(L(H,U))}^2 \| g(t) \|_{L^1(H)} \\ &\leq \infty,\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\int_0^T <F(s), u_n(s) - u(s)>_U ds \longrightarrow 0. \tag{2.8}$$

Puis que on a : $u_n \rightharpoonup u$, *d'où* (ii) vient (2.4) et (2.8). $\square$

Chapitre 3

Problème bien posé

Dans ce chapitre on va donner une définition du problème bien posé, puis on va montrer quelques propriétés de la fonction quadratique, dans la dernière partie on va étudier l'équivalence entre le problème bien posé et l'affinité sur $f(t, u(t))$ par rapport à un contrôle lié à notre équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, u(t)) & t \in [0, T] \\ x(0) = v \end{cases} \tag{3.1}$$

Soient H , U deux espace de Hilbert, nous considérons $Z = L^2(H) \times L^2(H) \times H$ espace des trajectoires désirées qui est un espace de Hilbert, et $X = H \times L^2(U)$ espace des contrôles.

Considérons le problème de minimisation suivant :
pour $z^* = (y^*, w^*, \psi^*) \in Z$ on veut minimiser la fonction quadratique :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{z^*}(v,u) = \int_0^T &[< x(t) - y^*(t), P(t)(x(t) - y^*(t) >_H + < u(t) - w^*(t), Q(t)(u(t) - w^*(t) >_U]dt \\ &+ < x(T) - \psi^*, E(x(T) - \psi^*) >_H, \end{aligned}$$

sur l'ensemble admissible non vide

$$\mathcal{A} = \{(v, u) \in X : v \in K_1, x = x^{(v,u)} \text{ solution du problème (3.1) et } (x^{(v,u)}, u) \in K_2\},$$

où K_1 et K_2 sont des sous ensembles de H et $L^2(H) \times L^2(U)$ respectivement.

Avec $P \in L^\infty([0, T], L(H)), Q \in L^\infty([0, T], L(U))$, et $E \in L(H)$ sont des opérateurs autoadjoints, considérons le problème d'optimisation global $(X, \tilde{J}_{z^*}(v, u))$tel que :

$$J_{z^*} : X \longrightarrow] - \infty, +\infty]$$

définie par :

$$J_{z^*}(v,u) = \begin{cases} \tilde{J}_{z^*}(v,u) & si (v,u) \in \mathcal{A} \\ +\infty & sinon \end{cases} \tag{3.2}$$

Ici on veut minimiser $J_{z^*}(v,u)$ pour $(v,u) \in X$, notons par :

$$V(z) = \{\inf J_z(q) : q \in X\},$$

la valeur optimale, *où* $(v,u) \in X$ appartient à l'ensemble

$$D = \{z \in Z : \|z - z^*\| < \delta\} \text{ avec } \delta > 0,$$

et

$$\arg\min(X, J_{z^*}) = \begin{cases} \mathcal{M} & si \ \ \inf J_{z^*}(x) \neq +\infty \\ \emptyset & si \ \ \inf J_{z^*} = +\infty \end{cases}$$

où

$$\mathcal{M} = \{q \in X : J(q) = \underset{x \in X}{inf} J(x)\}.$$

Le problème d'optimisation global est dit bien posé si les conditions suivantes sont vérifiées

1) Il existe un unique minimum

$$q^* = \arg\min(X, J_{z^*}), \tag{3.3}$$

2)

$$La\ valeur\ de\ V(z)\ est\ finie\ pour\ tout\ z \in D, \tag{3.4}$$

3) pour toutes suites $(z_n) \in Z, q_n \in X$ telle que $z_n \longrightarrow z^*$ et $J_{z_n}(q_n) - V(z_n) \longrightarrow 0.$
nous avons :

$$q_n \longrightarrow q^*\ et\ V(z_n) \longrightarrow V(z^*). \tag{3.5}$$

La suite $(q_n)_n$ qui vérifie la condition (3.5) est dite asymptotiquement minimisée par rapport à z_n.

Dans se qui suit, considérons les hypothèse suivantes :
Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout vecteur ξ et pour tout $t \in [0,T]$ nous avons

(A') $\quad < \xi, P(t)\xi > \geq a\|\xi\|^2, \ \ < \xi, Q(t)\xi > \geq a\|\xi\|^2, \ \ < \xi, E\xi > \geq 0,$

(A'_1) $\quad < \xi, P(t)\xi > \geq a\|\xi\|^2, < \xi, Q(t)\xi > \geq a\|\xi\|^2, \ \ < \xi, E\xi > \geq a\|\xi\|^2,$

(D) Soit x_n, x solution de (3.1) de même $(v_n, u_n), (v,u) \in X$, si $\| x_n - x \|_{L^2(H)} \longrightarrow 0$ il existe une sous suite telle que $\| x_{n_k}(0) - x(0) \|_H \rightarrow 0.$

Remarque 3.0.1 *L'exemple suivant donne l'importance de l'hypothèse (D) pour le problème de contrôle optimal bien posé.*

Exemple 3.0.2 *Soit* $H = U = l^2$ *un espace de Hilbert de toutes les suites* $\phi = (\phi^i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^N$ *telle que* $\Sigma_{i=1}^{\infty} \mid \phi^i \mid^2 < \infty$ *avec le produit scalaire* $<\phi, \varphi>_{l^2} = \Sigma_{i=1}^{\infty} \varphi^i \phi^i$.
Soit $K_1 = \{\phi \in l^2 : \parallel \phi \parallel_{l^2} \leq 1\}$ *et* $K_2 = L^2(l^2) \times L^2(l^2)$. *Soit* $z^* = (y^*, w^*, \varphi^*) \in L(l^2)^2 \times L^2(l^2) \times l^2$, *nous considérons la fonctionnelle :*

$$\tilde{J}_{z*} = \parallel x^{(v,u)} - y^* \parallel_{L^2(l^2)} + \parallel u - w^* \parallel_{L^2(l^2)}^2,$$

où $x^{(v,u)}$ *est la solution du problème :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \\ x(0) = v \qquad (0, T) \end{cases}$$

où $A : D(A) \subset l^2 \longrightarrow l^2$ *définie par :*

$$A((\phi^i)_{i\in\mathbb{N}}) = (-i\phi^i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Soit $S : [0, \infty] \longrightarrow L(l^2)$ *telle que* $S(t)\phi = (e^{-it}\phi^i)_{i\in\mathbb{N}}$ *un semi groupe fortement continue. D'après l'exemple(1.7.9) le générateur infinitésimal de S est donné par*

$$A((\phi^i)_{i\in\mathbb{N}}) = (-i\phi^i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Si $u = 0$, $v_n = e_n \in K_1$, $n \in N$, *i.e.* $v_n^i = 0$ *pour* $i \neq n$, *et* $v_i^i = 1$, *d'après le Corollaire 2.1.2 la solution du problème précédent pour* $t \in [0, T]$ *est*

$$x_n(t) = S(t)v_n \;\; avec \;\; x_n^i(t) = \begin{cases} e^{-it} & si \; i = n \\ 0 & si \; i \neq n \end{cases}$$

et nous avons

$$\begin{aligned} \parallel x_n(t) \parallel_{L^2(l^2)} &= \parallel S(t)v_n \parallel_{L^2(l^2)} \\ &= \parallel e^{-it} \parallel_{L^2(l^2)} \end{aligned}$$

donc

$$\parallel x_n(t) \parallel_{L^2(l^2)} \to 0.$$

Alors $(v_n, 0), n \in N$ *est une suite minimisante de la fonctionnelle*

$$J_0(v, u) = \begin{cases} \tilde{J}_0(v, u) & (v, u) \in \mathcal{A} \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

et le problème d'optimisation global $(l^2, L^2(l^2), J_0)$ *n'est pas bien posé. Nous remarquons que dans ce cas l'hypothèse (D) n'est pas vérifiée.*

3.1 Quelques propriétés de la fonction quadratique

Dans la partie suivante considérons la fonction quadratique $\tilde{J}_{z^*}$, on va étudier la convexité stricte et la différentiabilité au sens de Gâteaux.

Lemme 3.1.1 *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continue, $B \in L^2(L(U,H))$ et $C \in L^1(H)$. Supposons que les hypothèses (A'), (B) sont vérifiées, et soit $f(t,u) = B(t)u + C(t)$ dans le problème(3.1). Alors la fonctionnelle $\tilde{J}_z$ vérifie les propriétés suivantes :*
(i) $\tilde{J}_z$ est strictement convexe pour tout $z \in Z$.
(ii) Si $z_n \to \overline{z}$ dans Z et $(v_n, u_n) \to (\overline{v}, \overline{u})$ dans X, alors $\tilde{J}_{z_n} \to \tilde{J}_z$.
(iii) Soit $z = (y, w, \psi) \in Z$, pour tout $(v,u) \in X$, $D\tilde{J}_z(v,u)$ la différentielle existe et elle est donnée par

$$\begin{aligned} D\tilde{J}_z((v,u),(\varphi,p)) =& 2\int_0^T < x^{(\varphi,p)}(t) - \hat{x}_C(t), P(t)(x^{(v,u)} - y(t)) >_H dt \\ &+ 2\int_0^T < p(t), Q(t)(u(t) - w(t)) >_U dt \\ &+ 2 < x^{(\varphi,p)}(T) - \hat{x}_C(T), E(x^{(v,u)} - \psi) >_H . \end{aligned}$$

où $\hat{x}_C(t) = \int_0^t S(t-s)C(s)ds$.

Preuve :
Soit (v_i, u_i), $i = 1, 2$ deux vecteurs distincts de X et $\lambda \in (0,1)$, si on pose $x_i(t) = x^{(v_i,u_i)}(t)$ pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} &\lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t) \\ &= \lambda\left(S(t)v_1 + \int_0^t S(t-s)\left[B(s)u_1 + C(t)\right]ds\right) + (1-\lambda)\left(S(t)v_2 + \int_0^t S(t-s)\left[B(s)u_2 + C(t)\right]ds\right) \\ &= \lambda S(t)v_1 + (1-\lambda)S(t)v_2 + \lambda\int_0^t S(t-s)\left[B(s)u_1 + C(t)\right]ds + (1-\lambda)\int_0^t S(t-s)\left[B(s)u_2 + C(t)\right]ds \\ &= S(t)(\lambda v_1 + (1-\lambda))v_2) + \int_0^t S(t-s)[B(s)(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) + C(t)]ds \\ &= x^{(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 + \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)}(t) \\ &= x^{(\lambda(v_1,u_1) + (1-\lambda)(v_2,u_2))}(t). \end{aligned}$$

1) Pour $z = (y, w, \psi) \in Z$, de la relation (B) on a :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_z(\lambda(v_1,u_1) + (1-\lambda)(v_2,u_2)) \leq& \lambda\tilde{J}_z(v_1,u_1) + (1-\lambda)\tilde{J}_z(v_2,u_2) \\ &- \lambda(1-\lambda)a(\|x_1 - x_2\|_{L^2(H)} + \|u_1 - u_2\|)_{L^2(U)}. \end{aligned}$$

En effet,

$$\tilde{J}_z\left(\lambda(v_1,u_1)+(1-\lambda)(v_2,u_2)\right)=\tilde{J}_z(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$$
$$=\int_0^T < x^{(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)}(t)-y(t),P(t)(x^{(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)}(t)-y(t))>_H dt$$
$$+\int_0^T < (\lambda u_1(t)+(1-\lambda)u_2(t))-w(t),Q(t)(\lambda u_1(t)+(1-\lambda)u_2(t))-w(t))>_U dt$$
$$+< x^{(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)}(T)-\psi,E(x^{(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)}(T)-\psi)>_H$$
$$=\int_0^T < \lambda x_1(t)+(1-\lambda)x_2(t)-y(t),P(t)(\lambda x_1(t)+(1-\lambda)x_2(t)-y(t))>_H dt$$
$$+\int_0^T < \lambda u_1(t)+(1-\lambda)u_2(t)-w(t),Q(t)(\lambda u_1(t)+(1-\lambda)u_2(t)-w(t))>_U dt$$
$$+<\lambda x_1(T)+(1-\lambda)x_2(T)-\psi,E(\lambda x_1(T)+(1-\lambda)x_2(T)-\psi)>_H dt$$
$$=\int_0^T < (\lambda x_1(t)-y(t))+(1-\lambda)(x_2(t)-y(t)),P(t)(\lambda x_1-y(t))+(1-\lambda)(x_2(t)-y(t))>_H dt$$
$$+\int_0^T < (\lambda u_1(t)-w(t))+(1-\lambda)(u_2(t)-w(t)),Q(t)((\lambda u_1(t)-w(t))+(1-\lambda)(u_2(t)-w(t)))>_U$$
$$+<(\lambda x_1(T)-\psi)+(1-\lambda)(x_2(T)-\psi),E(\lambda x_1(T)-\psi)+(1-\lambda)(x_2(T)-\psi)>_H .$$

Si on pose pour tout $t\in[0,T]$

$J_P(t)=<(\lambda x_1(t)-y(t))+(1-\lambda)(x_2(t)-y(t)),P(t)(\lambda x_1-y(t))+(1-\lambda)(x_2(t)-y(t))>_H$

$J_Q(t)=<\lambda u_1(t)-w(t)+(1-\lambda)(u_2(t)-w(t)),Q(t)(\lambda u_1(t)-w(t))+(1-\lambda)(u_2(t)-w(t))>_U$,

et

$J_E(t)=<(\lambda x_1(T)+(1-\lambda)xx_2(T))-\psi,E((\lambda x_1(T)+(1-\lambda)x_2(T))-\psi)>_H$.

Alors

$$J_P(t)=<\lambda(x_1(t)-y(t))+(1-\lambda)(x_2(t)-y(t)),P(t)(\lambda(x_1(t)-y(t))+(1-\lambda)(x_2(t)-y(t)))>_H$$
$$=<\lambda(x_1(t)-y(t)),\lambda P(t)(x_1(t)-y(t))>_H+<\lambda(x_1(t)-y(t)),(1-\lambda)P(t)(x_2(t)-y(t))>_H$$
$$+<(1-\lambda)(x_2(t)-y(t)),(1-\lambda)P(t)(x_2(t)-y(t))>$$
$$+<(1-\lambda)(x_2(t)-y(t)),\lambda P(t)(x_1(t)-y(t))>_H$$
$$=\lambda^2<(x_1(t)-y(t)),P(t)(x_1(t)-y(t))>_H+\lambda(1-\lambda)<(x_1(t)-y(t)),P(t)(x_2(t)-y(t))>_H$$
$$+(1-\lambda)^2<(x_2(t)-y(t)),P(t)(x_2(t)-y(t))>_H$$
$$+\lambda(1-\lambda)<(x_2(t)-y(t)),P(t)(x_1(t)-y(t))>,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\lambda^2 < (x_1(t)-y(t)), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H &= \lambda^2 < (x_1(t)-y(t)), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H \\
&+ \lambda < x_1(t)-y(t), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H \\
&- \lambda < (x_1(t)-y(t)), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H \\
&= \lambda < x_1(t)-y(t), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H \\
&- \lambda(1-\lambda) < x_1(t)-y(t), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)^2 < x_2(t)-y(t), P(t)(x_2(t)-y(t)) >_H &= (1-\lambda) < x_2(t)-y(t), P(t)(x_2(t)-y(t)) >_H \\
&-\lambda(1-\lambda) < x_2(t)-y(t), P(t)(x_2(t)-y(t)) >_H .
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
J_P(t) &= \lambda < x_1(t)-y(t), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H -\lambda(1-\lambda) < x_1(t)-y(t), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H \\
&+ (1-\lambda) < x_2(t)-y(t), P(t)(x_2(t)-y(t)) >_H -\lambda(1-\lambda) < x_2(t)-y(t), P(t)(x_2(t)-y(t)) >_H \\
&+ \lambda(1-\lambda) < x_1(t)-y(t), P(t)(x_2(t)-y(t)) >_H +\lambda(1-\lambda) < x_2(t)-y(t), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H \\
&= \lambda < x_1(t)-y(t), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H +(1-\lambda) < x_2(t)-y(t), P(t)(x_2(t)-y(t)) >_H \\
&- \lambda(1-\lambda) < x_1(t)-x_2(t), P(t)(x_1(t)-x_2(t)) >_H .
\end{aligned}$$

De la même façon, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
J_Q(t) &= \lambda < u_1(t)-w(t), Q(t)(u_1(t)-w(t)) >_U +(1-\lambda) < u_2(t)-w(t), Q(t)(u_2(t)-w(t)) >_U \\
&- \lambda(1-\lambda) < u_1(t)-u_2(t), Q(t)(u_1(t)-u_2(t)) >_U,
\end{aligned}$$

et aussi,

$$J_E(t) = \lambda < x_1(T)-\psi, E(x_1(t)-\psi) >_H +(1-\lambda) < x_2(t)-\psi, E(x_2(t)-\psi) >_H .$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{J}_z(\lambda(v_1,u_1)+(1-\lambda)(v_2,u_2))\\
&=\int_0^T [\lambda < x_1(t)-y(t), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H +(1-\lambda) < x_2(t)-y(t), P(t)(x_2(t)-y(t)) >_H\\
&-\lambda(1-\lambda) < x_1(t)-x_2(t), P(t)(x_1(t)-x_2(t)) >_H]dt\\
&+\int_0^T [\lambda < u_1(t)-w(t), Q(t)(u_1(t)-w(t)) >_U +(1-\lambda) < u_2(t)-w(t), Q(t)(u_2(t)-w(t)) >_U\\
&-\lambda(1-\lambda) < u_1(t)-u_2(t), Q(t)(u_1(t)-u_2(t)) >_U]dt\\
&+\lambda < x_1(T)-\psi, E(x_1(t)-\psi) >_H +(1-\lambda) < x_2(t)-\psi, E(x_2(t)-\psi) >_H\\
&=\int_0^T [\lambda < x_1(t)-y(t), P(t)(x_1(t)-y(t)) >_H +\lambda < u_1(t)-w(t), Q(t)(u_1(t)-w(t)) >_U]dt\\
&+\lambda < x_1(T)-\psi, E(x_1(t)-\psi) >_H +\int_0^T [(1-\lambda) < x_2(t)-y(t), P(t)(x_2(t)-y(t)) >_H\\
&+(1-\lambda) < u_2(t)-w(t), Q(t)(u_2(t)-w(t)) >_U]dt+(1-\lambda) < x_2(T)-\psi, E(x_2(T)-\psi) >_H\\
&-\lambda(1-\lambda)\int_0^T [< x_1(t)-x_2(t), P(t)(x_1(t)-x_2(t)) >_H\\
&+< u_1(t)-u_2(t), Q(t)(u_1(t)-u_2(t)) >_U]dt\\
&=\lambda\tilde{J}_z(v_1,u_1)+(1-\lambda)\tilde{J}_z(v_2,u_2)-\lambda(1-\lambda)\int_0^T [< x_1(t)-x_2(t), P(t)(x_1(t)-x_2(t)) >_H\\
&+< u_1(t)-u_2(t), Q(t)(u_1(t)-u_2(t)) >_U]dt.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse (B) nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\tilde{J}_z(\lambda(v_1,u_1)+(1-\lambda)(v_2,u_2)) \qquad (3.6)\\
&\quad\leq \lambda\tilde{J}_z(v_1,u_1)+(1-\lambda)\tilde{J}_z(v_2,u_2)-\lambda(1-\lambda)a\int_0^T \|x_1(t)-x_2(t)\|_H^2+\|u_1(t)-u_2(t)\|_U^2 dt\\
&\quad\leq \lambda\tilde{J}_z(v_1,u_1)+(1-\lambda)\tilde{J}_z(v_2,u_2)-\lambda(1-\lambda)a(\|x_1(t)-x_2(t)\|_{L^2(H)}^2+\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L^2(U)}^2),
\end{aligned}
$$

d'où, pour $u_1 \neq u_2$ on a

$$\tilde{J}_z(\lambda(v_1,u_1)+(1-\lambda)(v_2,u_2)) < \lambda\tilde{J}_z(v_1,u_1)+(1-\lambda)\tilde{J}_z(v_2,u_2),$$

de la convexité stricte de $\tilde{J}_z(.,.)$.

D'autre part, si $v_1 \neq v_2$, soit $d = \| x_1(0)-x_2(0) \|_H$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\tfrac{d}{2} < \| x_1(t)-x_2(t) \|_H \qquad \textit{pour} \;\; \textit{tout}\; t \in [0,\delta],$$

à partir du quel

$$\| x_1-x_2 \|_{L^2(H)}^2 \geq \| x_1-x_2 \|_{L^2([0,\delta],H)} > \frac{d^2}{4}\delta. \tag{3.7}$$

Par conséquent de (3.6), et de l'inégalité précédente nous aurons la convexité stricte de $\tilde{J}_z(.,.)$.

ii) Maintenant nous prouvons la condition (ii).
Soit $z_n = (y_n, w_n, \psi_n) \to \bar{z} = (\bar{y}, \bar{w}, \bar{\psi})$ dans Z et $(v_n, u_n) \to (\bar{v}, \bar{u})$ dans X, si nous notons par $x_n = x^{(v_n,u_n)}$ et par $\bar{x} = x^{\bar{v},\bar{u}}$ la solution du problème(3.1), nous obtenons pour le (2.1.5) $\|x_n - \bar{x}\|_{C([0,T],H)} \to 0$. Nous avons

$$|\tilde{J}_{z_n}(v_n,u_n) - \tilde{J}_{\bar{z}}(\bar{v},\bar{u})| = |\int_0^T [< x^{(v_n,u_n)}(t) - y_n(t), P(t)(x^{(v_n,u_n)}(t) - y_n(t)) >_H$$
$$+ < u_n(t) - w_n(t), Q(t)(u_n(t) - w_n(t)) >_U]dt + < x^{(v_n,u_n)}(T) - \psi_n, E(x^{(v_n,u_n)}(T) - \psi_n) >_H$$
$$- [\int_0^T [< x^{(\bar{v},\bar{u})}(t) - \bar{y}(t), P(t)(x^{(\bar{v},\bar{u})}(t) - \bar{y}(t)) >_H + < \bar{u}(t) - \bar{w}(t), Q(t)(\bar{u}(t) - \bar{w}(t)) >_U]dt$$
$$+ < x^{(\bar{v},\bar{u})}(T) - \bar{\psi}, E(x^{(\bar{v},\bar{u})}(T) - \bar{\psi}) >_H]|.$$

D'autre part nous avons :

$$< x_n(t) - y_n(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t)) >_H - < \bar{x}(t) - \bar{y}(t), P(t)(\bar{x}(t) - \bar{y}(t)) >_H$$
$$=< x_n(t) - y_n(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t)) >_H - < x_n(t) - y_n(t), P(t)(\bar{x}(t) - \bar{y}(t)) >_H$$
$$+ < x_n(t) - y_n(t), P(t)(\bar{x}(t) - \bar{y}(t)) >_H - < \bar{x}(t) - \bar{y}(t), P(t)(\bar{x}(t) - \bar{y}(t)) >_H$$
$$+ < \bar{x}(t) - \bar{y}(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t)) >_H - < \bar{x}(t) - \bar{y}(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t)) >_H .$$

D'après l'hypothèse sur P nous avons :

$$<x_n(t) - y_n(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t)) >_H - < \bar{x}(t) - \bar{y}(t), P(t)(\bar{x}(t) - \bar{y}(t)) >_H$$
$$=< x_n(t) - y_n(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t) - \bar{x}(t) + \bar{y}(t)) >_H + < x_n(t) - y_n(t), P(t)(\bar{x}(t) - \bar{y}(t)) >_H$$
$$+ < \bar{x}(t) - \bar{y}(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t) - \bar{x}(t) + \bar{y}(t)) >_H - < \bar{x}(t) - \bar{y}(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t)) >_H$$
$$=< x_n(t) - y_n(t) + \bar{x}(t) - \bar{y}(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t) - \bar{x}(t) + \bar{y}(t)) >_H$$
$$+ < x_n(t) - y_n(t), P(t)(\bar{x}(t) - \bar{y}(t)) >_H - < x_n(t) - y_n(t), P(t)(\bar{x}(t) - \bar{y}(t)) >_H$$
$$=< x_n(t) - y_n(t) + \bar{x}(t) - \bar{y}(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t) - \bar{x}(t) + \bar{y}(t)) >_H .$$

De la même façon et d'après l'hypothèse sur Q nous nous avons :

$$< u_n(t) - w_n(t), Q(t)(u_n(t) - w_n(t)) >_U - < \bar{u}(t) - \bar{w}(t), Q(t)(\bar{u}(t) - \bar{w}(t)) >_U$$
$$=< u_n(t) - w_n(t) + \bar{u}(t) - \bar{w}(t), Q(t)(u_n(t) - w_n(t) + \bar{u}(t) - \bar{w}(t)) >_U,$$

et aussi,

$$< x_n(T) - \psi_n, E(< x_n(T) - \psi_n) >_H - < \bar{x}(T) - \bar{\psi}, E(\bar{x}(T) - \bar{\psi}) >_H$$
$$=< x_n(T) - \psi_n + \bar{x}(T) - \bar{\psi}, E(x_n(T) - \psi_n + \bar{x}(T) - \bar{\psi}) >_H .$$

Ainsi on déduit que :

$$\begin{aligned}
|\tilde{J}_{z_n}(v_n,u_n) - \tilde{J}_{\bar{z}}(\bar{v},\bar{u})| \leq & \int_0^T [< x_n(t) - y_n(t) + \bar{x}(t) - \bar{y}(t), P(t)(x_n(t) - y_n(t) - \bar{x}(t) + \bar{y}(t)) >_H \\
& + < u_n(t) - w_n(t) + \bar{u}(t) - \bar{w}(t), Q(t)(u_n(t) - w_n(t) + \bar{u}(t) - \bar{w}(t)) >_U] dt \\
& + < x_n(T) - \psi_n + \bar{x}(T) - \bar{\psi}, E(x_n(T) - \psi_n + \bar{x}(T) - \bar{\psi}) >_H \\
& \leq \int_0^T [\|x_n(t) - y_n(t) + \bar{x}(t) - \bar{y}(t)\|_H \|P(t)(x_n(t) - y_n(t) + \bar{x}(t) - \bar{y}(t))\|_H \\
& + \|u_n(t) - w_n(t) + \bar{u}(t) - \bar{w}(t)\|_U \|Q(t)(u_n(t) - w_n(t) + \bar{u}(t) - \bar{w}(t))\|_U] dt \\
& + \|x_n(T) - \psi_n + \bar{x}(T) - \bar{\psi}\|_H \|E(x_n(T) - \psi_n + \bar{x}(T) - \bar{\psi})\|_H \\
& \leq \|P\|_{L^\infty([0,T],L(H))} \int_0^T \|x_n(t) - y_n(t) + \bar{x}(t) - \bar{y}(t)\|_H \|x_n(t) - y_n(t) - \bar{x}(t) + \bar{y}(t)\|_H \\
& + \|Q(t)\|_{L^\infty([0,T],L(U))} \int_0^T \|u_n(t) - w_n(t) + \bar{u}(t) - \bar{w}(t)\|_U \|\|(u_n(t) - w_n(t) + \bar{u}(t) - \bar{w}(t))\|_U \\
& + \|E\|_{L(H)} \|x_n(T) - \psi_n + \bar{x}(T) - \bar{\psi}\|_H \|(x_n(T) - \psi_n + \bar{x}(T) - \bar{\psi})\|_H.
\end{aligned}$$

Comme, $P \in L^\infty([0,T], L(H)), Q \in L^\infty([0,T], L(U)), E \in L(U)$, en utilisant l'inégalité de Hölder nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|\tilde{J}_{z_n}(v_n, u_n) - \tilde{J}_{\bar{z}}(\bar{v}, \bar{u})| < & \; const \|x_n - y_n + \bar{x} - \bar{y}\|_{L^2(H)} . \|x_n - y_n - \bar{x} + \bar{y}\|_{L^2(H)} \\
& + \|u_n - w_n + \bar{u}(t) - \bar{w}_n\|_{L^2(U)} \|(u_n(t) - w_n(t) + \bar{u}(t) - \bar{w}(t))\|_{L^2(U)} \\
& + \|x_n(T) - \psi_n + \bar{x}(T) - \bar{\psi}\|_H \|(x_n(T) - \psi_n + \bar{x}(T) - \bar{\psi})\|_H.
\end{aligned}$$

En passant à la limite on conclut que :

$$\tilde{J}_{z_n}(v_n, u_n) \longrightarrow \tilde{J}_{\bar{z}}(\bar{v}, \bar{u}).$$

iii) En fin, vérifions la condition (iii).

Soient $z = (y, w, \psi) \in Z$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(v, u), (\varphi, p) \in X$, on pose

$$x_\alpha = x^{(v,u)}(t) + \alpha x^{(\varphi,p)}(t) - \alpha \hat{x}_C(t) \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Soit $\tilde{J}'_z(v, u)$ la dérivée directionnelle de $\tilde{J}z$ au (v, u) dans la direction (φ, p), alors

$$\tilde{J}'_z((v, u), (\varphi, p)) = \lim_{\alpha \longrightarrow 0} \frac{\tilde{J}_z((v, u) + \alpha(\varphi, p)) - \tilde{J}_z(v, u)}{\alpha}$$

avec

$$\tilde{J}_z((v,u)+\alpha(\varphi,p)) = \int_0^T [< x^{(v,u)+\alpha(\varphi,p)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v,u)+\alpha(\varphi,p)}(t) - y(t)) >_H$$
$$+ < (u+\alpha p)(t) - w(t), Q(t)((u+\alpha p)(t) - w(t)) >_U]dt$$
$$- < x^{(v,u)+\alpha(\varphi,p)}(T) - \psi, E(x^{(v,u)+\alpha(\varphi,p)}(T) - \psi) >_H$$
$$= \int_0^T [< x^{(v,u)}(t) + \alpha x^{(\varphi,p)}(t) - \alpha\hat{x}_C(t) - y(t), P(t)(x^{(v,u)}(t) + \alpha x^{(\varphi,p)}(t) - \alpha\hat{x}_C(t) - y(t) >_H$$
$$+ < u(t) + \alpha p(t) - w(t), Q(t)(u(t) + \alpha p(t) - w(t)) >_U]dt$$
$$- < x^{(v,u)}(T) + \alpha x^{(\varphi,p)}(T) - \alpha\hat{x}_C(T) - \psi, E(x^{(v,u)}(T) + \alpha x^{(\varphi,p)}(T) - \alpha\hat{x}_C(T) - \psi) >_H .$$

d'où

$$\frac{\tilde{J}_z((v,u)+\alpha(\varphi,p)) - \tilde{J}_z(v,u)}{\alpha}$$
$$= \frac{1}{\alpha}[\int_0^T [< x^{(v,u)}(t) + \alpha x^{(\varphi,p)}(t) - \alpha\hat{x}_C(t) - y(t), P(t)(x^{(v,u)}(t) + \alpha x^{(\varphi,p)}(t) - \alpha\hat{x}_C(t) - y(t)) >_H$$
$$+ < u(t) + \alpha p(t) - w(t), Q(t)(u(t) + \alpha p(t) - w(t)) >_U]dt$$
$$+ < x^{(v,u)}(t) + \alpha x^{(\varphi,p)}(t) - \alpha\hat{x}_C(t) - \psi, E(x^{(v,u)}(t) + \alpha x^{(\varphi,p)}(t) - \alpha\hat{x}_C(t) - \psi) >_H$$
$$- [\int_0^T [< x^{(\varphi,p)}(t) - y(t), P(t)(x^{(\varphi,p)}(t) - y(t)) >_H + < u(t) - w(t), Q(t)(u(t) - w(t)) >_U]dt$$
$$+ < x^{(\varphi,p)}(T) - \psi, E(x^{(\varphi,p)}(T) - \psi) >_H]]$$
$$= \frac{1}{\alpha}[\int_0^T < \alpha x^{(\varphi,p)}(t) - \alpha\hat{x}_C(t), P(t)(2x^{(v,u)}(t) - \alpha\hat{x}_C(t) + \alpha x^{(\varphi,p)}(t) - 2y(t)) >_H$$
$$+ < \alpha p(t), Q(t)(2u(t) + \alpha p(t) - 2w(t)) >_U]dt$$
$$+ < \alpha x^{(\varphi,p)}(T) - \alpha\hat{x}_C(T) - \psi, E(\alpha x^{(\varphi,p)}(T) + 2x^{(v,u)}(T) - \alpha\hat{x}_C(T) - 2\psi) >_H .$$

En faisant tendre α vers 0 nous obtenons :

$$\tilde{J}'_z((v,u)+\alpha(\varphi,p)) = \int_0^T [< x^{(\varphi,p)}(t) - \hat{x}_C(t), 2P(t)(x^{(v,u)}(t) - y(t)) >_H$$
$$+ < p(t), 2Q(t)(u(t) - w(t)) >_U]dt + < x^{(\varphi,p)}(T) - \hat{x}_C(t), 2E(x^{(v,u)}(T) - \psi) >_H$$
$$= 2[\int_0^T [< x^{(\varphi,p)}(t) - \hat{x}_C(t), P(t)(x^{(v,u)}(t) - y(t)) >_H$$
$$+ < p(t), Q(t)(u(t) - w(t)) >_U]dt + < x^{(\varphi,p)}(T) - \hat{x}_C(T), E(x^{(v,u)} - \psi) >_H].$$

Montrons que $\tilde{J}_z((v,u);.)$ est une fonction linéaire continue :

Soit (φ_n, p_n) une suite de X converge vers $(\bar{\varphi}, \bar{p})$ d'après Lemme 2.2.1, on a $x^{(\varphi_n,p_n)} \longrightarrow x^{(\bar{\varphi},\bar{p})}$

dans $C([0,T],H)$. Alors :

$$\begin{aligned}|\tilde{J}'_z((v,u),(\varphi_n,p_n)) - \tilde{J}'_z((v,u),(\bar{\varphi},\bar{p}))| &= \lim_{\alpha\longrightarrow 0}|\frac{\tilde{J}_z((v,u)+\alpha(\varphi,p)) - \tilde{J}_z(v,u)}{\alpha} \\ &- \lim_{\alpha\longrightarrow 0}\frac{\tilde{J}_z((v,u)+\alpha(\bar{\varphi},\bar{p})) - \tilde{J}_z(v,u)}{\alpha}| \\ &= \lim_{\alpha\longrightarrow 0}|\frac{\tilde{J}_z((v,u)+\alpha(\varphi_n,p_n)) - \tilde{J}_z((v,u)+\alpha(\bar{\varphi},\bar{p}))}{\alpha}|\end{aligned}$$

En utilisant $ii)$ nous aurons :

$$\tilde{J}'_z((v,u),(\varphi_n,p_n)) \longrightarrow \tilde{J}'_z((v,u),(\bar{\varphi},\bar{p})) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty,$$

d'où nous aurons la continuité de $\tilde{J}'_z((v,u),.)$

Soit $(\varphi_1,p_1),(\varphi_2,p_2) \in X$,nous avons :

$$\begin{aligned}&\tilde{J}'_z((v,u),(\varphi_1,p_1)+(\varphi_2,p_2)) = 2\int_0^T [< x^{(\varphi_1,p_1)+(\varphi_2,p_2)}(t) - \hat{x}_c(t), P(t)(x^{(v,u)} - y(t)) >_H \\ &+ < p_1(t)+p_2(t), Q(t)(u(t)-w(t)) >_U]dt + < x^{(\varphi_1,p_1)+(\varphi_2,p_2)}(T) - \hat{x}_c(T), E(x^{(v,u)}(T) - \psi) >_H \\ &= 2\int_0^T < x^{(\varphi_1,p_1)}(t) + x^{(\varphi_2,p_2)}(t) - \hat{x}_c(t) - \hat{x}_c(t), P(t)(x^{(v,u)} - y(t)) >_H dt \\ &+ 2\int_0^T < p_1(t)+p_2(t), Q(t)(u(t)-w(t)) >_U dt \\ &+ 2 < x^{(\varphi_1,p_1)}(T) + x^{(\varphi_2,p_2)}(T) - \hat{x}_c(T) - \hat{x}_c(T), E(x^{(v,u)}(T) - \psi) >_H \\ &= 2\int_0^T < x^{(\varphi_1,p_1)}(t) - \hat{x}_c(t), P(t)(x^{(v,u)} - y(t)) >_H dt + 2\int_0^T < p_1(t), Q(t)(u(t)-w(t)) >_U dt \\ &+ 2 < x^{(\varphi_1,p_1)}(T) - \hat{x}_c(T), E(x^{(v,u)}(T) - \psi) >_H + 2\int_0^T < x^{(\varphi_2,p_2)}(t) - \hat{x}_c(t), P(t)(x^{(v,u)} - y(t)) >_H dt \\ &+ 2\int_0^T < p_2(t), Q(t)(u(t)-w(t)) >_U dt + 2 < x^{(\varphi_2,p_2)}(T) - \hat{x}_c(T), E(x^{(v,u)}(T) - \psi) >_H \\ &= \tilde{J}'_z((v,u),(\varphi_1,p_1)) + \tilde{J}'_z((v,u),(\varphi_2,p_2)).\end{aligned}$$

Pour tout $(\varphi,p) \in X$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\begin{aligned}\tilde{J}'_z((v,u),\alpha(\varphi,p)) &= 2\int_0^T < x^{\alpha(\varphi,p)}(t) - \hat{x}_c(t), P(t)(x^{(v,u)} - y(t)) >_H dt \\ &+ 2\int_0^T < \alpha p(t), Q(t)(u(t)-w(t)) >_U dt + 2 < x^{\alpha(\varphi,p)}(T) - \hat{x}_c(T), E(x^{(v,u)}(T) - \psi) >_H \\ &= \alpha(2\int_0^T < x^{(\varphi,p)}(t) - \hat{x}_c(t), P(t)(x^{(v,u)} - y(t)) >_H dt \\ &= \alpha\tilde{J}'_z((v,u),(\varphi,p)),\end{aligned}$$

de plus le Gâteaux différentielle $D\tilde{J}_z(.)$ de $\tilde{J}_z(.)$ est donnée par :

$$D\tilde{J}_z((v,u),(\varphi,p)) = \tilde{J}'_z((v,u),(\varphi,p)). \qquad \square$$

3.2 Équivalence entre le problème bien posé et l'affinité d'un contrôle

Proposition 3.2.1 *Soient A le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continue, $B \in L^2(L(U,H))$ et $C \in L^1(H)$. Supposons que les hypothèses (A'),(B) et (D) sont vérifiées. Soit $f(t,u) = B(t)u + C(t)$ dans le problème :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t,u(t)) \\ x(0) = v \end{cases}$$

alors les propriétés suivantes sont satisfaits :

i) Pour tout $z \in Z$ il existe un unique $(v^z, u^z) = \arg\min(X, J_{z^*})$,

ii) si z_n une suite convergente vers z^* dans Z tel que :

$$(v^n, u^n) = \arg\min(X, J_{z^*}), \qquad (v^*, u^*) = \arg\min(X, J_{z^*})$$

alors $(v^n, u^n) \longrightarrow (v^*, u^*)$ dans X.

Preuve :

i) Soit $z = (y, w, \psi) \in Z$, comme $\mathcal{A} \neq \emptyset$, de l'hypothèse (A'), on aura pour tout (v,u) :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_z(v_n, u_n) = & \int_0^T [< x_n(t) - y(t), P(t)(x_n(t) - y(t)) >_H \\ & + < u_n(t) - w(t), Q(t)(u_n(t) - w(t)) >_U]dt + < x_n(T) - \psi, E(x_n(T) - \psi) >_H \\ & \geq a(\|x^{(v,u)} - y\|^2_{L^2(H)} + \|u - w\|^2_{L^2(U)}). \end{aligned}$$

Où $x_n = x^{(v_n,u_n)}$ pour tout $n \in N$.

$\tilde{J}_z$ est atteint son minimum.

Soit (v_n, u_n) une suite minimisante pour $\tilde{J}_z$ c'est à dire,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{J}_z(v_n, u_n) = \inf_{(v,u)\in\mathcal{A}} \tilde{J}_z(v,u)$$

Comme $(v_n, u_n) \in \mathcal{A}$ ainsi $\|u_n\|_{L^2(U)}$ est bornée, et comme $v_n \in K_1$ et d'après l'hypothèse (B) il existe $v_0 \in K_1, u_0 \in L^2(U)$ et une sous suite (v_{n_k}, u_{n_k}) convergente de telle sorte que :

$$v_{n_k} \rightharpoonup v_0 \text{ dans } H \text{ et } u_{n_k} \rightharpoonup u_0 \text{ dans } L^2(U)$$

et du Lemme 1.2.1 et l'hypothèse (B) nous aurons

$$x_{n_k} \rightharpoonup x_0 \text{ in } L^2(H) \text{ et } (x_0, u_0) \in K_2$$
$$\text{avec } x_0 = x^{(v_0,u_0)}$$

par conséquent $(v_0, u_0) \in \mathcal{A}$, et $\mathcal{A}$ est fermé.
Par $\lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t) = x^{\lambda(v_1,u_1)+(1-\lambda)(v_2,u_2)}(t)$ et la convexité de K_1 nous aurons la convexité de $\mathcal{A}$.
Montrons que $\tilde{J}_z$ est convexe, nous avons

$$\begin{aligned}
&< D\tilde{J}_z((v_2,u_2),(v_1,u_1)-(v_2,u_2) > \\
&\quad = 2\int_0^T < x^{(v_1,u_1)-(v_2,u_2)}(t) - \hat{x}_C(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) >_H dt \\
&\quad + 2\int_0^T < u_1(t) - u_2(t), Q(t)(u_2(t) - w(t)) >_U dt \\
&\quad + 2 < x^{(v_1,u_1)-(v_2,u_2)}(T) - \hat{x}_C(T), E(x^{(v_2,u_2)} - \psi) >_H,
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
&2 < x^{(v_1,u_1)}(t) - x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) > \\
&= 2 < x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) > - < x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) > \\
&= 2(< x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - x^{(v_1,u_1)}(t)) > \\
&+ < x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t) > - < x^{(v_2,u_2)}(t)y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) >) \\
&=< x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)} - y(t)) > - < x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)} - y(t)) > \\
&+ [< x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)} - y(t)) > - < x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)} - y(t)) > \\
&+ 2 < x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - x^{(v_1,u_1)}(t) >] \\
&=< x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)} - y(t)) > - < x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)} - y(t)) > \\
&+ < x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) > + < x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - x^{(v_1,u_1)}(t) > \\
&- < x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) > \\
&=< x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)} - y(t)) > - < x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)} - y(t)) > \\
&+ < x^{(v_1,u_1)}(t) - x^{(v_2,u_2)}(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)} - y(t)) > \\
&+ < x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - x^{(v_1,u_1)}(t) > \\
&=< x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t)) > - < x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) > \\
&+ < x^{(v_1,u_1)}(t) - x^{(v_2,u_2)}(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - x^{(v_1,u_1)}(t) > \\
&=< x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)} - y(t)) > - < x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)} - y(t)) > \\
&- < x^{(v_1,u_1)}(t) - x^{(v_2,u_2)}(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)}(t) - x^{(v_2,u_2)}(t)) > \\
&\leq< x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)(t)} - y(t)) > - < x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) > \\
&- \alpha \parallel x^{(v_1,u_1)}(t) - x^{(v_2,u_2)}(t) \parallel \\
&\leq< x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)} - y(t)) > - < x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) > .
\end{aligned}$$

Par les mêmes calculs nous aurons

$$\begin{aligned}&2 < u_1(t) - u_2(t), Q(t)(u_2(t) - w(t)) > \\ &\quad \leq < u_1(t) - w(t), Q(t)(u_1)(t) - w(t)) > - < u_2(t) - w(t), Q(t)(u_2)(t) - w(t)) > .\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}&2 < x^{(v_1,u_1)-(v_2,u_2)}(T) - \hat{x}_C(T), E(x^{(v_2,u_2)} - \psi) > \\ &\quad \leq < x^{(v_1,u_1)}(T) - \psi, P(t)(x^{(v_1,u_1)}(T) - \psi) > - < x^{(v_2,u_2)}(T) - \psi, P(t)(x^{(v_2,u_2)}(T) - \psi) > .\end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned}&< D\tilde{J}_z((v_2, u_2), (v_1, u_1) - (v_2, u_2) > \\ &\leq \int_0^T [< x^{(v_1,u_1)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_1,u_1)} - y(t)) > + < u_1(t) - w(t), Q(t)(u_1)(t) - w(t)) >]dt \\ &+ < x^{(v_1,u_1)}(T) - \psi, P(t)(x^{(v_1,u_1)}(T) - \psi) > \\ &- \int_0^T [< x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t), P(t)(x^{(v_2,u_2)}(t) - y(t)) > + < u_2(t) - w(t), Q(t)(u_2)(t) - w(t)) >]dt \\ &- < x^{(v_2,u_2)}(T) - \psi, P(t)(x^{(v_2,u_2)}(T) - \psi) > \\ &\leq \tilde{J}_z(v_1, u_1) - \tilde{J}_z(v_2, u_2).\end{aligned}$$

Le Théorème 1.5.2, nous aurons la convexité de $\tilde{J}_z$.
Soit (v_n, u_n) une suite de points de X converge vers (v, u) et d'après la condition (ii) de Lemme 3.1.1 nous avons

$$\tilde{J}_z(v_n, u_n) \longrightarrow \tilde{J}_z(v, u) \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

c'est à dire $\tilde{J}_z$ est continue,d'ou la semi-continuité inférieure.
d'après Théorème 1.3.6, par conséquent $(v_0, u_0) \in \mathcal{A}$ nous avons

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} inf J_z(v_{n_k}, u_{n_k}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} inf \tilde{J}_z(v_{n_k}, u_{n_k}) \geq \tilde{J}_z(v_0, u_0) = J_z(v_0, u_0) = \underset{(v,u)\in\mathcal{A}}{inf} \tilde{J}_z(v, u)$$

ce qui implique (v_0, u_0) est un minimum de $\tilde{J}_z$. Le Théorème 1.3.5 nous donne l'unicité de ce minimum

ii) Soit $z_n = (y_n, w_n, \psi_n)$ une suite qui convergente vers $z^* = (y^*, w^*, \psi^*) \in Z$, et

$$(v^n, u^n) = \arg\min(X, J_{z_n}), \qquad (v^*, u^*) = \arg\min(X, J_{z^*}),$$

donc (v^n, u^n) est la suite des minimums unique des problèmes d'optimisation global (X, J_{z_n}) pour tout $(v, u) \in X$ et on a

$$\tilde{J}_{z_n}(v, u) = \tilde{J}_{z_n}(v^n, u^n) \geq a(\|x^n - y_n\|^2_{L^2(H)} + \|u^n - w_n\|^2_{L^2(U)}.)$$

Où $x^n = x^{(v^n,u^n)}$ pour tout $n \in N$

D'après Lemme 3.1.1 nous avons

$$\tilde{J_{z_n}}(v,u) \longrightarrow \tilde{J_{z^*}}(v,u) \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

comme dans la preuve (i), il existe $(\varphi, p) \in X$, $\varphi \in k_1$, et une sous suite $(v^{n_k}, u^{n_k}) \in \mathcal{A}$ tel que

$$v^{n_k} \rightharpoonup \varphi \; dans \; H, \, u^{n_k} \rightharpoonup p \; dans \; L^2(U),$$

d'après le Lemme 2.2.1

$$x^{n_k} \rightharpoonup x^{(\varphi,p)} dans \;\; L^2(H). \tag{3.8}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ prenons $T_{n_k} : L^2(H) \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$T_{n_k}(m) = \int_0^T < m(t), P(t)(x^{(\varphi,p)} - y_{n_k}(t)) >_H dt.$$

Pour tout $m \in L^2(H)$, d'après l'inégalité de *Hölder* nous avons :

$$\begin{aligned} |T_{n_k}(m)| &\leq \left| \int_0^T < m(t), P(t)(x^{(\varphi,p)} - y_{n_k}(t)) >_H dt \right| \\ &\leq const. \|m\|_{L^2(H)} \|x^{(\varphi,p)} - y_{n_k}(t)\|_{L^2(H)}, \end{aligned}$$

de la convergence de $(x^{(n_k)})$ vers $(x^{(\varphi,p)})$ et la convergence de (y_{n_k}) vers y^* nous aurons à partir duquel

$$T_{n_k} \in (L^2(H)^*) = L^2(H) \text{ et } T_{n_k} \longrightarrow T_0,$$

où

$$T_0(m) = \int_0^T < m(t), P(t)(x^{(\varphi,p)} - y^*(t) >_H dt,$$

ainsi de (3.8) nous aurons :

$$\int_0^T < x^{(\varphi,p)-(v^{n_k},u^{n_k})}(t) - \hat{x}_c(t), P(t)(x^{(\varphi,p)} - y_{n_k}(t)) >_H dt \longrightarrow 0. \tag{3.9}$$

De même façons et la convergence de (u^{n_k}) vers p et la convergence de w^{n_k} vers w^* nous aurons :

$$\int_0^T < p(t) - u^{n_k}(t), Q(t)(p(t) - w_{n_k}(t) >_U dt \longrightarrow 0. \tag{3.10}$$

Par ailleurs , si $h \in h$ du Théorème 1.2.15 nous aurons

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} < h, \int_0^T S(t-s)B(s)[u^{n_k}(s) - p(s)]ds >_H = \lim_{k \longrightarrow \infty} < B^*(s)S^*(T-s)h, u^{n_k}(s) - p(s) >_U ds = 0.$$

Depuis

$$\int_0^T \|B^*(s)S^*(T-s)h\|_H^2 ds \leq sup_{[0,T]} \|S(\tau)\|_{L(H)}^2 \|B^*\|_{L^2(L(H,U))}^2 \|h\|_H^2 < +\infty.$$

En suite,

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\longrightarrow\infty} < h, x^{(\varphi,p)}(T) - x^{(n_k)}(T) > \\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty} < h, S(T)(v^{n_k} - \varphi) + \int_0^T S(T-s)B(s)[u^{n_k} - p(s)]ds >_H \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour tout $h \in H$, à partir duquel

$$x^{(\varphi,p)}(T) - x^{n_k}(T) \rightharpoonup 0 \in H,$$

et

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} < x^{(\varphi,p)-(v^{n_k},u^{n_k})}(t) - \hat{x}_c(t), E(x^{(\varphi,p)} - \psi_{n_k}) >_H = 0. \tag{3.11}$$

Alors que (3.9),(3.10) et (3.11)

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} < D\tilde{J}_{z_{n_k}}(\varphi,p), ((\varphi,p) - (v^{n_k},u^{n_k})) >= 0. \tag{3.12}$$

Pour $(v^{n_k},u^{n_k}) = \arg\min(X, J_{z_{n_k}})$ nous avons

$$\tilde{J}_{z_{n_k}}(\varphi,p) \geq \tilde{J_{z_{n_k}}}(v^{n_k},u^{n_k}) \geq 0.$$

Par le Théorème 1.5.3 nous avons $< D\tilde{J}_{z_{n_k}}(v^{n_k},u^{n_k}), ((\varphi,p) - (v^{n_k},u^{n_k})) >\geq 0$ et donc

$$\begin{aligned}
&< D\tilde{J}_{z_{n_k}}(\varphi,p), ((\varphi,p) - (v^{n_k},u^{n_k})) > \\
&\geq < D\tilde{J}_{z_{n_k}}(\varphi,p), ((\varphi,p) - (v^{n_k},u^{n_k})) > \\
&- < D\tilde{J}_{z_{n_k}}(v^{n_k},u^{n_k})) > - < D\tilde{J}_{z_{n_k}}(v^{n_k},u^{n_k}), ((\varphi,p) - (v^{n_k},u^{n_k})) > \\
&= 2\int_0^T < x^{(\varphi,p)-(v^{n_k},u^{n_k})}(t) - \hat{x}_c(t), P(t)(x^{(\varphi,p)} - y_{n_k}(t)) >_H dt \\
&+ 2\int_0^T < p(t) - u^{n_k}(t), Q(t)(p(t) - w_{n_k}(t)) >_U dt \\
&+ < x^{(\varphi,p)-(v^{n_k},u^{n_k})}(t) - \hat{x}_c(t), E(x^{(\varphi,p)} - \psi_{n_k}(t)) >_H \\
&- 2\int_0^T < x^{(\varphi,p)-(v^{n_k},u^{n_k})}(t) - \hat{x}_c(t), P(t)(x^{(v^{n_k},u^{n_k})} - y_{n_k}(t)) >_H dt \\
&- 2\int_0^T < p(t) - u^{n_k}(t), Q(t)(p(t) - w_{n_k}(t)) >_U dt \\
&- 2 < x^{(\varphi,p)-(v^{n_k},u^{n_k})}(t) - \hat{x}_c(t), E(x^{(v^{n_k},u^{n_k})} - \psi_{n_k}) >_H \\
&= 2\int_0^T < x^{(\varphi,p)}(t) - x^{n_k}(t), P(t)(x^{(\varphi,p)} - x^{n_k}(t)) >_H dt \\
&+ 2\int_0^T < p(t) - u^{n_k}(t), Q(t)(p(t) - u^{n_k}(t)) >_U dt \\
&+ 2 < x^{(\varphi,p)}(T) - x^{n_k}(T), E(x^{(\varphi,p)}(T) - x^{n_k}(T)) >_H \\
&\geq 2a(\|x^{(\varphi,p)} - x^{n_k}\|^2_{L^2([0,T],H)} + \|p - u^{n_k}\|^2_{L^2([0,T],U)}).
\end{aligned}$$

Par la relation (3.12), on obtient

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} a(\|x^{(\varphi,p)} - x^{n_k}\|^2_{L^2([0,T],H)} + \|p - u^{n_k}\|^2_{L^2([0,T],U)}) = 0.$$

Et donc

$$u^{n_k} \longrightarrow p \;\; dans \;\; L^2(U) \;\; et \;\; x^{n_k} \longrightarrow x^{(\varphi,p)} \;\; dans \;\; L^2(H).$$

D'après l'hypothèse (D) prenons une autre sous suite $\|v^{n_{k_j}} - \varphi\| \longrightarrow 0$

et la condition (ii) de Lemme 3.1.1 nous donne

$$J_{z^*}(v,u) \geq \tilde{J}_{z^*}(v,u) = \lim_{j\longrightarrow\infty} \tilde{J}_{z_{n_{k_j}}}(v,u) \geq \lim_{j\longrightarrow\infty} \tilde{J}_{z_{n_{k_j}}}(v^{n_{k_j}}, u^{n_{k_j}}) = J_{z^*}(\varphi,p).$$

Pour tout $(v,u \in X)$, comme $argmin(X, J_z^*)$ est unique, nous aurons

$$(\varphi,p)(v^*,u^*) \;\; \text{et} \;\; (v^n,u^n) \to (v^*,u^*).$$

□

Théorème 3.2.2 *Soit A le générateur de semi groupe fortement continue $B \in L^2(L(U,H))$ et $C \in L^1(H)$. Supposons que les hypothèses (A′),(B), et (D) sont vérifiées et soit $f(t,u) = B(t)u + C(t)$ dans le problème (3.1).*
Alors, le problèmes (X, J_{z^*}) défini par (3.2) est bien posé pour chaque $z^* \in Z$.

Preuve :

Pour $z^* \in Z$ le problème optimal (X, J_{z^*}) est bien posé si les condition suivantes sont vérifiées :
(1) il existe un unique $q^* = \arg\min(X, J_{z^*})$,
(2) la fonction V(z) est finie pour toute $z \in D$,
(3) pour toutes suite $z_n \in Z$ et $q_n \in X$ $\;z_n \longrightarrow z^*$ *et* $J_{z_n}(q_n) - V(z_n) \longrightarrow 0$
nous avons :

$$q_n \longrightarrow q^* \;\; et \quad V(z_n) \longrightarrow V(z^*)$$

1) de (i) de la Proposition 3.2.2 il existe un unique minimum $q^* = \arg\min(X, J_{z^*})$.

2) Par l'hypothèse (A') nous avons pour tous $z = (y,w,\psi) \in Z$ et $(v,u) \in X$

$$\begin{aligned}\tilde{J}_z(v,u) = \int_0^T & [<x^{(v,u)}(t) - y(t), p(t)(x^{(v,u)} - y(t))>_H \\ & + <u(t) - w(t), Q(t)(u(t) - w(t)>_U]dt \\ & + <x^{(v,u)}(T) - \psi, E(x^{(v,u)} - \psi)>_H \\ & \geq a(\| x^{(v,u)}(t) - y(t) \|^2 + \| u(t) - w(t) \|^2 \\ & \geq 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

c'est à dire $V(z) \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in Z$, d'ou nous avons (2).

3) Maintenant on démontre la condition (3).

a) Soit $z = (x, y, \psi) \in Z$, on pose $(v^z, u^z) = \arg\min(X, J_z) \in \mathcal{A}$. Nous avons pour tout $x^z = x^{(v^z,u^z)}$

$$J_z(v, u) - V(z) \geq \tilde{J}_z(v, u) - V(z),$$

comme

$$\begin{aligned}
&\tilde{J}_z(v, u) - V(z) \\
&\quad = \int_0^T [<x^{(v,u)}(t) - y(t), p(t)(x^{(v,u)}(t) - y(t))>_H \\
&\quad + <u(t) - w(t), Q(t)(u(t) - w(t))>_U]dt + <x^{(v,u)}(T) - \psi, E(x^{(v,u)}(T) - \psi)>_H \\
&\quad - \int_0^T [<x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t), p(t)(x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t))>_H \\
&\quad + <u^z(t) - w(t), Q(t)(u^z(t) - w(t))>_U]dt - <x^{(v^z,u^z)}(T) - \psi, E(x^{(v^z,u^z)}(T) - \psi)>_U,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&<x^{(v,u)}(t) - y(t), p(t)(x^{(v,u)}(t) - y(t))>_H - <x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t), p(t)(x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t))>_H \\
&\quad = <x^{(v,u)}(t) - x^{(v^z,u^z)}(t), p(t)(x^{(v,u)}(t) - x^{(v^z,u^z)}(t))>_H \\
&\quad + <x^{(v,u)}(t) - x^{(v^z,u^z)}(t), p(t)(x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t)>_H \\
&\quad + <x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t), p(t)(x^{(v,u)}(t) - x^{(v^z,u^z)}(t))>_H \\
&\quad + <x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t), p(t)(x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t))>_H \\
&\quad - <x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t), p(t)(x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t))>_H \\
&\quad = <x^{(v,u)}(t) - x^{(v^z,u^z)}(t), p(t)(x^{(v,u)}(t) - y(t))>_H \\
&\quad + <x^{(v^z,u^z)}(t) - y(t), p(t)(x^{(v,u)}(t) - x^{(v^z,u^z)}(t))>_H \\
&\quad = <x^{(v,u)-(v^z,u^z)}(t) - \hat{x}_C(t), p(t)(x^{(v,u)}(t) + x^{(v^z,u^z)}(t) - 2y(t)>_H,
\end{aligned}$$

de la même façon

$$\begin{aligned}
&<u(t) - w(t), Q(t)(u(t) - w(t))>_U + <u^z(t) - w(t), Q(t)(u^z(t) - w(t))>_U \\
&\quad = <u(t) - u^z(t), Q(t)(u(t) + u^z(t) - 2w(t)>_U,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&<x^{(v,u)}(T) - \psi, E(x^{(v,u)}(T) - \psi)>_U - <x^{(v^z,u^z)}(T) - \psi, E(x^{(v^z,u^z)}(T) - \psi)>_U \\
&\quad = <x^{(v,u)-(v^z,u^z)}(T) - \hat{x}_C(t), E(x^{(v,u)}(T) + x^{(v^z,u^z)}(T) - 2\psi)>_U,
\end{aligned}$$

d'après (iii) du Lemme 3.1.1

$$
\begin{aligned}
&\tilde{J}_z(v,u) - V(z) \\
&= <x^{(v,u)-(v^z,u^z)}(t) - \hat{x}_C(t), p(t)(x^{(v,u)}(t) + x^{(v^z,u^z)}(t) - 2y(t)>_H \\
&+ <u(t) - u^z(t), Q(t)(u(t) + u^z(t) - 2w(t))>_U \\
&+ <x^{(v,u)-(v^z,u^z)}(T) - \hat{x}_C(t), E(x^{(v,u)}(T) + x^{(v^z,u^z)}(T) - 2\psi)>_H \\
&= 2\int_0^T <x^{(v,u)-(v^z,u^z)} - \hat{x}_C(t), p(t)(x^{(v^z,u^z)} - y(t)>_H dt \\
&+ 2\int_0^T <p(t), Q(t)(u(t) - w(t))>_U dt \\
&+ 2<x^{(v,u)-(v^z,u^z)}(T), E(x^{(v,u)}(T) + x^{(v^z,u^z)}(T) - \psi)>_U \\
&+ \int_0^T [<x^{(v,u)}(t) - x^{(v^z,u^z)}(t), p(t)(x^{v,u})(t) - x^{(v^z,u^z)}(t))>_H + <u(t) - u^z(t), Q(t)(u(t) - u^z(t))>_U]dt \\
&= <D\tilde{J}_z(v^z,u^z), (v - v^z, u - u^z)> \\
&+ \int_0^T [<x^{(v,u)}(t) - x^{(v^z,u^z)}(t), p(t)(x^{v,u})(t) - x^{(v^z,u^z)}(t))>_H + <u(t) - u^z(t), Q(t)(u(t) - u^z(t))>_U]dt
\end{aligned}
$$

d'où

$$\tilde{J}_z(v,u) - V(z) \geq a(\| x^{(v,u)} - x^{(v^z,u^z)} \|_{L^2(H)} + \| u - u^z \|_{L^2(U)}). \tag{3.14}$$

ceci en utilisant le Théorème 1.5.3

Pour la démonstration de la condition (3), considérons la suite $z_n = (y_n, w_n, \psi_n)$ telle que(z_n) converge vers z^*, et (u_n)la suite asymptotiquement minimisée qui correspond à z_n, par la relation(3.10) nous avons :

$$\tilde{J}_{z_n}(v_n,u_n) - V(z_n) \geq a(\| x^{(v_n,u_n)} - x^{z_n} \|^2_{L^2(H)} + \| u_n - u^{z_n} \|^2_{L(U)^2}),$$

comme

$$V(z_n) = \{\inf J_{z_n}(q_n), q_n \in X\},$$

nous aurons

$$\underset{n\to\infty}{lim}(\tilde{J}_{z_n}(q_n) - V(z_n)) = 0,$$

et donc

$$\| x^{(v_n,u_n)} - x^{(z_n)} \|_{L^2(H)} \to 0 \quad et \quad \| u_n - u^{z_n} \|_{L^2(U)} \to 0.$$

c'est à dire, $q_n = \arg\min(X, J_{z_n})$. D'après (ii) de la Proposition 3.3.1 et par (i) de Lemme 2.2.1, la suite u_n converge vers u^* dans $L^2(U)$, et $x^{(v_n,u_n)}$ converge vers $x^{(v^*,u^*)}$ dans $C([0,T],H)$, avec $(v^*,u^*) = \arg\min(X, J_{z^*})$, ainsi de l'hypothèse (D) il existe une sous suite v_{n_k} converge vers v^* dans H, alors (v_n,u_n) converge vers (v^*,u^*) dans X, donc la suite (q_n) converge vers q^* dans X, avec $q^* = \arg\min(X, J_{z^*})$.

On conclut que $V(z_n) \longrightarrow V(z^*)$. $\square$

Proposition 3.2.3 *Soit A générateur d'un semi groupe fortement continue et (X, J_z^*) le problème défini par :*

$$J_{z^*}(v,u) = \begin{cases} \tilde{J}_{z^*}(v,u) & si (v,u) \in A \\ +\infty & sinon \end{cases} \tag{3.15}$$

avec $K_1 \times K_2 = H \times L^2(H) \times L^2(U)$
supposons que l'hypothèse (A_1') et (C) vérifiées.
Si le problème précédent est bien posé pour tout $z^* \in Z$ alors l'ensemble :

$$G = \{(m,u,\psi) \in Z : \exists v \in H \quad tel\ que \quad m = x^{(v,u)}, et \quad \psi = x^{(v,u)(T)}\} \tag{3.16}$$

est convexe.

Remarque 3.2.4 *Si (A_1') vérifiée, et soit $z_i = (y_i, w_i, \psi_i) \in Z$, $i = (1,2)$*
la fonction $< .,. >_1$ définie sur Z

$$< z_1, z_2 >_1 = \int_0^T [< y_1(t), P(t)y_2(t) >_H + < w_1(t), Q(w_2(t)) >_U]dt + < \psi_1, E\psi_2 >_H,$$

est un produit scalaire induit sur$Z$ une structure hilbertienne équivalente à la structure usuelle Nous notons par $\|.\|_1$ la norme correspondante.

Preuve :
Soit $G = \{(m,u,\psi) \in Z : \exists v \in H \quad tel\ que \quad m = x^{(v,u)}, et \quad \psi = x^{(v,u)(T)}\}$.
Démonstration que si le problème définie par (3.15) est bien posé pour tout $z^* \in Z$ alors G est convexe, c'est à dire que G est de *Čebyšev* et approximativement compact .
Soit $z^* = (y^*, w^*, \psi^*) \in Z$, d'après (3.3), il existe un unique minimum $q^* = \arg\min(X, J_{z^*})$. Pour $p^* = (x^*, u^*, x^*(T))$ tel que $x^* = (x^{(v^*,u^*)})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|p^* - z^*\|_1^2 &= < p^* - z^*, p^* - z^* >_1 \\ &= \int_0^T [< x^{(v^*,u^*)}(t) - y^*(t), P(t)(x^{(v^*,u^*)} - y^*(t)) > \\ &+ < u^*(t) - w^*(t), Q(t)(u^*(t) - w^*(t)) >]dt \\ &+ < x^{(v^*,u^*)}(T) - \psi^*, E(x^{(v^*,u^*)}(T) - \psi^*) > \\ &= \tilde{J}_{z^*}(v^*, u^*), \end{aligned}$$

et comme $q^* = \arg\min(X, J_{z^*})$ alors

$$\tilde{J}_{z^*}(v^*, u^*) \leq \tilde{J}_{z^*}(v,u), \quad pour\ tout \quad z \in X,$$

et par suite, pour tout $z \in X$ avec $z \neq z^*$

$$\begin{aligned} \|p^* - z^*\|_1^2 < \int_0^T [&< x^{(v,u)}(t) - y^*(t), P(t)(x^{(v,u)} - y^*(t)) > \\ &+ < u(t) - w^*(t), Q(t)(u(t) - w^*(t)) >]dt \\ &< x^{(v^*,u^*)}(T) - \psi^*, E(x^{(v^*,u^*)}(T) - \psi^*) > \\ &=< p - z^*, p - z^* >_1 = \|p - z^*\|_1^2, \end{aligned}$$

et donc

$$\|p^* - z^*\|_1^2 < \|p - z^*\|_1^2, \quad pour\ tout \quad p = (x^{(v,u)}, u, x^{(v,u)}(T)) \in \ et\ p \neq p^* \tag{3.17}$$

On conclut que G est de *Čebyšev*

Soit $z^* = (y^*, w^*, \psi^*) \in Z$ et (m_n, u_n, s_n) une suite l'élément de G telle que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|(m_n, u_n, s_n) - z^*\|_1 = \inf\{\|p - z^*\|_1, p \in G\}. \tag{3.18}$$

Par la définition de G il existe $v_n \in H$ tel que $s_n = x^{(v_n,u_n)}(T)$ et la relation (3.18) on peut écrire

$$\tilde{J}_{z^*}(v_n, u_n) \longrightarrow V(z^*).$$

Alors (v_n, u_n) est une suite asymptotiquement minimisée par rapport à $z_n = z^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par (3.5) du problème bien posé on conclut que pour tout z^* la suite (v_n, u_n) converge vers (v^*, u^*) dans X. D'après l'hypothèse (C), il existe une sous suite u_{n_k} telle que

$$\|f(., u_{n_k}(.)) - f(., u^*(.))\|_L^1(H) \longrightarrow 0.$$

Et depuis

$$\begin{aligned} \|x^{(v_{n_k},n_{n_k})}(T) - x^{(v^*,u^*)}(T)\|_H &= \|S(t)v_{n_k} + \int_0^T S(t-s)[B(s)u_{n_k}(s) + C(s)]ds \\ &- S(t)v^* - \int_0^T S(t-s)[B(s)u^*(s) - C(s)]ds\|_H \\ &\leq \sup_{[0,T]} \|S(t)\|_{L(H)}(\|(v_{n_k} - v^*)\|_H + \int_0^T \|f(s, u_{n_k}(s)) - f(s, u^*(s))\|_H ds). \end{aligned}$$

passant à la limite nous aurons

$$(m_{n_k}, u_{n_k}, s_{n_k}) \longrightarrow (x^{(v^*,u^*)}, u^*, x^{(v^*,u^*)}(T).$$

et la convexité de G vient du Corollaire 1.6.3 . $\square$

Définition 3.2.5 *Soit $t \in [0, T]$ et Soit $\eta_{t_0} : X \to C([0, T - t_0], H)$ défini par :*

$$\eta_{t_0}(v, u) = x^{(v,u)}(t_0 + \tau) \ avec\ \tau \in [0, T - t_0]. \tag{3.19}$$

Lemme 3.2.6 *Supposons que les hypothèses de la Proposition 3.2.3 sont vérifiées soit* $t \in [0, T]$ *la fonction définie par :*

$$\eta_{t_0} : X \to C([0, T - t_0], H)$$
$$\eta_{t_0}(v, u) = x^{(v,u)}(t_0 + \tau) \quad avec \quad \tau \in [0, T - t_0],$$

donc si le graphe de η_{t_0} *est convexe, alors* η_{t_0} *est affine.*

Preuve :

Montrons que η_{t_0} est affine.

Soit $h_i = (v_i, u_i, \eta_{t_0}(v_i, u_i)) \in graph(\eta_{t_0})$ avec $i = 1, 2$ si notre ensemble $m_i = x^{(v_i,u_i)}$ à partir de (3.19), nous avons

$$(m_i, u_i, \eta_{t_0}(v_i, u_i)) \in graph(\eta_{t_0}) = (m_i, u_i, x^{(v_i,u_i)}(T)) \in G.$$

Par la convexité de G (Proposition 3.2.3) on a pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$(\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2, \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2, \lambda x^{(v_1,u_1)}(T) + (1 - \lambda)x^{(v_2,u_2)}(T)) \in G,$$

c'est à dire, pour tout $v \in H$,

$$\lambda m_1(t) + (1 - \lambda)m_2(t) = \lambda x^{(v_1,u_1)}(T) + (1 - \lambda)x^{(v_2,u_2)}(T) = x^{(v,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)}(T)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

En particulier on obtient pour t=0

$$\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 = v,$$

et pour $t = t_0 + T$ avec $\tau \in [0, T - t_0]$

$$\lambda x^{(v_1,u_1)}(t_0 + T) + (1 - \lambda)x^{(v_2,u_2)}(t_0 + T) = x^{(v,u)}(t_0 + T),$$

où $u = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$

par conséquent

$$\lambda \eta_{(t_0)}(v_1, u_1)(T) + (1 - \lambda)\eta_{(t_0)}(v_2, u_2)(T) = \eta_{(t_0)}(v, u)(T),$$

pour tout $\tau \in [0, T - t_0]$ existe, le graphe $\eta_{(t_0)}$est convexe et par Lemme 1.4.2, $\eta_{(t_0)}$est affine.□

Théorème 3.2.7 *Soit A le générateur d'un semi groupe fortement continu et* $(X, J_{(z^*)})$ *est le problème défini par(3.2) avec* $K_1 \times K_2 = H \times L^2(H) \times L^2(U)$*. Supposons que les hypothèses* (A_1') *et* (C) *sont vérifiées et la fonction f dans (3.1) tel que :*

$$f(., u) \in L^1([0, T], H) \quad pour \quad tout \quad u \in U.$$

Si le problème défini par (3.2) est bien-posé pour tous $z^* \in Z$, alors il existe

$$B : [0,T] \to L(U,H) \text{ et } C : [0,T] \to H.$$

Tel que $f(.,u) = B(t)u + c(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ et $u \in U$.

Preuve :

Montrons que f est affine sur H, c'est à dire pour tous $p_1, p_2 \in H$, et tout $b \in \mathbb{R}$,

$$f(t, bp_1 + (1-b)p_2) = bf(t,p_1) + (1-b)f(t,p_2). \tag{3.20}$$

Soit $(v_i, p_i) \in H \times U$ et $x^i = x^{(v_i,p_i)}$ solutions de (3.1) avec $i = 1,2$ et soit $b \in \mathbb{R}$ considérons les problèmes suivants :

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t,p_1), \quad x(0) = v, \tag{3.21}$$

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t,p_2), \quad x(0) = v, \tag{3.22}$$

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t, bp_1 + (1-b)p_2), \quad x(0) = v, \tag{3.23}$$

avec x^1 , x^2 et x^3 les solution unique des problème (3.21), (3.22) et (3.23) respectivement. D'après la définition 3.2.5 de η_{t_0}, et comme η_{t_0} est affine on obtient pour tout $t \in [0,T]$, nous aurons

$$\eta_{t_0}(b(v_1,p_1) + (1-b)(v_2,p_2))(\tau) = b\eta_{t_0}(v_1,p1) + (1-b)\eta_{t_0}(v_2,p_2)(\tau),$$

pour tout $\tau \in [0, T-t_0]$. D'oǜ

$$x^{(b(v_1,p_1)+(1-b)(v_2,p_2))}(t_0+\tau) = bx^{(v_1,p_1)}(t_0+\tau) + (1-b)x^{(v_2,p_2)}(t_0+\tau),$$

si on pose $t = t_0 + \tau$ nous aurons

$$x^3(t) = bx^1(t) + (1-b)x^2(t) \tag{3.24}$$

pour tout $t \in [t_0, T]$.

L'unicité des solutions des problèmes (3.21), (3.22) et (3.23) nous permettent d'écrire

$$\dot{x}^3 = Ax + f(t, bp_1 + (1-b)p_2),$$

et

$$\dot{x}^3 = Ax + bf(t,p_1) + (1-b)f(t,p_2),$$

c'est à dire ,

$$f(t, bp_1 + (1-b)p_2) = bf(t,p_1) + (1-b)f(t,p_2),$$

donc f est affine, pour chaque $\tau \in [0, T - t_0]$, de l'affinité de f il résulte que

$$\int_0^t S(t-s)[f(s, bp_1 + (1-b)p_2) - bf(s,p) - (1-b)f(s,p)]ds = 0, \tag{3.25}$$

pour $t \in [t_0, T]$.

Si on pose

$$g(s) = f(s, bp_1 + (1-b)p_2) - bf(s,p_1) - (1-b)f(s,p_2),$$

pour tout $s \in [0, T]$ et d'après le Théorème 2.1.5 et le Théorème 1.2.16 la fonction

$$\beta(t) = \int_0^t S(t-s)g(s)ds$$

est continument différentiable sur $[0, T]$ et

$$\dot{\beta}(t) = A\beta(t) + g(t), \tag{3.26}$$

pour presque tous $t \in [0, T]$.

Ainsi il existe $W_{b,p_1,p_2} \subset [0, T]$ tel que la mesure de Lebesgue de l'ensemble $[0, T] \diagdown Wb, p_1, p_2$ est égale zéro et l'égalité dans (3.26) est satisfait pour tout $t \in Wb, p_1, p_2$.

Par (3.25) et (3.26) nous avons

$Ax^3(t) + f(t, bp_1 + (1-b)p_2) = b\left[Ax^1(t) + f(t,p_1)\right] + (1-b)\left[Ax^2(t) + f(t,p_2)\right]$, pour tout $t \in [t_0, T] \bigcap W_{b,p_1,p_2}$ ce qui implique

$$f(t, bp_1 + (1-b)p_2) - bf(t,p_1) - (1-b)f(t,p_2) = 0, \tag{3.27}$$

pour tout $t \in [t_0, T] \bigcap W_{b,p_1,p_2}$.

Soit $\{t_n\} \subset [t_0, T] \bigcap W_{b,p_1,p_2}$, $t_n \to t_0$ et à partir de (3.27) et la continuité de la fonction f nous avons

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \longrightarrow \infty} f(t_n, bp_1 + (1-b)p_2) - bf(t_n, p_1) - (1-b)f(t_n, p_2) \\
&= f(\lim_{n \longrightarrow \infty} t_n, bp_1 + (1-b)p_2) - bf(\lim_{n \longrightarrow \infty} t_n, p_1) - (1-b)f(\lim_{n \longrightarrow \infty} t_n, p_2) \\
&= f(t_0, bp_1 + (1-b)p_2) - bf(t_0, p_1) - (1-b)f(t_0, p_2) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pour tout $t_0 \in [0, T]$.

Cela nous permet de voir que f(t,.) est affine pour tout $t \in [0, T]$, on conclut qu'il existe $B : [0, T] \to L(U, H)$ et $C : [0, T] \to H$ tel que $f(t, u) = B(t)u + C(t)$ pour tout $t \in [0, T]$ et $u \in U$. $\square$

Bibliographie

[1] **D. Affane**, Quelque Problèmes de contrôle optimal pour des inclusions différentielles, Thèse de Doctorat, Laboratoire Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2012).

[2] **E.Asplund**, *Čebyšev* sets in Hilbert space, Trans. Amer.Math.Soc.144(1969)235-240.

[3] **M.Bierlaire**, Introduction à l'optimisation différentiable, Presses polytechniques et universitaires romandes (2006).

[4] **H.Brezis**, Analyse Fonctionnelle, Masson Paris New York Barcelone Milan Mexco Sao Paulo (1987).

[5] **R.F.Curtain et A.J.Pritchard**, Infinite dimensional linear systems theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences 8, Springer, Berlin(1978).

[6] **J.Diestel et J.J.Uhl**, Vecteor Measures, American Mathematical Society, Providence(1977).

[7] **P. Fourre** Analyse Numérique Notes d'optimisation, Ellipses(1988).

[8] **D.Françoise et G.Dengel**, Convexité dans les espaces fonctionnels, ellipses(2004).

[9] **A.INTISSAR**, Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale, Cépaduès-éditions(1997).

[10] **A.Pazy**, Semi groupes of linear operators and application to partial differential equations.

[11] **Y. ves So NTAG**, Topologie et analyse fonctionnelle, ellipses(1998).

[12] **T.Zolezzi**, Well-posednes criteria in optimization with application to the calculus of variations, Nonlinear Appl, Theory Methods Appl.25(1995)437-453.

[13] **T.Zolezzi**, Extended Well-posednes of optimization proplems, J. optimization Theory Appl.91(1996)257-268.

[14] **T.Zolezzi**, A characterization of Well-posednes of optimal control systems, SIAM J. Control Optimization 19(1981)604-616.