République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin de cycle

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : E.D.P et applications

Thème

Méthodes mixtes et hybrides pour les équations aux dérivées partielles

Présenté par :

- Menigher Basma.
- Menhane Sonia.

Devant le jury :

Président	: Chikouche Widad	MC(A) Université de Jijel
Encadreur	: Benhassine Hani	MC(B) Université de Jijel
Examinateur	: Khellaf Wahiba	MC(B) Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Table des matières

Remerciements

Nous remercions tout d'abord **ALLAH**, le tout puissant et maitre de l'univers qui nous a donné la capacité nécessaire, la forte volonté et la patience afin d'accomplir ce travail, et qui nous a toujours guidé vers le chemin.

Nous tenons à formuler notre gratitude, et nos sincères remerciements à notre encadreur Mr H.Benhassine pour son encadrement précieux et les conseils pour la bonne réalisation de ce mémoire. Et pour tout le temps qu'il a consacré pour nous aider à la rédaction de ce travail.

Nous remercions aussi Mme W. Chikouche qui nous a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Nous plus sincères remerciements s'adressent à Mme W. Khellaf d'avoir accepté de juger ce travail.

Toute notre gratitude va aussi à nos chers parents pour leurs soutiens tout au long de nos études et durant ce mémoire.

Enfin, nous tenons à exprimer nos profonds remerciements à tous nos enseignants du département de mathématiques pour leur sincérité, nos frères et nos amies qui ont été toujours de notre coté avec leurs aides.

Introduction générale

Dans ce travail de mémoire de fin d'études, nous allons aborder les méthodes mixtes et hybrides pour les équations aux dérivées partielles. La caractéristique principale pour ce type de formulations de problèmes aux limites réside dans le fait qu'ils font intervenir deux champs inconnus dont l'un joue le rôle de multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte. Aussi, la difficulté pour ce genre de problème est que les deux champs inconnus ne peuvent être dissociés.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution pour ces formulations mixtes, la théorie de Babuska et Brezzi est bien adaptée. Le but de ce mémoire et d'expliquer cette théorie. Pour cela nous allons, dans un premier temps, rappeler quelques notions fondamentales d'analyse fonctionnelle, à savoir les espaces de Sobolev et plus particulièrement l'espace $H(div, \Omega)$ ainsi que l'espace $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Dans un deuxième temps, nous présenterons deux exemples très répandus de problèmes mixtes : le système de Stokes et le problème de Darcy. On donnera les formulations variationnelles associées à chacun des deux exemples. Au chapitre trois, qui constitue l'essentiel de notre travail, on présentera la théorie générale de Babuska et Brezzi, qui permet d'établir l'existence, l'unicité et la dépendance par rapport aux données des problèmes mixtes. On montera, l'origine de la fameuse condition inf-sup.

Aussi, on considérera une formulation discrète basée sur la méthode de Galerkin et on lui adaptera la théorie développée pour le cas continu. On montrera que la condition inf-sup discrète ne se déduit pas forcément de la condition inf-sup du cas continu. Enfin, on abordera le théorème de Fortin, qui donnera un critère fort utile pour démonter la condition inf-sup uniforme pour les formulations mixtes discrètes.

Au dernier chapitre, la théorie dévellopée au chapitre trois est appliquée au système de Stokes.

Chapitre 1

Quelques Rappels mathématiques

Dans ce chapitre nous rappellerons quelques définitions et quelques théorèmes de base que l'on utilisera par la suite.

1.1 Espace de Hilbert : définitions et propriétés

Définition 1.1. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Toute forme bilinéaire symétrique définie positive $(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur V.*

On définit la norme d'un espace comme étant, l'application $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie :

1) $\forall u \in V : \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

2) $\forall u \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$.

3) $\forall u, v \in V : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (l'inégalité triangulaire).

On rappelle les définitions standards suivantes :

- La norme induite par le produit scalaire est $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.
- Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace normé.
- Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace pré-hilbertien.
- Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet.

Définition 1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit V un espace pré-hilbertien de produit* *scalaire $(\cdot,\cdot)$ et de norme $\|\cdot\|$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|, \forall u, v \in V.$$

Par la suite on aura besoin du théorème de Riesz suivant :

Théorème 1.3 (de Riesz)**.** *Soit V un espace de Hilbert réel et soit V' son dual. Pour toute forme linéaire continue $L \in V'$, il existe un unique $y \in V$ tel que $L(x) =< y, x >, \forall x \in V$. De plus on a :*

$$\|L\|_{V'} = \|y\|_V. \tag{1.1}$$

Démonstration. Voir [3, p. 81]. ■

1.2 Espace des distributions $D'(\Omega)$

Définition 1.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur Ω.*

1) *On appelle support de f l'ensemble :*

$$suppf = \overline{\{x \in \Omega \setminus f(x) \neq 0\}}. \tag{1.2}$$

2) *On dira que f est à support compact dans Ω s'il existe un sous ensemble compact $K \subset \Omega$ tel que : $suppf \subset K$.*

Ces notions nous permettent d'introduire les définitions suivantes :

Définition 1.5. *$D(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment continument différentiables et à support compact dans Ω. C'est-à-dire :*

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \backslash \exists K \subset \Omega, K \text{ compact tel que} : suppf \subset K\}.$$

Définition 1.6. *On appelle espace des distributions sur Ω, et on note $D'(\Omega)$, le dual topologique de l'espace $D(\Omega)$ c-à-d l'espace des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$.*

Définition 1.7. *Pour toute distribution $T \in D'(\Omega)$, sa dérivée partielle $\partial^\alpha T$ est une distribution définie par :*

$$< \partial^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^{|\alpha|}\varphi >, \forall \varphi \in D(\Omega), \tag{1.3}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ est un multi-indice donné, avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ avec :

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}, ...\partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Proposition 1.8. *L'application $T \to \partial^\alpha T$ est linéaire et continue de $D'(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$.*

1.3 Espace de Sobolev

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.9. *On définit l'espace $L^2(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de carré sommable dans Ω, c'est à dire :*

$$\left(\int_\Omega f^2 dx\right)^{1/2} < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert munit du produit scalaire :

$$(f,g)_{0,\Omega} = \int_\Omega f \; g \; dx,$$

et de la norme induite :

$$\|f\|_{0,\Omega} = \left(\int_\Omega f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque.

• $D(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$.

• *Comme on peut considérer $L^2(\Omega)$ comme étant un sous espace de $D'(\Omega)$, il est possible de dériver ses éléments au sens des distributions.*

On définit aussi le sous espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle par :

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) / \int_\Omega f dx = 0 \right\}. \tag{1.4}$$

1.3.1 Espace $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit l'espace de Sobolev d'ordre 1, que l'on notera $H^1(\Omega)$, comme étant un sous espace de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées premières au sens des distributions sont dans $L^2(\Omega)$. C'est à dire :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \; \forall i = 1, \cdots, N \right\}.$$

Il est muni du produit scalaire :

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega uv \; dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx,$$

et de la norme :

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left(\|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{N} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On donne la définition d'un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui est fort utile pour les problèmes avec conditions aux limites de type Dirichlet.

Définition 1.10. *(Espace $H_0^1(\Omega)$)*
On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme étant l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, i.e :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

Dans le cas où Ω est un ouvert borné à frontière Γ assez régulière, on a grâce au théorème de trace l'égalité :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega)/v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, l'espace $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ coïncide avec $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 1.11. *L'espace $H_0^1(\Omega)$est un espace de Hilbert muni du produit scalaire* $(\cdot, \cdot)_{1,\Omega}$.

Démonstration. par définition $H_0^1(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ (qui est un espace de Hilbert). ■

Théorème 1.12. *(Formule de Green dans $H^1(\Omega)$)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné à frontière assez régulière Γ, f et g deux fonctions appartenant à $H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\ dx = -\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma f\ g\ \eta_i\ d\Gamma, i = 1, \cdots, N \tag{1.5}$$

où $n = (\eta_i)_{1 \leq i \leq N}$ est la normale unité extérieure à la frontière Γ.

Remarque. *La formule de Green décrite précédemment reste valable en dimension 2.*

Théorème 1.13 (Inégalité de Poincaré)**.**

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ qui ne dépend que du diamètre de Ω, telle que :

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C_\Omega\left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.6}$$

Démonstration. Elle est basée sur l'argument de densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, voir par exemple [1, p. 90]. ■

Corollaire 1.14. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace, alors la semi-norme*

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.7}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$.

Enfin, on donnera le théorème important de Lax-Milgram suivant, permettant d'assurer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème variationnel donné dans des espaces de Hilbert et donc en particulier dans des espaces de Sobolev.

Théorème 1.15. *(Théorème de Lax-Milgram)*

Soient :

- *V un espace de Hilbert de produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$ et de norme $\|\cdot\|_V$.*
- *$a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$ c'est-à-dire :*

$$\exists M > 0 : |a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V, \forall u, v \in V. \textit{ (la continuité)} \tag{1.8}$$

$$\exists \alpha > 0 : a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2, \forall v \in V. \textit{ (la coercivité)} \tag{1.9}$$

• *L est une forme linéaire continue sur V c'est à dire :*

$$\exists C > 0 : |L(v)| \leq C\|v\|_V, \forall v \in V. \tag{1.10}$$

Alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } : \\ a(u,v) = L(v), \forall v \in V, \end{cases}$$

admet une solution unique, de plus la solution dépend continument de la forme L :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|L\|_{V'}.$$

Démonstration. Voir par exemple [1, p. 74]. ■

1.3.2 Espace H(div,Ω)

Dans ce paragraphe on donnera la définition des espaces de Sobolev$H(div, \Omega)$ ainsi que leurs principales propriétés.

Soit $\mathcal{F}$ un champ de vecteurs et f un champ scalaire. On définit les opérateurs différentiels gradient et divergence de la façon suivante :

• **Le Gradient** : pour f une fonction scalaire, le gradient est défini par :

$$\begin{aligned} grad : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto grad\ f = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}). \end{aligned} \tag{1.11}$$

L'opérateur gradient est donc donné par : $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

• **La divergence** : pour $\mathcal{F}$ une fonction vectorielle, la divergence est définie par :

$$\begin{aligned} div : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{F} &\longmapsto div\ \mathcal{F} = \nabla \cdot \mathcal{F} = (\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial x_n}). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Définition 1.16. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$.*

- *L'espace de Sobolev $H(div, \Omega)$est un espace de Hilbert définie par :*

$$H(div, \Omega) = \{\mathcal{F} \in L^2(\Omega)^3, div\mathcal{F} \in L^2(\Omega)\}. \tag{1.13}$$

où la norme associée est :

$$\|\mathcal{F}\|_{0,div} = (\|\mathcal{F}\|^2_{0,\Omega} + \|div\mathcal{F}\|^2_{0,\Omega})^{\frac{1}{2}},$$

et le produit scalaire est donné par :

$$< f, g >= \int_\Omega f(x)\ g(x)dx + \int_\Omega divf(x)\ div\ g(x)dx.$$

1.4 La méthode de Galerkin

Comme présenté dans [7], la méthode de Galerkin est une méthode d'approximation très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espace de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espace d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

1.5 Estimation d'erreur a priori

L'approximation par éléments finis conformes d'un problème de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in X \text{ tel que } : \\ a(u, v) = F(v), \forall v \in X, \end{cases} \tag{1.14}$$

consiste à considérer un problème approché de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in X_h \text{ tel que } : \\ a(u_h, v_h) = F(v_h), \forall v_h \in X_h, \end{cases} \tag{1.15}$$

où X_h est un espace de dimension finie inclus dans$X$. Alors, il est possible d'obtenir une estimation de la forme :

$$\|u - u_h\|_X \leq L(h, u) + M(h, F). \tag{1.16}$$

Des estimations de la forme (1.16) sont appelées des estimations a priori. Pour obtenir des estimations d'erreur a priori nous avons d'abord besoin de ce lemme :

Lemme 1.17 (Céa)**.** *On a l'estimation d'erreur*

Si les conditions de Lax-Milgram sont vérifiées et l'espace V_h inclus dans X, alors :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\beta}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \tag{1.17}$$

Ce dernier lemme donne une estimation d'erreur abstraite.

Enfin, nous terminons ce chapitre par donner le théorème de Banach que l'on utilisera par la suite :

Théorème 1.18 (Banach)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach et soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continue de E dans F.*

Si A est bijective alors A^{-1} est continue de F dans E.

Démonstration. Voir [6]. ■

Chapitre 2

Exemples des formulations mixtes usuelles

Nous présenterons dans ce chapitre diverses formulations utilisées pour la construction de schémas de résolution adaptés de problèmes aux limites intervenant dans les sciences de l'ingénieur. Ces formulations dites mixtes sont toutes caractérisées par une difficulté spécifique : elles font intervenir de façon naturelle deux champs inconnus dont l'un joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte. La discrétisation de ces deux champs ne peut se faire de manière indépendante.
Nous introduirons deux problèmes physiques connus ainsi que leurs formulations mixtes usuelles.

2.1 Système de Stokes

La formulation naturelle du système de Stokes est une formulation mixte contrairement aux formulations variationnelles standards. Pour simplifier, nous travaillons toujours dans le cadre bidimensionnel sans mention explicite contraire, le domaine de calcul sera, dans tout ce qui suit, supposé être un domaine borné noté Ω de frontière polygonale, dont la frontière et désignée par Γ. La normale unitaire de Ω sera quant à elle désignée par $\mathbf{n}$.

A tout espace fonctionnel $\mathcal{L}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}(\Gamma)$) de fonctions ou distributions définies sur Ω (resp. sur Γ), on associe $\mathcal{L}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ (resp. $\mathcal{L}(\Gamma;\mathbb{R}^2)$) l'espace des champs de vecteurs, identifiés à des vecteurs colonnes dont les composantes sont chacunes dans $\mathcal{L}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}(\Gamma)$). Clairement, $\mathcal{L}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ s'identifie dans ce cas à l'espace produit $\mathcal{L}(\Omega) \times \mathcal{L}(\Omega)$. Cependant, comme nous le verrons la notation $\mathcal{L}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ est plus commode.

Soit donc $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ et $\nu > 0$, le système de Stokes est le problème aux limites dont les inconnues sont respectivement :

• La vitesse : $u \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$

• La pression : $p \in L^2(\Omega)/R$,
qui vérifient :

$$-\nu\Delta u + \nabla p = f, \text{ dans } H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^2), \tag{2.1}$$

$$div\ u = 0, \text{ dans } L^2(\Omega), \tag{2.2}$$

où Δu est le champ de vecteurs dont les composantes sont données par

$$(\Delta u)_i = \Delta u_i, \ i = 1, 2. \tag{2.3}$$

Remarque.

• *La condition $u \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ contient en fait la condition aux limites*

$$u(x,y) = (0,0) \ sur\ \Gamma. \tag{2.4}$$

• *Il et clair que si (u,p) est une solution quelconque de (2.1) et (2.2), le couple (u,p+c) et aussi une solution si c est une constante arbitraire. C'est pourquoi, on cherche la pression p dans l'espace $L^2(\Omega)/R$ où on identifie deux fonctions lorsqu'elles ne diffèrent que d'une constante.*

On obtient la formulation variationnelle de la façon suivante. Soit $\varphi \in D(\Omega;\mathbb{R}^2)$, toute solution (u,p) de (2.1) vérifie :

$$-\nu\sum_{i=1}^{2} < \Delta u_i, \varphi_i > + \sum_{i=1}^{2} < \partial_i p, \varphi_i >= \int_\Omega f\varphi dx, \tag{2.5}$$

$$-\nu\sum_{i,j=1}^{2} < \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}), \varphi_i > + \sum_{i=1}^{2} < \partial_i p, \varphi_i > =< f, \varphi > .$$

En utilisant la définition de la dérivation au sens des distributions, il vient que :

$$\nu\sum_{i,j=1}^{2} < \partial_j u_i, \partial_j \varphi_i > - \sum_{i=1}^{2} < p, \partial_i \varphi_i > =< f, \varphi >,$$

$$\nu\sum_{i=1}^{2} < \nabla u_i, \nabla\varphi_i > - < p, div\varphi > =< f, \varphi >,$$

$$\nu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \nabla\ u_i \nabla\ \varphi_i dx - \int_{\Omega} p\ div\varphi\ dx = \int_{\Omega} f\ \varphi\ dx. \tag{2.6}$$

Introduisons l'opérateur ∇ qui à un champ $u \in D'(\Omega, \mathbb{R}^2)$ associe le champ de tenseurs $\nabla u \in D'(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})$ dont les composantes sont définies par :

$$(\nabla u)_{ij} = \partial_j u_i; 1 \leq i, j \leq 2. \tag{2.7}$$

Pour σ et z dans $\mathbb{R}^{2,2}$, on définit le produit scalaire $\sigma : z$ par

$$\sigma : z = \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij} z_{ij}. \tag{2.8}$$

L'équation (2.6) s'étend par densité à tout v dans $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ et donne ainsi

$$a(u, v) + b(v, p) = Lv, \tag{2.9}$$

avec :

$$a(u, v) = \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v\ dx, \tag{2.10}$$

$$b(v, p) = -\int_{\Omega} p\ div\ v\ dx, \tag{2.11}$$

et :

$$Lv = \int_{\Omega} fv\ dx. \tag{2.12}$$

Le problème (2.1), (2.2) peut ainsi être réécrit sous forme d'un problème de point-selle sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in X \times M, \forall (v, q) \in X \times M : \\ a(u, v) + b(v, p) = Lv, \\ b(u, q) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Avec :

$$X := H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2); M = L^2(\Omega)/\mathbb{R}. \tag{2.14}$$

La formulation (2.13) est typique d'une formulation mixte. Elle correspond à la minimisation de la fonctionnelle :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - Lv, \tag{2.15}$$

sous la contrainte :

$$v \in V := \{v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2) /\ b(v, q) = 0,\ \forall q \in M\}. \tag{2.16}$$

Remarque.

• *La condition $v \in V$ s'écrit aussi*

$$\int_{\Gamma} v\ \eta\ d\tau = 0, \tag{2.17}$$

car la formule de Green donne

$$\int_{\Omega} div\ v\ dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \partial_i v_i dx,$$

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \partial_i v_i dx = -\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \partial_i 1\ v_i\ dx + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma} 1\ v_i \eta_i\ d\tau$$

$$\int_{\Omega} div\ v\ dx = \int_{\Gamma} v\ \eta\ d\tau = 0.$$

• *La pression p apparait comme le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte dite condition d'incompressibilité.*

2.2 Problème de Darcy

Nous considérons pour illustrer notre propos, un modèle très simplifié d'écoulement dans un milieu poreux dit monophasique. Les inconnues sont ici la pression de référence p et la vitesse de filtration u reliées par la loi de Darcy :

$$u = -K\nabla p \text{ dans } \Omega, \tag{2.18}$$

où K correspond à la donnée pour presque tout $x \in \Omega$ d'une matrice $K(x) \in \mathbb{R}^{2.2}$ telle que $K \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^{2.2})$ et

$$\exists \gamma > 0 : K(x)\xi.\xi \geq \gamma|\xi|^2;\ p.p.\ en\ x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{2.19}$$

La matrice K est appelée le tenseur de perméabilité relative. Elle dépend du milieu poreux et de la viscosité du fluide.

La seconde équation provient de la conservation de la masse et traduit simplement un bilan entre les apports décrits par le terme source donné f et les flux à travers la frontière d'un domaine élémentaire :

$$div\ u - f = 0\ dans\ \Omega. \tag{2.20}$$

Pour obtenir la formulation variationnelle, en remplaçant u dans (2.20) par sa formule (2.18), on obtient :

$$div(-K\nabla p) - f = 0 \text{ dans } \Omega.$$

En multipliant ensuite par une fonction test $q \in H_0^1(\Omega)$ et en utilisant la formule de Green on a :

$$\int_\Omega K\nabla p \cdot \nabla q \, dx - \int_\Gamma (K\nabla p) q\eta \, d\Gamma = \int_\Omega fqdx. \tag{2.21}$$

Comme $q \in H_0^1(\Omega)$ alors $q = 0$ sur Γ, on a :

$$\int_\Omega K\nabla p \cdot \nabla q \, dx = \int_\Omega fq \, dx.$$

La formulation variationnelle obtenue sera :

$$\begin{cases} \text{Touver } p \in H_0^1(\Omega); \forall q \in H_0^1(\Omega) : \\ a(p,q) = L(q), \end{cases} \tag{2.22}$$

avec :

$$a(p,q) = \int_\Omega K\nabla p \nabla q \, dx,$$

et

$$L(q) = \int_\Omega fq \, dx.$$

Si la matrice K est symétrique p.p., la formulation précédente correspond ou problème de minimisation sans contrainte

$$\begin{cases} \text{Trouver } p \in H_0^1(\Omega); \forall q \in H_0^1(\Omega) : \\ J(p) \leq J(q), \end{cases} \tag{2.23}$$

où

$$J(p) = \frac{1}{2} a(p,p) - L(p),$$

$$J(p) = \frac{1}{2} \int_\Omega K\nabla p \nabla p \, dx - \int_\Omega fp \, dx. \tag{2.24}$$

La résolution par éléments finie $\mathcal{P}_1$- continus par exemple correspond à la minimisation sur l'espace W^h de $H_0^1(\Omega)$ obtenue en considérant un maillage en triangle Z^h de Ω et le sous-espace des fonctions de H_0^1 qui sont $\mathcal{P}_1$ sur chaque triangle $T \in Z^h$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } p^h \in W^h, \forall q^h \in W^h, \\ J(p^h) \leq J(q^h). \end{cases} \tag{2.25}$$

Les inconvénients de ce schéma viennent du fait qu'il n'est pas conservatif.

Ceci se traduit par le fait que si T' est une arête interne séparent les triangle T^+ et T^-, les deux flux sortants respectivement de T^+ et T^- à travers T' ne donnent pas un bilan nul, i.e :

$$\int_{T'} (u^h)^+ \nu^+ dT' + \int_{T'} (u^h)^- \nu^- dT' \neq 0. \qquad (2.26)$$

De même au niveau de l'élément, le bilan local.

$$div(k\nabla p^h) + f \neq 0 \text{ dans } T. \qquad (2.27)$$

La construction d'un schéma d'approximation mixte hybride qui n'a pas les inconvénients précédents passe par l'introduction d'une autre formulation du problème. Cela consiste à utiliser les deux inconnues u et p dans la formulation. Sachant que K vérifie la condition d'ellipticité (2.19) on peut considérer la matrice A définie p.p. Par $A(x) = [K(x)]^{-1}$. Elle vérifie de même $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{2.2})$ et une condition d'ellipticité :

$$\exists \delta > 0 : A(x)\xi.\xi \geq \delta|\xi|^2; p.p.\ en\ x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \qquad (2.28)$$

L'équation (2.18) est réécrite d'abord sous la forme :

$$\begin{aligned} u &= -K\nabla p \\ A(x)u &= -A(x)K(x)\nabla p \\ A(x) &= [K(x)]^{-1} \text{ c'est la matrice inverse de } K(x) \\ A(x)u &= -I_d \nabla p \end{aligned}$$

$$Au + \nabla\ p = 0. \qquad (2.29)$$

En multipliant le problème précédant par une fonction test $v \in H(div, \Omega)$:

$$\int_\Omega A(x)uv\ dx + \int_\Omega \nabla pv\ dx = 0,$$

et en appliquant la formule de Green :

$$\int_\Omega A(x)uv\ dx - \int_\Omega p\ div\ v\ dx + \int_\Gamma pv\eta\ d\Gamma = 0,$$

comme $p \in H_0^1(\Omega)$ alors $p = 0$ sur Γ,

on arrive à la nouvelle formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} u \in H(div, \Omega); \forall v \in H(div, \Omega) : \\ a(u, v) + b(v, p) = 0, \end{cases} \qquad (2.30)$$

avec :

$$a(u,v) = \int_\Omega A(x)uv\ dx,$$

et

$$b(v,p) = -\int_\Omega p\ div\ v\ dx.$$

Enfin, en multipliant la seconde équation de Darcy (2.20) par une fonction test $q \in L^2(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega (div\ u - f)q\ dx = 0; \forall q \in L^2(\Omega), \tag{2.31}$$

on arrive à la formulation mixte :

$$\begin{cases} (u,p) \in X \times M; \forall (v,q) \in X \times M : \\ a(u,v) + b(v,p) = 0, \\ b(u,q) = \chi(q), \end{cases} \tag{2.32}$$

avec $X = H(div,\Omega)$; $M = L^2(\Omega)$ et

$$\chi(q) = \int_\Omega fq\ dx, \tag{2.33}$$

définissant une forme linéaire continue sur M.

Remarque. *La condition de Dirichlet est implicite dans la formulation.*

Chapitre 3

Théorie générale des formulations mixtes

La théorie générale permettant d'établir l'existence, l'unicité, la dépendance continue par rapport aux données a été élaborée par F. Brezzi à la suite de travaux de I. Babuska. Nous allons voir comment cette théorie peut être déduite directement de la théorie de Babuska.

3.1 Théorie de Babuska

La théorie de Babuska est une généralisation fructueuse da la théorie variationnelle standard basée sur le théorème de Lax-Milgram. Cette théorie généralise ce dernier théorème dans deux directions :

* Une approche moins stricte de la condition de coercitivité (initialement appelée par Babuska condition inf-sup et désignée maintenant par condition de Brezzi-Babuska).

* L'espace où l'on cherche l'inconnue peut être distinct de celui où varient les fonctions test.

L'outil de base de la théorie est le théorème de l'image fermée que nous rappelons pour la commodité du lecteur.

Théorème 3.1. *Soient E et F deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur* *linéaire continu de E dans F. Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

$$A \text{ est injective et d'image } R(A) \text{ fermée}, \tag{3.1}$$

$$\exists \gamma > 0 : \|Av\|_F \geq \gamma \|v\|_E, \forall v \in E. \tag{3.2}$$

Démonstration.

On suppose que (3.2) est vérifiée et on montre (3.1), $Av = 0 \Longrightarrow v = 0$ donc A est injective. Montrons que $R(A)$ est fermée.
Soit $(w_n)_{n\in N}$ une suite de $R(A)$ telle que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = w$ dans F. Alors : $\forall n \in N, \exists v_n \in E$: $Av_n = w_n$.
Il résulte de (3.2) que :

$$\|w_n - w_m\|_F = \|Av_n - Aw_m\|_F = \|A(v_n - w_m)\|_F \geq \gamma \|v_n - v_m\|_E. \tag{3.3}$$

Par conséquent : (v_n) est une suite de Cauchy car (w_n) l'est aussi. Donc $(v_n)_{n\in N}$ est convergente dans E, soit $v := \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$. Comme A est continue

$$w = \lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} Av_n = A \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = Av,$$

donc : $Av = w$ d'où $w \in R(A)$. Alors : $R(A)$ est fermée.

$\Longrightarrow$) On suppose maintenant que A est injective et d'image $R(A)$ fermée.

l'opérateur A défini de $E \longrightarrow R(A)$ est bijectif. D'après le théorème de Banach A^{-1} est continue de $R(A) \longrightarrow E$. Alors :
$\forall v \in E$,

$$\begin{aligned} \|v\|_E &= \|A^{-1}Av\|_E \\ &\leq c\|Av\|_F, \end{aligned}$$

c-à-d :

$$\forall v \in E : \|Av\|_F \geq \frac{1}{c}\|v\|_E,$$

ce qui démontre (3.2). ■

La théorie de Babuska permet d'étudier le problème variationnel suivant :

Soient X et M deux espaces de Hilbert de produits scalaires $(\cdot,\cdot)_X$, $(\cdot,\cdot)_M$ et de normes $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_M$ respectivement. Soit $a : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $X \times M$, continue i.e :

$$\exists M > 0 : |a(v,\mu)| \leq M\|v\|_X\|\mu\|_M; \forall v \in X, \forall \mu \in M.$$

Pour $L \in M'$, i.e, une forme linéaire continue, donnée sur M, le problème s'énonce

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in X, \forall \mu \in M : \\ a(u,\mu) = L\mu. \end{cases} \tag{3.4}$$

On a alors :

Théorème 3.2 (Théorème de Babuska)**.**

Sous les conditions précédentes, si la forme $a(\cdot,\cdot)$ vérifie en outre la condition dite inf-sup *suivante :*

$$\exists \beta > 0 : \sup_{\|\mu\|_M = 1} a(v,\mu) \geq \beta \|v\|_X \,; \forall v \in X, \tag{3.5}$$

et la condition (injectivité de l'adjoint)

$$\forall \mu \in M : \mu \neq 0, \exists v \in X \text{ tel que } a(v,\mu) \neq 0. \tag{3.6}$$

Alors, le problème (3.4) admet une solution et une seule vérifiant :

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|L\|_{M'}. \tag{3.7}$$

Démonstration. Le théorème de Riesz permet d'écrire :

$$a(v,\mu) = (Av,\mu)_M ; \forall v \in X, \forall \mu \in M,$$

avec $A \in \mathcal{L}(X,M)$. De même, $\exists l \in M$ tel que :

$$L\mu = (l,\mu)_M, \forall \mu \in M.$$

Le problème (3.4) est ainsi équivalent à l'équation :

$$Au = l.$$

La condition inf-sup permet d'écrire

$$\|Av\|_M = \sup_{\|\mu\|_M = 1} (Av,\mu) \geq \beta \|v\|_M, \quad \forall v \in X.$$

D'après le théorème 3.1, A est injective et d'image fermée. On a ainsi montré que (3.4) admet au plus une solution donc il suffit de montrer que A est surjective i.e $M = R(A)$.

Considérons μ dans l'orthogonal de $R(A)$. Un tel μ vérifiant :

$$a(v,\mu) = 0 ; \forall v \in X.$$

La condition (3.6) montre que $\mu = 0$.

Il s'ensuit ainsi que $R(A)$ et dense dans M, et l'image $R(A)$ étant dense et fermée, conincide ainsi avec tout M.

On a A est injective et surjective implique que A est bijective donc le problème (3.4) admet une solution unique.

De plus comme :

$$a(u,\mu) = L\mu, \forall \mu \in M.$$

$$\text{Alors } : \beta\|u\|_X \leq \sup_{\|\mu\|_M=1} a(u,\mu) = \sup_{\|\mu\|_M=1} L\mu = \|L\|_{M'},$$

et donc :

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\beta}\|L\|_{M'}.$$

■

Remarque.

- *Babuska a introduit la condition (3.5)*

$$\exists \beta > 0 : \sup_{\|\mu\|_M=1} a(v,\mu) \geq \beta\|v\|_X; \forall v \in X,$$

sous la forme :

$$\inf_{\|v\|_X=1} \sup_{\|\mu\|_M=1} a(v,\mu) \geq \beta > 0, \tag{3.8}$$

De là provient la terminologie condition inf-sup*, nous préférons la forme (3.5) qui est plus proche de la condition de coercivité.*

- *La condition (3.6) peut être réécrite sous la forme équivalente suivante :*

$$\forall \mu \in M, \|\mu\|_M = 1 \textit{ alors } \sup_{\|v\|_X=1} a(v,\mu) > 0. \tag{3.9}$$

- *Supposons que X =M et que $a(\cdot,\cdot)$ vérifie en outre la condition de coercivité suivante :*

$$\exists \gamma > 0 : a(v,v) \geq \gamma\|v\|_X^2, \forall v \in X. \tag{3.10}$$

Il est immédiat alors que $a(\cdot,\cdot)$ vérifie les deux conditions (3.5) et (3.9) qui est équivalente à (3.6). Ceci montre bien que le théorème 3.2 et une généralisation du théorème de Lax-Milgram.

Corollaire 3.3. *Sous les conditions générales du théorème de Babuska, la forme $a(\cdot,\cdot)$ vérifie en outre*

$$\sup_{\|v\|_X=1} a(v,\mu) \geq \beta\|\mu\|_M ; \forall \mu \in M.$$

Démonstration.

Soit $\mu \in M$, si $\mu = 0$, $a(v,\mu) = 0$, il n'y a rien à montrer. On peut supposer que $\mu \neq 0$. Le théorème 3.2 permet d'affirmer qu'il existe $w \in X$ tel que

$$Aw = \mu, \tag{3.11}$$

avec w vérifiant :

$$\|w\|_X \leq \frac{1}{\beta}\|\mu\|_M. \tag{3.12}$$

Comme $w \neq 0$, on peut poser $v = \frac{w}{\|w\|_X}$, d'après le théorème de Riez :

$$a(v,\mu) = (Av,\mu)_M = (A\frac{w}{\|w\|_X},\mu)_M,$$

Or

$$(A\frac{w}{\|w\|_X},\mu)_M = \frac{1}{\|w\|_X}(Aw,\mu)_M = \frac{1}{\|w\|_X}(\mu,\mu)_M = \frac{1}{\|w\|_X}\|\mu\|_M^2.$$

D'où

$$a(v,\mu) = \frac{1}{\|w\|_X}\|\mu\|_M^2,$$

grâce à (3.12) on a :

$$\frac{1}{\|w\|_X} \geq \beta\frac{1}{\|\mu\|_M},$$

$$\|\mu\|_M^2\frac{1}{\|w\|_X} \geq \beta\|\mu\|_M,$$

donc :

$$a(v,\mu) \geq \beta\|\mu\|_M, \forall \mu \in M.$$

■

Corollaire 3.4. *Sous les conditions générales du théorème de Babuska, pour tout $\chi \in X'$, le problème*

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in M, \forall v \in X : \\ a(v,\lambda) = \chi v, \end{cases} \tag{3.13}$$

possède une solution et une seule vérifiant

$$\|\lambda\|_M \leq \frac{1}{\beta}\|\chi\|_{X'}.$$

Démonstration.

En posant :

$$\hat{a}(\mu, v) = a(v, \mu),$$

on définit une forme bilinéaire continue sur $M \times X$ qui vérifie suite au corollaire 3.3 :

$$\sup_{\|v\|_X=1} \hat{a}(\mu, v) \geq \beta \|\mu\|_M, \forall \mu \in M. \tag{3.14}$$

et grâce à la condition *inf-sup* (3.5), on a

$$\forall v \in X; \|v\|_X = 1; \sup_{\|\mu\|_M=1} \hat{a}(\mu, v) = \sup_{\|\mu\|_M=1} a(v, \mu) \geq \beta > 0.$$

i.e. la condition (3.6) pour la forme bilinéaire $\hat{a}$.

Le théorème de Babuska permet de conclure. ■

3.2 La théorie de Brezzi : le problème de point selle

Les formulations mixtes que nous avons introduites ci-dessus sont toutes décrites pour le cadre général suivant :

On se donne X et M deux espaces de Hilbert et deux formes bilinéaires

$$a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$b : X \times M \longrightarrow \mathbb{R},$$

continues respectivement sur $X \times X$ et $X \times M$, i.e :

$$\exists M_a : |a(u, v)| \leq M_a \|u\|_X \|v\|_X, \forall u, v \in X, \tag{3.15}$$

$$\exists M_b : |b(v, \mu)| \leq M_b \|v\|_X \|\mu\|_M, \forall v \in X, \forall \mu \in M. \tag{3.16}$$

Pour tout $L \in X'$ et $\chi \in M'$, on considère le problème dit problème de point-selle suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \lambda) \in X \times M : \\ a(u, v) + b(v, \lambda) = Lv, \forall v \in X, \\ b(u, \mu) = \chi\mu, \forall \mu \in M. \end{cases} \tag{3.17}$$

La théorie de Brezzi a pour objet de déterminer des conditions sur les formes $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ et sur des sous-espaces de dimension finie $X^h \times M^h$ de $X \times M$ pour que d'abord le problème (3.17) soit bien posé (existence et unicité), que le problème approché défini sur $X^h \times M^h$ soit aussi bien posé (existence et unicité) et que l'erreur $\|u-u^h\|_X + \|\lambda-\lambda^h\|_M$ soit bornée par l'erreur d'approximation $\inf_{(v^h,\mu^h)\in X^h\times M^h}\{\|u-v^h\|_X + \|\lambda-\mu^h\|_M\}$ comme dans les méthodes de Galerkin standard.

Examinons d'abord la situation purement algébrique donnée pour le cas où X et M sont de dimension finie. Dans ces conditions, en choisissant une base $\{e_j\}_{j=1}^{j=n}$ pour X et une base $\{l_i\}_{i=1}^{i=m}$ pour M, on peut identifier X et M respectivement à l'espace $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ des matrices colonnes à n et m lignes.

On a ainsi :

$$a(u,v) = v^\top Au, A \in \mathbb{R}^{n,n}, \tag{3.18}$$

avec les éléments de la matrice A sont $a(e_i,e_j)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. En effet :

$\forall u, v \in X$:

$$\begin{aligned} a(u,v) &= a(\sum_{j=1}^n u_j e_j, \sum_{i=1}^n v_i e_i) \\ &= \sum_{j=1}^n u_j a(e_j, \sum_{i=1}^n v_i e_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_j v_i a(e_j, e_i) \end{aligned} \tag{3.19}$$

en posant $A = (a_{ij}) = (a(e_i,e_j))$ et $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$,

on a :

$$\begin{aligned} v^\top Au &= (v_1 ... v_n) \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= v_1 \sum_{i=1}^n a_{1i} u_i + ... + v_n \sum_{i=1}^n a_{ni} u_i \\ &= \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j u_i \end{aligned} \tag{3.20}$$

d'après (3.19) et (3.20) donc :

$$a(u,v) = v^\top Au.$$

De la même manière on peut écrire :

$$b(v,\mu) = \mu^\top Bv, B \in \mathbb{R}^{m,n}, \tag{3.21}$$

avec les éléments de la matrice B sont $b(e_i, l_j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. En effet :

Soit $v \in X$, $\mu \in M$, alors :

$$\begin{aligned} b(v,\mu) &= b(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j l_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i b(e_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j l_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i \mu_j b(e_i, l_j) \end{aligned} \tag{3.22}$$

en posant :

$$B = (b_{ij}) = (b(e_i, l_j)) \text{ et } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mu^\top Bv &= (\mu_1 ... \mu_m) \begin{pmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & .. & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \mu_1 \sum_{i=1}^{n} b_{1i} v_i + ... + \mu_m \sum_{i=1}^{n} b_{mi} v_i \\ &= \sum_{j=1}^{m} \mu_j \sum_{i=1}^{n} b_{ji} v_i \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} v_i \mu_j \end{aligned} \tag{3.23}$$

d'après (3.22) et (3.23) on aura :

$$b(v,\mu) = \mu^\top Bv, B \in \mathbb{R}^{m,n}.$$

De même, L et χ sont respectivement des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ définies par :

$$Lv = v^\top f, \chi\mu = \mu^\top g. \tag{3.24}$$

Les éléments de f sont $f_i = L(e_i), 1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned}
\forall v \in X : L(v) &= L(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i L(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i f_i \\
&= v^\top f. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Les éléments de g sont $g_j = \chi(l_j)$, $1 \leq j \leq m$

$$\begin{aligned}
\forall \mu \in M : \chi(\mu) &= \chi(\sum_{j=1}^{n} \mu_j l_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mu_j \chi(l_j) \\
&= \mu^\top g. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

En remplaçant (3.18), (3.21) et (3.24) dans le problème (3.17) on trouve :

$$\begin{cases} v^\top A u + \lambda^\top B v = v^\top f, \forall v \in X, \\ \mu^\top B u = \mu^\top g, \forall \mu \in M, \end{cases}$$

on a :

$$\lambda^\top B v = v^\top B^\top \lambda.$$

Alors :

$$\begin{cases} v^\top A u + v^\top B^\top \lambda = v^\top f, \forall v \in X, \\ \mu^\top B u = \mu^\top g, \forall \mu \in M. \end{cases}$$

Alors le système (3.17) se réécrit dans ce cas :

$$\begin{cases} Au + B^\top \lambda = f, \\ Bu = g, \end{cases} \qquad (3.27)$$

Supposons que le problème (3.27) soit bien posé, i.e qu'il admette une solution et une seule pour tout $(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Ceci revient en fait a supposer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \qquad (3.28)$$

la matrice du système soit inversible.

Il s'ensuit que les colonnes de $B\top$ (où les lignes de B) sont linéairement indépendantes et donc que :

$$rg(B) = m. \tag{3.29}$$

Remarque.

Comme $rg(B) \leq m$, la condition (3.29) montre que $m \leq n$. En effet,

on a par définition $B \in \mathbb{R}^{m,n}$ alors : $rg(B) = \min(m, n)$

et on a $rg(B) = m$, alors : $m \leq n$.

Ceci montre qu'une méthode de Galerkin où $\dim M^h > \dim X^h (m > n)$ ne donnerait même pas un problème discret bien posé.

La condition (3.29) est donc une condition nécessaire pour que le problème (3.27) soit bien posé. Elles s'exprime aussi de façon équivalente par :

$$B^\top : M \longrightarrow X, \tag{3.30}$$

est injective.

Retournons maintenant à la condition (3.28). On a :

$\det \begin{pmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, alors la matrice est inversible.

Donc :

$$rg(B) = m \Longrightarrow \ker(B) = 0.$$

On a par définition :

$$V := \{v \in X; Bv = 0\} = \ker B, \tag{3.31}$$

En définissant la projection $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ qui à tout $v \in X$, associe πv sa projection sur V i.e.

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow \pi v. \end{aligned} \tag{3.32}$$

On identifie π à sa matrice. On a donc :

$$B(\pi v) = 0, \forall v \in X,$$

$$(B\pi)v = 0, \forall v \in X,$$

c'est à dire :

$$B\pi = 0.$$

D'où

$$\pi^\top B^\top = 0.$$

La condition (3.28) sera vérifiée si seulement si le seul $(u, \lambda) \in X \times M$ vérifiant

$$Au + B^\top \lambda = 0, \tag{3.33}$$

$$Bu = 0, \tag{3.34}$$

est l'élément $(u, \lambda) = (0, 0)$. Soit un tel (u, λ). Clairement, la condition (3.34) donne donc :

$$u \longrightarrow \pi u, \tag{3.35}$$

alors :

$$\pi u = u. \tag{3.36}$$

D'où, sachant que :

$$\pi^\top Au + \pi^\top B^\top \lambda = \pi^\top Au,$$

(car : $\pi^\top B^\top = 0$), on obtient alors la condition nécessaire :

$$\forall u \in X, \pi u \neq 0 \Longrightarrow \pi^\top A\pi u \neq 0. \tag{3.37}$$

En effet :

$$\begin{cases} Au + B^\top \lambda = 0 \\ Bu = 0 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (u, \lambda) = (0, 0)$$

$$Bu = 0 \Longrightarrow u \in V : \pi u = u.$$

Sachant que :

$$\pi^\top Au + \pi^\top B^\top \lambda = \pi^\top Au,$$

on obtient

$$\pi^\top Au = 0,$$

ce qui équivaut

$$\forall u \in X, \pi u \neq 0 \Longrightarrow \pi^\top A \pi u \neq 0.$$

Montrons maintenant, que les deux conditions (3.30) et (3.37) sont suffisantes pour que (3.28) soit vérifiée.
Soit de nouveau $(\mu, \lambda) \in X \times M$ tel que

$$\begin{cases} Au + B^\top \lambda = 0, \\ Bu = 0, \end{cases} \tag{3.38}$$

et supposons les conditions (3.33) et (3.34) vérifiées on a :

$$Bu = 0 \Longrightarrow u \in V \Longrightarrow \pi u = u,$$

Alors si :

$$\begin{aligned} u \neq 0 &\Longrightarrow \pi u \neq 0 \\ &\Longrightarrow \pi^\top A \pi u \neq 0 \\ &\Longrightarrow \pi^\top A u \pi + \pi^\top B \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

donc $u = 0$. Il s'ensuit que :

$$B^\top \lambda = 0. \tag{3.39}$$

La condition (3.37) montre alors que : $\lambda = 0$.

$$(u, \lambda) = (0, 0) \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Pour poser des conditions qui peuvent s'étendre en dimension infinie, on peut formuler les deux conditions (3.30) et (3.37) sous la forme suivante. Le théorème 3.1 montre que la condition (3.30) s'écrit :

$$\exists \beta > 0 : \|B^\top \mu\|_X \geq \beta \|\mu\|_M ; \forall \mu \in M. \tag{3.40}$$

$\|\beta\mu^\top\|_X = v^\top B^\top \mu$ avec $v = B^\top\mu/\|B^\top\mu\|_X$;

$$\begin{aligned}
\|B^\top\mu\|_X &= ((B^\top\mu)^\top . B^\top\mu)^{1/2} \\
&= \frac{(B^\top\mu)^\top B^\top\mu}{((B^\top\mu)^\top . B^\top\mu)1/2} \\
&= \frac{(B^\top\mu)^\top}{((B^\top\mu)^\top . B^\top\mu)^1/2} B^\top\mu \\
&= v^\top . B^\top\mu.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Avec :

$$(B^\top\mu)^\top = \frac{(B^\top\mu)^\top}{(B^\top\mu^\top).B^\top\mu)^1/2} = \frac{(B^\top\mu)^\top}{\|B^\top\mu\|_X}$$

$$v = \frac{B^\top\mu}{\|B^\top\mu\|_X}.$$

Comme :

$$\|B^\top\mu\|_X \geq \beta\|\mu\|_M, \forall\mu \in M,$$

$$v^\top B\mu \geq \beta\|\mu\|_M, \forall\mu \in M,$$

$$b(v,\mu) \geq \beta\|\mu\|_M, \forall\mu \in M,$$

avec :

$$v = B^\top\mu/\|B^\top\mu\|_X.$$

Comme $\|v\| = 1$

$$\exists\beta > 0 : \sup_{\|v\|_X=1} b(v,\mu) \geq b(v,\mu) \geq \beta\|\mu\|_M.$$

Alors :

$$\exists\beta > 0 : \sup_{\|v\|_X=1} b(v,\mu) \geq \beta\|\mu\|_M. \tag{3.42}$$

C'est la première condition de Brezzi. La seconde s'énonce :

$$\inf_{\|v\|=1} \sup_{\|u\|=1} v^\perp A u \geq \alpha > 0. \tag{3.43}$$

Cette condition s'écrit en dimension quelconque,

$$V := \{v \in X, b(v,\mu) = 0; \forall\mu \in M\}. \tag{3.44}$$

(On dit par abus de langage que V est le noyau de la forme $b(\cdot,\cdot)$).

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0 : \sup\limits_{v \in V_{\|v\|_X=1}} a(u,v) \geq \alpha \|u\|_X^2 \forall u \in X, \\ \forall v \in V, \|v\|_X = 1 \text{ alors } \sup\limits_{\|u\|_X=1} a(u,v) > 0, \end{cases} \tag{3.45}$$

(i.e $a(\cdot,\cdot)$ vérifie sur V les deux conditions de Babuska assurant qu'elle induit un isomorphisme entre V et V').

Remarque.

• *Dans la plupart des cas en pratique, la forme $a(\cdot,\cdot)$ vérifie la condition plus forte de coercivité sur V.*

$$\exists\ \alpha > 0 : a(v,v) \geq \alpha \|v\|_X^2; \forall v \in V. \tag{3.46}$$

On a alors :

Lemme 3.5. *Toute solution (u,λ) du problème (3.17) vérifie*

$$\begin{cases} u \in X : \\ a(u,v) = Lv, \forall v \in V, \\ b(u,\mu) = \chi\mu, \forall \mu \in M. \end{cases} \tag{3.47}$$

De plus, sous les conditions (3.15), (3.16), (3.42) et (3.45) le problème (3.47) possède une solution et une seule vérifiant :

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\alpha}\|L\|_{X'} + \frac{1}{\beta}(\frac{M_a}{\alpha} + 1)\|\chi\|_{M'}. \tag{3.48}$$

Démonstration.

Soit (u,λ) une solution du problème (3.17).
En prenant $v \in V$, il vient que $b(v,\lambda) = 0$, ceci montre la première partie du Lemme.
Comme V est un sous-espace fermé de X et $V^\perp$ est le sous-espace orthogonal à V, on peut écrire donc que :

$$X = V \oplus V^\perp. \tag{3.49}$$

On peut réécrire le problème (3.47) sous la forme équivalente suivante, on pose :

$$u = u_0 + u^\perp, \tag{3.50}$$

avec $u_0 \in V, u^\perp \in V^\perp$.

On remplace dans le problème (3.47)

$$a(u_0 + u^\perp, v) = Lv, \forall v \in V,$$

$$a(u_0, v) + a(u^\perp, v) = Lv, \forall v \in V. \tag{3.51}$$

$$b(u_0 + u^\perp, \mu) = \chi\mu, \forall \mu \in M,$$

$$b(u_0, \mu) + b(u^\perp, \mu) = \chi\mu, \forall \mu \in M.$$

On a $u_0 \in V$ donc $b(u_0, \mu) = 0$. i.e :

$$b(u^\perp, \mu) = \chi\mu, \forall \mu \in M. \tag{3.52}$$

Soit $\mu \neq 0$ la condition inf-sup (3.43) montre qu'il existe : $v \neq 0$ tel que :

$$\exists \beta > 0, \sup_{\|v\|_X = 1} b(v, \mu) \geq \beta > 0,$$

$$\exists v \in X : b(v, \mu) > 0,$$

il en résulte que :

$$\begin{aligned} v^\perp \neq 0 \text{ et aussi } : b(v, \mu) &= b(v_0 + v^\perp, \mu) \\ &= b(v_0, \mu) + b(v^\perp, \mu) \end{aligned}$$

$$b(v_0, \mu) = 0, \text{ avec } v_0 \in V$$

$$b(v, \mu) = b(v^\perp, \mu)$$

$$\frac{1}{\|v^\perp\|_X} b(v^\perp, \mu) = \frac{\|v\|_X}{\|v^\perp\|_X} \frac{1}{\|v\|_X} b(v, \mu) \geq \frac{1}{\|v\|_X} b(v, \mu). \tag{3.53}$$

$$v = v_0 + v^\perp \Longrightarrow \|v\|_X \geq \|v^\perp\|_X.$$

Alors :

$$\frac{\|v\|_X}{\|v^\perp\|_X} \geq 1.$$

Il s'ensuite que :

$$v = v^\perp + v_0.$$

$$\text{si } \|u\|_X = 1 \Longrightarrow \|v^\perp\|_X \leq 1$$

$$\Longrightarrow 1 \leq \frac{1}{\|v^\perp\|_X}$$

$$\sup_{\|v^\perp\|_X=1} b(v^\perp,\mu) \geq \sup_{\|v\|_X=1} \frac{1}{\|v^\perp\|_X} b(v^\perp,\mu) \geq \sup_{\|v\|_X=1} b(v,\mu) \geq \beta\|\mu\|_M. \tag{3.54}$$

donc :

$$\sup_{\|v^\perp\|_X=1} b(v^\perp,\mu) \geq \beta\|\mu\|_M.$$

La forme $b(\cdot,\cdot)$ vérifie la condition inf-*sup* (3.5) du théorème de Babuska sur l'espace $V^\perp \times M$, on a en outre :

$$\forall v^\perp \in V^\perp, V^\perp \neq 0, \exists \mu \in M : b(v^\perp,\mu) \neq 0. \tag{3.55}$$

Le corollaire 3.3 montre que la condition (3.5) de Babuska est vérifiée pour tout $v^\perp \in V^\perp$ et donc il existe $u^\perp \in V^\perp$ tel que (3.52) et l'on a :

$$b(u^\perp,\mu) = \chi\mu, \forall \mu \in M,$$

$$\sup_{\|\mu\|_M=1} b(u^\perp,\mu) = \sup \chi\mu,$$

$$\beta\|u^\perp\|_X \leq \sup_{\|\mu\|_M=1} b(u^\perp,\mu) = \sup_{\|\mu\|_M=1} \chi\mu = \|\chi\|_{M'}.$$

$$\beta\|u^\perp\|_X \leq \|\chi\|_M,$$

$$\|u^\perp\|_X \leq \frac{1}{\beta}\|\chi\|_{M'}. \tag{3.56}$$

Alors le théorème de Babuska permet d'affirmer que le problème (3.51) admet une solution et une seule vérifiant :

$$\|u_0\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{v\in V_{\|v\|_X=1}} |Lv - a(u^\perp,v)| \tag{3.57}$$

En effet :

$$a(u_0,v) + a(u^\perp,v) = Lv; \forall v \in V,$$

$$a(u_0,v) = Lv - a(u^\perp,v),$$

$$\sup_{v\in V_{\|v\|_X=1}} |Lv - a(u^\perp,v)| = \sup_{\|v\|_X=1} a(u_0,v) \geq \alpha\|u_0\|_X,$$

$$\sup_{v\in V_{\|v\|_X=1}} |Lv - a(u^\perp,v)| \geq \alpha\|u_0\|_X.$$

$$\|u_0\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{v\in V_{\|v\|_X=1}} |Lv - a(u^\perp,v)|$$

mais, pour $\|v\|_X = 1$,

$$|Lv - a(u^\perp, v)| \leq \|L\|_{X'}\|v\|_X + M_a\|u^\perp\|_X\|v\|_X,$$

on a :

$$u = u^\perp + u_0.$$

$$\|u^\perp\| \leq \frac{1}{\beta}\|\chi\|_{M'}$$

.

$$\|u_0\| \leq \frac{1}{\alpha}\sup|Lv - a(u^\perp, v)|,$$

$$\begin{aligned}
\|u\|_X &\leq \|u_0\|_X + \|u^\perp\|_X. \\
&\leq \frac{1}{\beta}\|\chi\|_{M'} + \frac{1}{\alpha}\|L\|_{X'} + \frac{M_a}{\alpha}\|u^\perp\|_X. \\
&\leq \frac{1}{\beta}\|\chi\|_{M'} + \frac{1}{\alpha}\|L\|_{X'} + \frac{M_a}{\alpha}(\frac{1}{\beta}\|\chi\|_{M'}) \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\|L\|_{X'} + \frac{1}{\beta}(\frac{M_a}{\alpha} + 1)\|\chi\|_{M'}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Soit u la solution correspondant à $(L, \chi) = 0$. Il s'ensuit que $u \in V$. Le théorème de Babuska permet d'affirmer que $u = 0$. ■

On a alors :

Théorème 3.6 (de Brezzi)**.** *Sous les conditions générales du lemme 3.5, pour tout $(L, \chi) \in X' \times M'$, le problème (3.17) admet une solution et une seule avec λ vérifiant :*

$$\|\lambda\|_M \leq (\frac{M_a}{\alpha} + \frac{1}{\beta})\|L\|_{X'} + \frac{M_a}{\beta^2}(\frac{M_a}{\alpha} + 1)\|\chi\|_{M'}. \tag{3.59}$$

Démonstration.

Le lemme précédent nous ramène à déterminer $\lambda \in M$ tel que :

$$b(v, \lambda) = Lv - a(u, v), \forall v \in X. \tag{3.60}$$

Comme $L(v_0) - a(u, v_0) = 0, \forall v_0 \in V$ l'équation (3.60) est équivalente à :

$$b(v_0 + v^\perp, \lambda) = L(v_0 + v^\perp) - a(u, v_0 + v^\perp), \forall v^\perp \in V^\perp.$$
$$b(v_0, \lambda) + b(v^\perp, \lambda) = Lv_0 + Lv^\perp - a(u, v_0) - a(u, v^\perp)$$

$$b(v^\perp,\lambda) = Lv^\perp - a(u,v^\perp), \forall v^\perp \in V^\perp. \tag{3.61}$$

Les deux propriétés (3.54) et (3.55), nous permettent d'utiliser le théorème de Babuska pour affirmer l'existence de λ.

D'autre part on a :

$$b(v^\perp,\lambda) = Lv^\perp - a(u,v^\perp)$$

$$|b(v^\perp,\lambda)| = |Lv^\perp - a(u,v^\perp)|$$

$$\beta\|\lambda\|_M \leq \sup_{\|v^\perp\|=1} |b(v^\perp,\lambda)| = \sup_{\|v^\perp\|_X=1} |Lv^\perp - a(u,v^\perp)|,$$

$$\beta\|\lambda\|_M \leq \sup_{\substack{v^\perp\in V^\perp \\ \|v^\perp\|_X=1}} |Lv^\perp - a(u,v^\perp)|,$$

c'est à dire :

$$\|\lambda\|_M \leq \frac{1}{\beta}\sup_{\substack{v^\perp\in V^\perp \\ \|v^\perp\|_X=1}} |Lv^\perp - a(u,v^\perp)|, \tag{3.62}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\|\lambda\|_M &\leq \frac{1}{\beta}(\|L\|_{M'} + M_a\|u\|_X)\\ &\leq \frac{1}{\beta}(\|L\|_{M'} + M_a[\frac{1}{\alpha}\|L\|_{X'} + \frac{1}{\beta}(\frac{M_a}{\alpha}+1)\|\chi\|_{M'}])\\ &\leq (\frac{M_a}{\alpha}+\frac{1}{\beta})\|L\|_{X'} + \frac{M_a}{\beta^2}(\frac{M_a}{\alpha}+1)\|\chi\|_{M'}.\end{aligned} \tag{3.63}$$

D'où le résultat.

Soit alors (u,λ) solution de (3.17) avec $(L,\chi) = (0,0)$, l'unicité résulte par le lemme 3.5 pour u et par le théorème de Babuska pour λ. ■

3.3 Approximation d'un problème de type point selle

On est maintenant en mesure de donner des conditions générales sur des sous-espaces de dimension finie $X^h \times M^h$ de $X \times M$ pour les quelles la méthode de Galerkin associée va fonctionner de façon exactement similaire au cas standard. L'idée de cette méthode est de construire des espace $X^h \times M^h$ tel que :

$(X^h \times M^h) \subset (X \times M), 0 < h < h_0.$

$\lim\limits_{h\longrightarrow 0} X_h = X, \; \lim\limits_{h\longrightarrow 0} M_h = M,$

et X_h et M_h sont des dimensions finies.

Le problème approché sera défini par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h : \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = L(v_h), \forall v_h \in X_h, \\ b(u_h, \mu_h) = \chi(\mu_h), \forall \mu_h \in M_h. \end{cases} \tag{3.64}$$

Soit donc pour $0 < h \leq h_0$ une famille de sous-espace $X^h \times M^h$ de $X \times M$ de dimension finie vérifiant les conditions (de compatibilité) de Brezzi suivantes :

• condition inf-sup (uniforme)

$$\exists \beta^* > 0 : \sup_{v^h \in X^h, \|v^h\|_X = 1} b(v^h, \mu^h) \geq \beta^* \|\mu^h\|_M, \forall \mu^h \in M^h; \forall 0 < h < h_0. \tag{3.65}$$

• coercivité sur le noyau (uniforme)

$$V^h := \{v^h \in X^h; b(v^h, \mu^h) = 0, \forall \mu^h \in M^h\}, \tag{3.66}$$

$$\exists \alpha^* > 0 : \sup_{v^h \in V^h, \|v^h\|_X = 1} a(u^h, v^h) \geq \alpha^* \|u^h\|_X, \forall u^h \in V^h, \forall 0 < h \leq h_0. \tag{3.67}$$

Il y a lieu de faire quelques remarques qui seront importantes en pratique.

Remarque.

• *Dans le cas, comme celui du système de Stokes, où la forme $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur tout l'espace X, la condition (3.67)est directement vérifiée par le faite X^h est un sous espace de X.*

• *Dans le cas de la formulation mixte du problème aux limites du 2^{me} ordre ou du système de l'élasticité, la forme $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur V est non sur l'espace X.*

Si la condition suivante est vérifiée

$$V^h \text{ est un sous espace de } V. \tag{3.68}$$

La condition (3.67) est alors directement assurée par la condition de coercivité sur V.

On voit ainsi l'importance de la condition (3.68) dite condition de consistance$forte$.

Théorème 3.7 (de Brezzi). *Sous les deux conditions de Brezzi (3.65)et (3.67), le problème discret*

$$\begin{cases} (u^h, \lambda^h) \in X^h \times M^h : \\ a(u^h, v^h) + b(v^h, \lambda^h) = Lv^h, \forall v^h \in X^h, \\ b(u^h, \mu^h) = \chi\mu^h, \forall \mu^h \in M^h, \end{cases} \tag{3.69}$$

Possède une solution et une seule. De plus, il existe une constante c indépendante de h telle que, si (u, λ) désigne la solution du problème continue (3.17), on a :

$$\|u - u^h\|_X + \|\lambda - \lambda^h\|_M \leq c(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M), \forall (z^h, \sigma^h) \in X^h \times M^h. \tag{3.70}$$

Démonstration.

Comme X^h et M^h sont des sous-espaces de dimension finie de X et M il sont fermés respectivement dans X et M. Le théorème général 3.7 donne alors l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (3.69). Soit maintenant (z^h, σ^h) quelconque dans $X^h \times M^h$. On a :

$$\begin{cases} (u^h - z^h, \lambda^h - \sigma^h) \in X^h \times M^h : \\ a(u^h - z^h, v^h) + b(v^h, \lambda^h - \sigma^h) = a(u - z^h, v^h) + b(v^h, \lambda - \sigma^h); \forall v^h \in X^h, \\ b(u^h - z^h, \mu^h) = b(u - z^h, \mu^h); \forall \mu^h \in M^h. \end{cases} \tag{3.71}$$

i.e $(u^h - z^h, \lambda^h - \sigma^h)$ est solution du problème (3.69) avec :

$$Lv^h = a(u - z^h, v^h) + b(v^h, \lambda - \sigma^h), \tag{3.72}$$

$$\chi\mu^h = b(u - z^h, \mu^h), \tag{3.73}$$

mais comme :

$$\begin{aligned} |Lv^h| &= |b(u - z^h, v^h) + b(v^h, \lambda - \sigma^h)| \\ |Lv^h| &\leq M_a \|u - z^h\|_X \|v^h\|_X + M_b \|v^h\|_X \|\lambda - \sigma^h\|_M. \end{aligned} \tag{3.74}$$

et

$$|\chi\mu^h| = |b(u - z^h, \mu^h)|$$

$$|\chi\mu^h| \leqslant M_b \|u - z^h\|_X \|\mu^h\|_M. \tag{3.75}$$

Il résulte de (3.74) et (3.75) que :

$$\|L\|_{(X^h)'} \leq c(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M) \tag{3.76}$$

$$\|\chi\|_{(M^h)'} \leq c(\|u - z^h\|_X). \tag{3.77}$$

En effet :

$$\forall v^h \in X^h : \frac{|Lv^h|}{\|v^h\|_X} \leq C(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M),$$

pour : $\|v^h\| = 1, \forall v^h \in X^h, |Lv^h| \leq c(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M)$

$$\sup_{\|v^h\|=1} |Lv^h| \leq c(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M)$$

$$\|L\|_{(X^h)'} \leq c(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M)$$

De même :

$$\forall \mu^h \in M^h : \frac{|\chi\mu^h|}{\|\mu^h\|_M} \leq c(\|u - z^h\|_X)$$

Pour $\|\mu^h\|_M = 1, \forall \mu^h \in M^h$

$$|\chi\mu^h| \leq c(\|u - z^h\|)$$

$$\sup_{\|\mu^h\|_M=1} |\chi\mu^h| \leq c(\|u - z^h\|_X)$$

$$\|\chi\|_{(M^h)'} \leq c(\|u - z^h\|_X)$$

. En appliquant les résultats généraux du théorème 3.7, il vient que

$$\|u^h - z^h\|_X + \|\lambda^h - \sigma^h\|_M \leq c(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M), \tag{3.78}$$

où c est une constante ne dépendant que de M_a, M_b, α^*, β^*. En effet :

$$\begin{aligned}
\|\lambda^h - \sigma^h\|_M &\leq (\frac{M_a}{\alpha^*} + \frac{1}{\beta^*})\|L\|_{(X^h)'} + \frac{M_a}{\beta^*}(\frac{M_a}{\alpha^*} + 1)\|\chi\|_{(M^h)'} \\
&\leq K_1\|L\|_{(X^h)'} + K_2\|\chi\|_{(M^h)'} \\
&\leq K(\|L\|_{(X^h)'} + \|\chi\|_{(M^h)'})\text{tel que } K = max(K_1, K_2) \\
&\leq K(2c\|u - z^h\|_X + c\|u - z^h\|_X) \\
&= 2cK\|u - z^h\|_x + Kc\|\lambda - \sigma^h\|_M \\
&\leq c_1(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M).\ c_1 = max(2cK, Kc).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.5 on a :

$$\begin{aligned}
\|u^h - z^h\|_X &\leq \frac{1}{\alpha^*}\|L\|_{(X^h)'} + \frac{1}{\beta^*}(\frac{M_a}{\alpha^*} + 1)\|\chi\|_{(M^h)'} \\
&\leq K_1\|L\|_{(X^h)'} + K_2\|\chi\|_{(M^h)'} \\
&\leq K(\|L\|_{(X^h)'} + \|\chi\|_{(M^h)'}), \text{tel que } K = max(K_1, K_2) \\
&\leq K(2c\|u - z^h\|_X + c\|\lambda - \sigma^h\|_M) \\
&=\leq K(2c\|u - z^h\|_X + Kc\|\lambda - \sigma^h\|_M) \\
&\leq c_2(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M).\text{tel que } c_2 = max(2kc, kc). \\
\|u^h - z^h\|_X + \|\lambda^h - \sigma^h\|_M &\leq c_1(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M) + c_2(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M) \\
&\leq c_1 + c_2(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M).
\end{aligned}$$

$$\|u^h - z^h\|_X + \|\lambda^h - \sigma^h\|_M \leq c(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M).$$

Le résultat s'obtient alors par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\|u - u^h\|_X + \|\lambda - \lambda^h\|_M &\leq \|u - z^h\|_X + \|u^h - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M + \|\lambda^h - \sigma^h\|_M \\
&\leq C(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M) + (\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M) \\
&= (c + 1)(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M),
\end{aligned}$$

$$\|u - u^h\|_X + \|\lambda - \lambda^h\| \leq C(\|u - z^h\|_X + \|\lambda - \sigma^h\|_M). \tag{3.79}$$

■

Supposons que la famille $\{X^h \times M^h\}_{0<h<h_0}$ approche $X \times M$ au sens usuel des méthode mixte d'élément finis

$$\begin{cases} \text{Il existe } W \subset X \text{ et } \rho_h \in L(W, X^h) \\ \|w - \rho_h w\|_X \leq \delta_1(h)\|w\|_W;\ \forall\ w\ \in\ W \\ \lim_{h \longrightarrow 0} \delta_1(h) = 0 \end{cases} \tag{3.80}$$

$$\begin{cases} \text{Il existe } N \subset\ M \text{ et } \gamma_h\ \in\ L(N, M^h) \\ \|\lambda - \gamma_h\lambda\|_M \leq \delta_2(h)\|\lambda\|_N; \forall\lambda \in N \\ \lim_{h \longrightarrow 0} \delta_2(h) = 0. \end{cases} \tag{3.81}$$

On a alors, comme pour les méthodes mixte standard, le résultat du convergence suivant :

Théorème 3.8. *Sous les conditions précédentes, la solution du problème discret (3.69) converge vers la solution du problème exact (3.17) lorsque h tend vers 0, i.e. :*

$$\lim_{h \longrightarrow 0}(\|u - u^h\|_X + \|\lambda - \lambda^h\|_M) = 0. \tag{3.82}$$

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $(z, \sigma) \in W \times N$ tel que :

$$\|u - z\|_X + \|\lambda - \sigma\|_M \leq \frac{\varepsilon}{2c}. \tag{3.83}$$

Où c est la constante intervenant dans l'estimation (3.70). Comme

$$\|z - \rho_h z\|_X + \|\sigma - \gamma_h \sigma\|_M \leq \delta_1(h)\|z\|_W + \delta_2(h)\|\sigma\|_N = \delta(h) \tag{3.84}$$

et donc $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \delta(h) = 0$, il existe h* tel que pour 0 < h <h*, on ait :

$$\|z - \rho_h z\|_X + \|\sigma - \gamma_h \sigma\|_M \leq \frac{\varepsilon}{2c}. \tag{3.85}$$

D'âpre le lemme de céa il vient que :

$$\begin{aligned}\|u - u^h\|_X + \|\lambda - \lambda^h\|_M &\leq c(\|u - z\|_X + \|z - \rho_h z\|_X + \|\lambda - \sigma\|_M + \|\sigma - \gamma_h \sigma\|_M) \\ &\leq c(\frac{\varepsilon}{2c} + \frac{\varepsilon}{2c}) = \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Comme nous l'avons souligné ci-dessus, la condition (3.67) résulte généralement de propriétés de coercivité de la forme $a(\cdot, \cdot)$. En pratique, c'est souvent la condition inf-sup qui est la plus difficile à satisfaire et à vérifier. Le critère suivante du à Fortin est souvent utile.

Théorème 3.9 (Fortin)**.** *Supposons que la condition inf-sup continue (3.42) soit vérifiée et qu'il existe $T_h \in \mathcal{L}(X, X^h)$ vérifiant :*

$$\exists \gamma > 0 : \|T_h v\|_X \leq \gamma \|v\|_X ; \forall v \in X, \forall h, 0 < h < h_0. \tag{3.86}$$

$$b(T_h v, \mu^h) = b(v, \mu^h), \forall \mu^h \in M^h. \tag{3.87}$$

Alors, la condition inf-sup *uniforme (3.65) est vérifier avec $\beta^* = \frac{\beta}{\gamma}$.*

Démonstration.

Soit $\mu^h \in M^h : \mu^h \neq 0$. La condition inf-sup continue montre qu'il existe $v \in X$ tel que $\|v\|_X = 1$ et $b(v, \mu^h) > 0$. La condition (3.87) montre que $T_h v \neq 0$.

L'inégalité (3.86) nous donne dans ce cas :

$$\|T_h v\|_X \leq \gamma.$$

Alors :

$$\frac{1}{\|T_h v\|_X} b(T_h v, \mu^h) \geq \frac{1}{\gamma} b(v, \mu^h).$$

Il s'ensuit que :

$$\sup_{v^h \in X^h, \|v^h\|_X = 1} b(v^h, \mu^h) \geq \frac{1}{\gamma} \sup_{\|v\|_X = 1} b(v, \mu^h) \geq \frac{\beta}{\gamma} \|\mu^h\|_M. \tag{3.88}$$

■

Chapitre 4

Application au problème de Stokes

On rappelle le problème de Stokes avec condition de Dirichlet homogène défini par :

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f \ dans \ \Omega, \\ div \ u \ = \ 0 \ dans \ \Omega, \\ u = 0 \ sur \ \Gamma. \end{cases} \tag{4.1}$$

On a vu dans le chapitre 2, que le problème (4.1) peut ainsi être réécrit sous forme du problème mixte suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u,p) \in X \times M, \forall (v,q) \in X \times M : \\ a(u,v) + b(v,p) = Lv, \\ b(v,q) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Avec :

$$X := H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \ , \ M = L^2(\Omega)/R. \tag{4.3}$$

$$a(u,v) = \nu \int_\Omega \nabla u : \nabla v \ d\Omega, \tag{4.4}$$

$$b(v,p) = -\int_\Omega p \text{ div } v \ d\Omega, \tag{4.5}$$

et

$$Lv = \int_\Omega f.v \ d\Omega. \tag{4.6}$$

Nous allons chercher à montrer que (4.2) admet une solution unique. Pour cela on va introduira le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in L^2(\Omega)$, il existe $v \in H^1(\Omega)$ qui vérifie :*

$$\begin{cases} div\ v = p \ dans\ \Omega, \\ \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|p\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \tag{4.7}$$

De plus si $p \in L^2_0(\Omega)$, alors on peut prendre que $v \in H^1_0(\Omega)$.

Démonstration. Voir par exemple [5]. ■

Cela nous amène à démontrer la condition inf-sup de Babuska-Brezzi nécessaire pour assurer l'existence et l'unicité du problème (4.2) :

Proposition 4.2. *La forme $b(\cdot,\cdot)$ définie en (4.5) vérifie la condition inf-sup de Brezzi sur $X \times M$, c'est à dire :*

$$\exists \beta > 0 : \sup_{\|v\|_X=1} b(v,q) \geq \beta\|q\|_{L^2(\Omega)}, \forall\ q\ \in M. \tag{4.8}$$

Démonstration.

Soit $q \in M$. D'après le lemme 4.1, il existe $w \in X$ tel que :

$$q = -div\ w\ et\ \|w\|_X \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned} b(w,q) &= -\int_\Omega q\ div\ w\ dx \\ &= \int_\Omega q^2 dx. \end{aligned}$$

On a alors :

$$b(w,q) = \|q\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'autre part comme : $\|w\|_X \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)}$, on a

$$\frac{1}{\|w\|_X} \geq \frac{1}{C}\frac{1}{\|q\|_{L^2(\Omega)}}, \tag{4.9}$$

donc :

$$\frac{1}{\|w\|_X} b(w,q) \geq \frac{1}{C}\frac{1}{\|q\|_{L^2(\Omega)}} b(w,q) = \frac{1}{C}\|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, la forme $b(\cdot,\cdot)$ vérifie la condition $inf\text{-}sup$ avec $\beta = \frac{1}{C} > 0$, où C est la constante du lemme 4.1.

Reste à vérifier la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$. ■

Théorème 4.3. *Le problème (4.2) admet une solution unique* $(u,p) \in X \times M$.

Démonstration.

Soit $v \in X$, par définition :

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \nu \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega \\ &= \nu |v|^2_{1,\Omega} \\ &\geq c\|v\|^2_{1,\Omega} \text{ (grâce à l'inégalité de Poincaré).} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Donc $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur l'espace X. ■

En particulier, elle l'est sur $V \subset X$, avec :

$$V := \{v \in X \ ; \ b(v,q) = 0, \forall q \in M\}.$$

Le théorème de Babuska-Brezzi permet de conclure que le problème de Stokes admet une solution unique.

Bibliographie

[1] G. Allaire, Analyse Numérique et Optimisation, Éditions de l'École Polytechnique, 2006.

[2] F. Brezzi, M.Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer Series in Computational Mathematics, Springer Verlag, New York Berlin Heidelberq, 1991.

[3] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle théorie et applications, Université Pierre et Marie Curie et École Polytechnique, Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo, 1987.

[4] V. Girault, P.A. Raviart, Finite element methode for Navier-Stokes equations, Springer Series in Computational Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 1986.

[5] G. P. Galdi, An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations : Linearized Steady Problems, Springer Tracts in Natural philosophy, Vol.38, Springer, New York, 2nd edition, 1998.

[6] X. Gourdon, Analyse, Collection Ellipse, 2éme édition, 2008.

[7] H. Le Dret, Notes de cours M-2 Equations aux dérivées partielles elliptiques, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 4 mars 2010.