République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématique

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Sur la continuité des multi-applicatoins

Présenté par :

–Laour Fatima Zahra.

– Labiod Amina.

Devant le jury :

Président	:	***S.Melit***	Grade	**M.C.B**	Université de Jijel
Encadreur	:	***S.Izza***	Grade	**M.C.B**	Université de Jijel
Examinateur	:	***B.Saoudi***	Grade	**M.A.A**	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Table des matières

Remerciements

En premier lieu, nous remercions ALLAH le tout puissant de nous avoir accordé les connaissances de la science et de nous avoir aidées à réaliser ce travail.

Nous remercions aussi chaleureusement notre encadreur Mlle IZZA SABRINA d'avoir proposé le sujet de ce mémoire et de nous avoir aidé dans la réalisation de ce dernier, le travail fut difficile, mais très bénéfique.

Nous remercions aussi les membres du jury de nous avoir fait l'honneur de corriger, commenter et noter ce travail.

Enfin nous remercions nos collègues de promotion de nous avoir surtout constamment encouragé et tous ceux qui ont contribués de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste projet.

Dédicaces

nous dédions ce travail à nos parents et au reste des membres de nos familles qui nous ont soutenues et encouragées dans tout les domaines de la vie et surtout les études.

Fatima Zahra et Amina

Notations

(X, d) un espace métrique .

V un ouvert de X.

$\mathcal{P}(X)$ la partition de X.

$\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensembles de tous les sous ensembles fermés de X.

$\overline{A}$ la fermeture de A.

$\mathbb{B}(x_0, r)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

$\overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r.

$\mathbb{B}$ la boule unité.

$int(A)$ l'intérieur de l'ensemble A.

$Im(F)$ l'image de F.

$dom(F))$ le domaine effectif de F.

$gph(F)$ le graphe de F.

F^{-1} la multi-application inverse de F.

$F^{-1}(V)$ l'image réciproque large de V par F.

$F_{+}^{-1}(V)$ l'image réciproque étroite de V par F.

$e(A, B)$ l'écart entre A et B.

$h(A, B)$ la distance de Hausdorff entre A et B.

$\vartheta(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

$\longrightarrow$ convergence forte.

$P_A(X)$ la projection de x sur l'ensemble A.

s.c.s. semicontinue supérieurement.

s.c.i. semicontinue inférieurement.

s.c.e. semicontinue extérieurement.

H-s.c.s. semicontinuité supérieure au sens la distance de Hausdorff

H-s.c.i. semicontinuité inférieure au sens la distance de Hausdorff

Introduction

Les multi-application sont apparues à un stade précoce en tant qu'inverse des applications qui ne sont pas bijectives.Avec l'idée que l'aspect multivalué est habituellement supprimé des cours élémentaire des mathématiques. En pensant aux nombres complexes, vous avons la racine n-ième pour être considérer comme une fonctions à valeurs multiples. Beaucoup d'autres exemples naturels de fonctions à valeurs multiples peuvent être trouvés dans la théorie des jeux, la théorie des graphes etc...
L'une des branches les plus importantes de l'analyse multivoque qui est strictement liée à la théorie du contrôle est appelée inclusions différentielles.Pour étudier l'existence de solutions de ces dernière ,nous devant d'abord étudier la continuité, la mesurabilité...des multi-applications

Dans l'analyse la signification précise de concepts de base comme la différenciation, l'intégration et l'approximation est dictée par le choix d'une notion de limite pour les suites de fonctions.

Dans le passé ; les limites ponctuelles (Simples) ont reçu beaucoup d' attentions.Qu'ils soient "Uniformes" ou "presque partout", ils sous-tendent les définitions standard des dérivés et des intégrales ainsi que des développement en séries.

Dans l'analyse variationnelles, cependant les limites ponctuelles sont inadéquats pour de telles fins mathématiques. Une approche différente de convergence est nécessaire sur le plan géométrique dans la quelle les suites des ensembles ont le rôle principal.

Ce mémoire est partagé en trois chapitres ; dans le **Chapitre 1** nous avons donné toutes les définitions et les propriétés dont nous avons eu besoin ; c'est à dire quelques résultats sur la compacité dans les espaces topologiques et métriques plus précisément, et aussi nous avons parlé de la continuité des multi-applications. Et nous complétons ce chapitre avec quelques caractérisations de la distance de Hausdorff .

Dans le **Chapitre 2**, nous avons présentées quelques théories concernant la convergence des ensemble, et nous avons parlé des limites supérieure et inférieure qui elles même sont exprimées en termes de convergence des suites d'ensembles. C'est à dire le but de les utiliser pour démontrer certaines des propriétés que nous avons discutées dans le chapitre suivant.

Enfin ; dans le **Chapitre 3** les ensembles X et Y seront munis de topologies séparés, et nous étudions en détail trois concepts de continuité locale pour les multi-applications : semicontinuité superieure, semicontinuité inférieure et semicontinuité extérieure. La semicontinuité exterieure (resp. inférieure) d'une multi-application F en un point x_0 peut être décrite en termes de limites supérieures (resp. inférieures) des valeurs de fonctions introduites avec des familles de points $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ au voisinage du point x_0 : F est semicontinue extérieurement (resp. inférieurement)au point x_0 donnée à chaque fois que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ converge vers x_0, nous avons $F(x_0) \subset \limsup F(x_\lambda)$(resp. $F(x_0) \subset \liminf F(x_\lambda)$. La semicontinuité extérieure globale est égale à la fermeture du graphe de F en tant que sous ensemble de $X \times Y$. La semicontinuité inférieure en x_0 peut être reformulée comme suit ; "l'image inverse" de chaque voisinage V de $F(x_0)$ contient un voisinage de x_0. où l'on définit l'image inverse de V comme l'ensemble des points x tels que $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Si au contraire , nous prenons pour image inverse de V l'ensemble des points x tels que $F(x)$ est contenue dans V, alors on obtient ce qu'on appelle la semicontinuité supérieure.

De toute évidence ; les semicontinuités inférieure et supérieure se réduisent toutes deux à la continuité ordinaire pour les fonctions à valeurs uniques, alors que la semicontinuité exterieure correspond à quelque chose de plus faible.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques définitions et résultats sur la compacité dans les espaces topologiques et métriques plus précisément, et aussi nous avons parlé de la continuité des multi-applications.
Et complétons ce chapitre avec quelques caractérisations de la distance de Hausdorff.

1.1 Rappels sur la compacité des ensembles

1.1.1 Compacité dans un espace topologique

Définition 1.1.1. *Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et s'il vérifie la propriété, dite propriété de Borel-Lebesgue,*
- de toute famille $(U_i, i \in I)$ de parties ouverts de X dont la réumion est X, on peut extraire une sous famille finis $(U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_N}), i_1, ..., i_n \in I$, dont la réunion est X.
Une partie d'un espace topologique X est dite compacte si munie de la topologie induite par celle de X, c'est un espace topologique compact.

Proposition 1.1.1. *Dans un espace topologique séparé, une partie compacte est fermée.*

Proprietés 1.1.1. *Soit X un espace topologique. On a*

1. *Si X est un espace topologique compact et F est un fermé de X, alors F est compact.*
2. *Dans un espace topologique compact, les parties compactes sont les fermés.*
3. *Dans un espace topologique séparé, une union finie de compacts est compacte*

4. *Dans un espace topologique, une intersection quelconque de parties compactes est compacte.*

Définition 1.1.2. ***Espaces localement compacts***
On dit qu'un espace topologique séparé X est localement compact si tout point admet une base de voisinages compacts.

1.1.2 Compacité des espaces métriques

Le théorème qui suit est une caractérisation de la compacité dans les espace métrique.

Théorème 1.1.2. ***Théorème de Bolzano-Weierstrass***
Pour une partie A d'un espace métrique (X, d), les trois assertions suivantes sont équivalentes

1. *A est compacte.*
2. *Propriété de Bolzano-Weierstrass ; Toute partie infinie de A admet un point d'accumulation dans A.*
3. *De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergeant dans A.*

Nous terminons cette section par la définition d'un espace régulier.

Définition 1.1.3. ***Espace régulier***
Un espace régulier est un espace séparé dans lequel on peut séparer un point x et un fermé F ne contenant pas x par deux ouverts disjoints.

1.2 Rappel sur les multi-applications

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. *Soient T et X deux ensembles non vides, on dit que F est une multi-application de T dans X si F est une application de T à valeurs dans $\mathcal{P}(X)$ et on note $F : T \mapsto \mathcal{P}(X)$ ou bien $F : T \rightrightarrows X$ telle que pour tout $t \in T$, $F(t)$ est un ensemble de X .*

Définition 1.2.2. *Soient T et X deux ensembles non vide, et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application.*

1. *On appelle domaine de F et on note $dom(F)$ l'ensemble défini par*
$$dom(F) = \{t \in T,\, F(t) \neq \phi\}$$
2. *On appelle image de F qu'on note $Im(F)$ l'ensemble défini par*
$$Im(F) = \{x \in X,\, \exists t \in T \; t.q. \; x \in F(t)\}.$$

   Si $A \subset T$. On appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ l'ensemble
$$F(A) = \bigcup_{t \in A} F(t) = \{x \in X, \exists t \in A \; t.q. \; x \in F(t)\}.$$

3. *La multi-application inverse de F notés F^{-1} avec $F^{-1} : X \rightrightarrows T$ définie par*
$$t \in F^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in F(t) \text{ où } F^{-1}(x) = \{t \in T,\, x \in F(t)\}.$$
   Et on a :
$$dom(F^{-1}) = Im(F) \text{ et } Im(F^{-1}) = dom(F).$$

En effet

1. *$dom(F^{-1}) = Im(F)$. D'après la **définition 1.2.2** on a*
$$\begin{aligned} x \in dom\big(F^{-1}\big) &\Leftrightarrow F^{-1}(x) \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \exists t \in F^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow x \in F(t) \\ &\Leftrightarrow x \in Im(F). \end{aligned}$$
   D'où
$$dom\big(F^{-1}\big) = Im(F).$$
2. *$dom(F^{-1}) = dom(F)$. D'après la **définition 1.2.2** on a*
$$\begin{aligned} t \in Im\big(F^{-1}\big) &\Leftrightarrow x \in F^{-1}(t) \\ &\Leftrightarrow t \in F(x) \\ &\Leftrightarrow F(x) \neq \phi. \end{aligned}$$
   Alors
$$Im\big(F^{-1}\big) = dom(F).$$

Définition 1.2.3. *soient T et X deux ensembles non vide et $F : T \rightrightarrows X$ une muli-application. On appelle graphe de F le sous ensemble de $T \times X$. On note $gph(F)$ défini par*
$$gph(F) = \{(t, x) \in T \times X,\, x \in F(t)\}\ .$$

Définition 1.2.4. *Soient T et X deux ensembles non vides, et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application, on a*

1. *L'ensemble $F^{-1}(V) = \{t \in T,\, F(t) \cap V \neq \phi\}$ est appelé l'image réciproque large de V par la multi-application F.*
   En effet,
   Soit V un ouvert de X, et soit $t_0 \in F^{-1}(V)$ on a

$$\begin{aligned} t_0 \in F^{-1}(V) &\Leftrightarrow \exists x_0 \in V,\, t_0 \in F^{-1}(x_0) \\ &\Leftrightarrow \exists x_0 \in V,\, x_0 \in F(t_0) \\ &\Leftrightarrow \exists x_0 \in X,\, x_0 \in F(t_0) \cap V \\ &\Leftrightarrow F(t_0) \cap V \neq \phi \\ &\Leftrightarrow t_0 \in \{t \in T,\, F(t) \cap V \neq \phi\}. \end{aligned}$$

   Donc

$$F^{-1}(V) = \{t \in T,\, F(t) \cap V \neq \phi\}.$$

2. *On définit aussi l'image réciproque étroite de V par la multi-application F notée $F_+^{-1}(V)$ par*

$$F_+^{-1}(V) = \{t \in T,\, F(t) \subseteq V\}$$

   Et nous avons

$$T \backslash F_+^{-1}(V) = F^{-1}(X \setminus V). \tag{1.1}$$

$$T \setminus F^{-1}(V) = F_+^{-1}(X \backslash V). \tag{1.2}$$

Démonstration.

1. Démonstration de (1.1)

$$\begin{aligned} t \in T \backslash F_+^{-1}(V) &\Leftrightarrow t \in T \text{ et } t \notin F_+^{-1}(V) \\ &\Leftrightarrow t \in T \text{ et } F(t) \subsetneq V \\ &\Leftrightarrow t \in T \text{ et } \exists x \in F(t) \text{ tq } x \notin V \\ &\Leftrightarrow t \in T,\, \exists x \in F(t) \text{ et } x \in X \backslash V \\ &\Leftrightarrow t \in T,\, x \in F(t) \cap (X \backslash V) \\ &\Leftrightarrow t \in T \text{ et } F(t) \cap (X \backslash V) \neq \phi \\ &\Leftrightarrow t \in F^{-1}(X \backslash V). \end{aligned}$$

   Alors

$$T \backslash F_+^{-1}(V) = F^{-1}(X \backslash V).$$

2. Démonstration de (1.2)

$$\begin{aligned} t \in T \backslash F^{-1}(V) &\Leftrightarrow t \in T \ et \ t \notin F^{-1}(V) \\ &\Leftrightarrow t \in T \ et \ F(t) \cap V = \phi \\ &\Leftrightarrow t \in T, \, \forall x \in F(t), \, x \notin V \\ &\Leftrightarrow t \in T \ et \ \forall x \in F(t), \, x \in (X \backslash V) \\ &\Leftrightarrow t \in T, \, F(t) \subseteq (X \backslash V) \\ &\Leftrightarrow t \in F_{+}^{-1}(X \backslash V). \end{aligned}$$

D'où

$$T \backslash F^{-1}(V) = F_{+}^{-1}(X \backslash V).$$

■

Définition 1.2.5. *Soient T et X deux ensembles non vides et $F : T \rightrightarrows X$ et $G : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications. Alors on a*

1. *La multi-application union de deux multi-application F et G est définie par*

$$\begin{aligned} F \cup G : T &\rightrightarrows X \\ t &\mapsto (F \cup G)(t) = F(t) \cup G(t). \end{aligned}$$

2. *La multi-application intersection de deux multi-applications F et G est définie par*

$$\begin{aligned} F \cap G : T &\rightrightarrows X \\ t &\mapsto (F \cap G)(t) = F(t) \cap G(t). \end{aligned}$$

3. *Le Produit cartésien de deux multi-applications F et G est définie par*

$$\begin{aligned} F \times G : T &\rightrightarrows X \\ t &\mapsto (F \times G)(t) = F(t) \times G(t). \end{aligned}$$

4. *Supposons maintenant que T, X et Y sont des ensembles non vides , et $F : T \rightrightarrows X$ et $G : X \rightrightarrows Y$ deux multi-applications. Alors la composition de F et G est définie par*

$$\begin{aligned} F \circ G : T &\rightrightarrows Y \\ t &\mapsto (F \circ G)(t) = G(F(t)) = \bigcup_{x \in F(t)} G(x). \end{aligned}$$

Lemme 1.2.1. *Soient T et X deux ensembles non-vides et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. Supposons que $\{A_i,\, i \in I\}$ est une famille des sous ensembles de T avec $I \subseteq \mathbb{N}$. Donc on a*

1. $F\Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I} F(A_i)$.

2. $F\Big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap\limits_{i\in T} F(A_i)$.

Démonstration.

1. Soit $x \in F\Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big)$. D'après la **Définition 1.2.2** on a

$$\begin{aligned}
x \in F\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{t\in \underset{i\in I}{\cup} A_i} F(t) \\
&\Leftrightarrow \exists t \in \bigcup_{i\in I} A_i \ t.q.\ x \in F(t) \\
&\Leftrightarrow \exists i_0 \in I,\, \exists t \in A_{i_0} \ t.q.\ x \in F(t) \\
&\Leftrightarrow \exists i_0 \in I \ t.q.\ x \in F\big(A_{i_0}\big) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} F(A_i).
\end{aligned}$$

D'où

$$F\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} F(A_i).$$

2. Soit$x \in F\Big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\Big)$. D'après la **Définition 1.2.2** on a

$$\begin{aligned}
x \in F\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{t\in \underset{i\in I}{\cap} A_i} F(t) \\
&\Leftrightarrow \exists t \in \bigcap_{i\in I} A_i \ t.q.\ x \in F(t) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I,\, \exists t \in A_i \ t.q.\ x \in F(t) \\
&\Rightarrow \forall i \in I,\, x \in F(A_i) \\
&\Rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} F(A_i).
\end{aligned}$$

Alors

$$F\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} F(A_i).$$

■

Lemme 1.2.2. *Soient T et X deux ensembles non-vides et F une multi-application de T dans X. Supposons $\{B_i,\, i \in I\}$ avec $I \subseteq \mathbb{N}$ est une famille de sous ensembles de X, alors*

1. $F^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I} F^{-1}(B_i)$.

2. $F^{-1}\Big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\Big) \subset \bigcap\limits_{i\in I} F^{-1}(B_i)$.

Démonstration.

1. Soit $t \in F^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\Big)$. D'après la **Définition 1.2.2** on a

$$\begin{aligned}
t \in F^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) &\Leftrightarrow t \in \bigcup_{t\in \bigcup\limits_{i\in I} B_i} F^{-1}(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x_0 \in \bigcup_{i\in I} B_i \; t.q. \; x_0 \in F(t) \\
&\Leftrightarrow \exists i_0 \in I,\, \exists x_0 \in B_{i_0} \; t.q. \; x_0 \in F(t) \\
&\Leftrightarrow \exists i_0 \in I,\, x_0 \in B_{i_0} \cap F(t) \\
&\Leftrightarrow \exists i_0 \in I,\, B_{i_0} \cap F(t) \neq \phi \\
&\Leftrightarrow \exists i_0 \in I,\, t \in F^{-1}(B_{i_0}) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} F^{-1}(B_i).
\end{aligned}$$

Donc

$$F^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} F^{-1}(B_i).$$

2. Soit$t \in F^{-1}\Big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\Big)$. D'après la **Définition 1.2.2** on a

$$\begin{aligned}
t \in F^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) &\Leftrightarrow t \in \bigcup_{t\in \bigcap\limits_{i\in I} B_i} F^{-1}(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x_0 \in \bigcap_{i\in I} B_i \; t.q. \; x_0 \in F(t) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I,\, \exists x_0 \in B_i \; t.q. \; x_0 \in F(t) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I,\, x_0 \in B_i \cap F(t) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I,\, B_i \cap F(t) \neq \phi \\
&\Rightarrow \forall i \in I,\, t \in F^{-1}(B_i) \\
&\Rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} F^{-1}(B_i).
\end{aligned}$$

Alors

$$F^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} F^{-1}(B_i).$$

■

1.2.2 Distance de Hausdorff

Soit (X, d) un espace métrique, supposons dans la suite que

$$d(x, y) < \infty, \quad \forall x, y \in X.$$

Définition 1.2.6. *Soient A et B deux sous ensembles de X. On appelle écart entre A et B, et on note $e(A, B)$ la quantité définie par*

$$e(A, B) = \sup_{x\in A} d(x, B)$$

avec

$$d(x, B) = \inf_{y\in B} d(x, y)$$

Définition 1.2.7. *Soient A et B deux sous ensembles de X. On appelle la distance de Hausdorff entre A et B notée $h(A, B)$ la quantité définie par*

$$h(A, B) = max\big(e(A, B), e(B, A)\big).$$

Remarque 1.2.1. *Soient A, B et C des sous ensembles de X. Alors*

1. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.
2. $h(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

Proposition 1.2.3. *Soit (X, d) un espace métrique et $\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensemble de tous les sous ensembles fermés de X. Alors $(\mathcal{P}_{cl}(X), h)$ est un espace métrique.*

Démonstration.

Soit $A, B \in \mathcal{P}_{cl}(X)$ on a

1.
$$\begin{aligned} h(A, B) = 0 &\Leftrightarrow e(A, B) = 0 \; et \; e(B, A) = 0 \\ &\Leftrightarrow A \subset \overline{B} \; et \; B \subset \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \overline{A} \subset \overline{B} \; et \; \overline{B} \subset \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}. \end{aligned}$$

Comme A et B sont fermés, on obtient

$$A = B$$

2.

$$\begin{aligned} h(A,B) &= max\big(e(A,B), e(B,A)\big) \\ &= max\big(e(B,A), e(A,B)\big) \\ &= h(B,A). \end{aligned}$$

3. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}_{cl}(X)$, on a

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y), \quad \forall x \in A,\ y \in C,\ et\ z \in B.$$

D'où

$$\inf_{y\in C} d(x,y) \leqslant d(x,z) + \inf_{y\in C} d(z,y),\ \forall x \in A, \forall z \in B.$$

C'est à dire

$$d(x,C) \leqslant d(x,z) + d(z,C),\ \forall x \in A, \forall z \in B.$$

Comme z est quelconque dans B, alors

$$d(x,C) \leqslant \inf_{z\in B} d(x,z) + \sup_{z\in B} d(z,C),\ \forall x \in A$$

Ce qui est équivalent à

$$d(x,C) \leqslant d(x,B) + \sup_{z\in B} d(z,C),\ \forall x \in A$$

Par suite

$$\sup_{x\in A} d(x,C) \leqslant \sup_{x\in A} d(x,B) + e(B,C).$$

i.e.,

$$e(A,C) \leqslant e(A,B) + e(B,C). \tag{1.3}$$

D'autre par

$$h(A,C) = max\big(e(A,C), e(C,A)\big)$$

1) Si $h(A,C) = e(A,C)$, d'après (1.3) on a

$$\begin{aligned} h(A,C) &\leqslant e(A,B) + e(B,C) \\ &\leqslant max\big(e(A,B), e(B,A)\big) + max\big(e(B,C), e(C,B)\big) \\ &\leqslant h(A,B) + h(B,C). \end{aligned} \tag{1.4}$$

2) Si $h(A,B) = e(C,A)$, d'après (1.3) on a

$$\begin{aligned} h(A,C) &\leqslant e(C,B) + e(B,A) \\ &\leqslant max\big(e(C,B), e(B,C)\big) + max\big(e(B,A), e(A,B)\big) \\ &\leqslant h(A,B) + h(B,C). \end{aligned} \tag{1.5}$$

De (1.4) et (1.5), on a

$$h(A,C) \leqslant h(A,B) + h(B,C).$$

Donc, h est une distance sur $\mathcal{P}_{cl}(X)$. C'est dire $(\mathcal{P}_{cl}(X), h)$ est un espace métrique.

■

Proposition 1.2.4. *Soit (X,d) un espace métrique, et soient A et $B \in \mathcal{P}_{cl}(X)$. Alors,*

$$h(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0,\ A \subset V(B,\varepsilon)\ et\ B \subset V(A,\varepsilon)\},$$

avec

$$V(M,\varepsilon) = \{x \in X,\ d(x,M) \leqslant \varepsilon\}\ .$$

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} A \subset V(B,\varepsilon) &\Leftrightarrow \forall x \in A,\ d(x,B) \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \in A} d(x,B) \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow e(A,B) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve

$$B \subset V(A,\varepsilon) \Leftrightarrow e(B,A) \leqslant \varepsilon.$$

D'où, on a

$$\begin{aligned} \{\varepsilon > 0,\ A \subset V(B,\varepsilon)\ et\ B \subset V(A,\varepsilon)\} &= \{\varepsilon > 0,\ e(A,B) \leq \varepsilon \quad et \quad e(B,A) \leq \varepsilon\} \\ &= \{\varepsilon > 0,\ \max\left(e(A,B), e(B,A) < \varepsilon\right\} \\ &= \{\varepsilon > 0,\ h(A,B) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} h(A,B) \leq h(A,B) &\Rightarrow h(A,B) \in \{\varepsilon > 0, h(A,B) \leqslant \varepsilon\} \\ &\Rightarrow inf\{\varepsilon > 0,\ h(A,B) \leqslant \varepsilon\} \leqslant h(A,B). \end{aligned} \tag{1.6}$$

D'autre part,

$$h(A,B) \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow h(A,B) \leq inf\{\varepsilon > 0,\ h(A,B) \leqslant \varepsilon\}. \tag{1.7}$$

De (1.6) et (1.7)

$$h(A,B) = inf\{\varepsilon > 0,\ h(A,B) \leqslant \varepsilon\} \tag{1.8}$$

$$= \inf\{\varepsilon > 0,\ A \subset V(B,\varepsilon)\ et\ B \subset V(A,\varepsilon)\} \tag{1.9}$$

■Pour finir ce chapitre,on donne la définition de la projection d'un point sur un ensemble.

Proposition 1.2.5. ***Théorème de la projection***
Soit X un espace métrique, $x \in X$ et A une partie non vide de X, existe-t-il un point $\overline{x} \in A$ qui soit le plus proche de x c'est à dire tel que

$$\forall\, y \in A,\ d(x,\overline{x}) \leq d(x,y).$$

Autrement dit tel que,

$$d(x,\overline{x}) = d(x,A) \leq \inf_{y\in A} d(x,y) \quad ou\ encore\ \ d(x,A) = d(x,\overline{x})$$

Un tel point, quand il existe, est appelé la projection de x sur A et est noté $P_A(x)$.

Chapitre 2

Convergences au sens des ensembles

Nous avons présentées quelques théories concernant la convergence des ensembles, et nous avons parlé des limites supérieures et inférieures qui elles même sont exprimées de convergences des suites d'ensembles.
C'est à dire le but de les utiliser pour démontrer certaines des propriétés que nous avons discutées dans le chapitre principal.

Définition 2.0.1. *On définit les deux ensembles suivants*

$$\mathcal{N}_\infty^\# := \{N \subset \mathbb{N}\; t.q.\; N infinie\} \;\; et \; \mathcal{N}_\infty := \{N \subset \mathbb{N}\; t.q.\; \mathbb{N} \backslash N finie\}$$

On a aussi les définitions suivantes

$$\mathcal{N}_\infty^\# := \{N \subset \mathbb{N}\; t.q.\; \forall N' \in \mathcal{N}_\infty,\; N \cap N' \neq \phi\}.$$
$$\mathcal{N}_\infty := \{N \subset \mathbb{N}\; t.q.\; \forall N' \in \mathcal{N}_\infty^\#,\; N \cap N' \neq \phi\}.$$

Définition 2.0.2. *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ la limite extérieure de la suite $(A_n)_n$ qù on note $\limsup\limits_n A_n$ $\big($ou $\overline{\lim} A_n\big)$ est l'ensemble défini par*

$$\limsup_n A_n = \overline{\lim} A_n := \{x \in \mathbb{R}^n,\; \exists N \in \mathcal{N}_\infty^\#,\; \exists x_n \in A_n \; t.q.\; x_n \underset{N}{\longrightarrow} x\} \tag{2.1}$$
$$:= \{x \in \mathbb{R}^n,\; \forall V \in \vartheta(x),\; \exists N \in \mathcal{N}_\infty^\#,\; \forall n \in N,\; A_n \cap V \neq \phi\}. \tag{2.2}$$

où $x_n \underset{N}{\longrightarrow} x$, x_n tend vers x quand $n \in N$ et $n \to \infty$.
Et la limite intérieure est l'ensemble noté $\liminf\limits_n A_n\big($ou $\underline{\lim} A_n\big)$ défini par

$$\liminf_n A_n = \underline{\lim} A_n := \{x \in \mathbb{R}^n,\; \exists N \in \mathcal{N}_\infty,\; \exists x_n \in A_n \; (n \in N)\; t.q.\; x_n \underset{N}{\longrightarrow} x\} \tag{2.3}$$
$$:= \{x \in \mathbb{R}^n,\; \forall V \in \vartheta(x),\; \exists N \in \mathcal{N}_\infty,\; \forall n \in N \; t.q.,\; A_n \cap V \neq \phi\}. \tag{2.4}$$

Définition 2.0.3. *Pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de sous ensembles de* $\mathbb{R}^n$*, on peut prendre un voisinage* $V \in \vartheta(x)$ *de la forme* $\mathbb{B}(x,\varepsilon)$*, car* $\mathbb{B}(x,\varepsilon)\cap A_n \neq \phi$ *est équivalent à* $x \in A_n + \varepsilon\mathbb{B}$*. On trouve alors*

$$\limsup_n A_n := \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathcal{N}_\infty^{\#},\ \forall n \in N,\ x \in A_n + \varepsilon\mathbb{B}\}. \tag{2.5}$$

$$\liminf_n A_n := \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathcal{N}_\infty,\ \forall n \in N,\ x \in A_n + \varepsilon\mathbb{B}\}. \tag{2.6}$$

Définition 2.0.4. *Pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de sous ensembles de* $\mathbb{R}^n$*, et pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a*

$$\limsup_n A_n := \inf_{n\in\mathbb{N}}\big(\overline{\sup_{k\geq n} A_n}\big) \tag{2.7}$$

$$:= \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{N>0}\bigcup_{n\geq N}\mathbb{B}(A_n,\varepsilon). \tag{2.8}$$

$$\liminf_n A_n := \sup_{n\in N}\big(\overline{\inf_{k\geq n} A_n}\big) \tag{2.9}$$

$$:= \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{N>0}\bigcap_{n\geq N}\mathbb{B}(A_n,\varepsilon). \tag{2.10}$$

Remarque 2.0.1. *La limite d'une suite d'ensembles existe, si la limite inférieure et la limite supérieure sont équivalentes. i.e.,*

$$\lim_{n\to+\infty} A_n := \limsup_{n\to+\infty} A_n := \liminf_{n\to+\infty} A_n\ .$$

Remarque 2.0.2.

$\limsup_n A_n$ *est la plus grande valeur d'adhérence de* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\liminf_n A_n$ *est la plus petite valeur d'adhérence de* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proprietés 2.0.1. *Soit* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'un espace métrique* (X,d)*, et* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de sous ensembles d'un espace métrique* (Y,d') *et* $f : X \to Y$ *une fonction continue. Alors*

i) $f(\limsup_n K_n) \subset \limsup_n f(K_n)$.

ii) $f(\liminf_n K_n) \subset \liminf_n f(K_n)$.

iii) $\limsup_n f^{-1}(M_n) \subset f^{-1}(\limsup_n M_n)$.

iv) $\liminf_n f^{-1}(M_n) \subset f^{-1}(\liminf_n M_n)$.

Démonstration.

i) Soit

$$\begin{aligned}
x \in f(\limsup_n K_n) &\Leftrightarrow \exists \overline{x} \in \limsup_n K_n,\ x = f(\overline{x})\\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geq n,\ \overline{x} \in K_n,\ x = f(\overline{x})\\
&\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geq n\ t.q.\ x \in f(K_n)\\
&\Rightarrow x \in \limsup_n f(K_n)\\
&\Rightarrow f(\limsup_n K_n) \subset \limsup_n f(K_n).
\end{aligned}$$

ii) Soit

$$\begin{aligned}
x \in f(\liminf_n K_n) &\Leftrightarrow \exists \overline{x} \in \liminf_n K_n,\ x = f(\overline{x})\\
&\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \overline{x} \in K_n\ et\ x = f(\overline{x})\\
&\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x \in f(K_n)\\
&\Leftrightarrow x \in \liminf_n f(K_n)\\
&\Rightarrow f(\liminf_n K_n) \subset \liminf_n f(K_n).
\end{aligned}$$

iii) Soit

$$\begin{aligned}
x \in \limsup_n f^{-1}(M_n) &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geq n,\ x \in f^{-1}(M_n)\\
&\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geq n,\ \exists\, \overline{x} \in M_n\ t.q.\ \overline{x} = f(x)\\
&\Rightarrow \exists\, \overline{x} \in M_n, \forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geq n,\ \overline{x} = f(x)\\
&\Rightarrow \exists\, \overline{x} \in \limsup_n M_n\ et\ \overline{x} = f(x)\\
&\Rightarrow x \in f^{-1}(\limsup_n M_n)\\
&\Rightarrow \limsup_n f^{-1}(M_n) \subset f^{-1}(\limsup_n M_n).
\end{aligned}$$

iv)Soit

$$\begin{aligned}
x \in \liminf_n f^{-1}(M_n) &\Leftrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x \in f^{-1}(M_{n_0})\\
&\Leftrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \exists\, \overline{x} \in M_{n_0}\, et\, \overline{x} = f(x)\\
&\Rightarrow \exists\, \overline{x} \in M_{n_0},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \overline{x} = f(x)\\
&\Rightarrow \overline{x} \in \liminf_n M_n\ et\ \overline{x} = f(x)\\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\liminf_n M_n)\\
&\Rightarrow \liminf_n f^{-1}(M_n) \subset f^{-1}(\liminf_n M_n)
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.0.1. *Pour $A_n, A \subset \mathbb{R}^n$ avec A fermé, on a*

(a) $A \subset \liminf_n A_n$ *si et seulement si pour tout* $A \cap int\mathbb{B}(x,\rho) \neq \phi$ *pour toute boule* $\mathbb{B}(x,\rho)$, *donc il existe* $N \in \mathcal{N}_\infty$ *tel que* $A_n \cap int\mathbb{B}(x,\rho) \neq \phi$ *pour tout* $n \in N$.

(b) $A \supset \limsup_n A_n$ *si et seulement si pour tout* $A \cap int\mathbb{B}(x,\rho) = \phi$ *pour toute boule* $\mathbb{B}(x,\rho)$, *donc il existe* $N \in \mathcal{N}_\infty$ *tel que* $A_n \cap int\mathbb{B}(x,\rho) \neq \phi$ *pour tout* $n \in N$.

Corollaire 2.0.2. ***la convergence ponctuelle de la fonction distance***

Pour les ensemble A_n *et* $A \subset \mathbb{R}^n$ *avec* A *fermé, on a* $A_n \to A$ *si et seulement si* $d(x, A_n) \to d(x, A)$ *pour chaque* $x \in \mathbb{R}^n$. *De plus*

(a) $A \subset \liminf_n A_n$ *si et seulement si* $d(x, A) \geqslant \limsup_n d(x, A_n)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $A \supset \limsup_n A_n$ *si et seulement si* $d(x, A) \leqslant \liminf_n d(x, A_n)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration.

On suppose que A_n est fermé pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout ensemble fermé A, on a

$$d(x, A) < \alpha \Leftrightarrow A \cap int\mathbb{B}(x,\alpha) \neq \phi. \tag{2.11}$$

$$d(x, A) > \beta \Leftrightarrow A \cap \mathbb{B}(x,\beta) = \phi. \tag{2.12}$$

d'après le **théorème 2.0.1**

(a) $A \subset \liminf_n A_n$ si et seulement si quand $A \cap int\mathbb{B}(x,\rho) \neq \phi$, pour tout $\mathbb{B}(x,\rho)$

$$\exists N \in \mathcal{N}_\infty \, t.q. \, A_n \cap int\mathbb{B}(x,\rho) \neq \phi, \, \forall n \in N, \, \forall \rho \geq 0.$$

Si on prend $\rho = \alpha$, on obtient

Si $A \cap int\mathbb{B}(x,\alpha) \neq \phi \; \forall \mathbb{B}(x,\rho)$, alors $\exists N \in \mathcal{N}_\infty$, $A_n \cap int\mathbb{B}(x,\alpha) \neq \phi$, $\forall n \in N$.

D'après (2.11) on a

$$d(x, A) < \alpha, \, \exists N \in N_\infty \; t.q. \; d(x, A_n) < \alpha, \, \forall n \in N. \tag{2.13}$$

(b) $A \supset \limsup_n A_n$ si et seulement si quand $A \cap \mathbb{B}(x,\rho) = \phi$, pour tout $\mathbb{B}(x,\rho)$

$$\exists N \in \mathcal{N}_\infty \, t.q. \, A_n \cap \mathbb{B}(x,\rho) \neq \phi, \, \forall n \in \mathbb{N}, \, \forall \rho \geq 0.$$

Si on prend $\rho = \beta$ on trouve si

$$A \cap \mathbb{B}(x,\beta) = \phi, \, \forall \mathbb{B}(x,\beta), \, alors \, \exists N \in N_\infty, \, A_n \cap \mathbb{B}(x,\beta) \neq \phi, \, \forall n \in N.$$

D'après (2.12)

$$d(x, A) > \beta, \, \exists N \in N_\infty \; tq \; ; d(x, A_n) > \beta, \, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

De (2.13) et (2.14), on trouve

$$\beta < d(x, A) < \alpha \text{ et } \beta < d(x, A_n) < \alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\beta < d(x, A) < \alpha \text{ et } -\alpha < d(x, A) < -\beta,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\beta - \alpha < d(x, A) - d(x, A_n) < \alpha - \beta,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$\mid d(x, A) - d(x, A_n) \mid < \mid \alpha - \beta \mid, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Posons $\mid \alpha - \beta \mid = \varepsilon,$ on obtient

$$\mid d(x, A) - d(x, A_n) \mid < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc, comme α, β sont quelconques alors ε est quelconque dans $\mathbb{R}_+$. On obtient alors

$$d(x, A_n) \to d(x, A).$$

■

Proposition 2.0.3. *Pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles fermés non vides de $\mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé. On a $A_n \to A$ si et seulement si $\limsup_n d(0, A_n) \leq +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} P_{A_n}(x) \subset P_A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, avec $P_A(x)$ la projection de $x \in \mathbb{R}^n$ sur l'ensemble A de $\mathbb{R}^n$.*

L'orsque A_n et A sont également convexes, $A_n \to A$ si et seulement si $P_{A_n}(x) \to P_A(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration.

On a $A_n \to A$ alors, d'après le **corollaire 2.0.2**

$$d(x, A_n) \to d(x, A) < +\infty\ .$$

Pour $x = 0,$ on a

$$d(0, A_n) \to d(0, A) < +\infty.$$

Considérons $\overline{x} \in \subset \limsup_n P_{A_n}(x),$ alors il existe $N \in \mathcal{N}_\infty^\#$ tel que $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n,$ pour tout $x_n \in A_n$ vérifiant $\mid x_n - x \mid = d(x, A_n)$. i.e., $x_n \in P_{A_n}(x)$

Par passage à la limite, on obtient $\mid \overline{x} - x \mid = d(x, A)$

Mais aussi $\overline{x} \in A$, car

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \mid y - x \mid = \mid \overline{x} - x \mid.$$

Donc $\overline{x} \in P_A(x)$ ainsi $\limsup_n P_{A_n}(x) \subset P_A(x)$
Plus généralement, considérons $x \in \mathbb{R}^n$, d'après le **corollaire 2.0.2** il suffit de vérifier que $d(x, A_n) \to d(x, A)$.
Les ensembles $P_{A_n}(x)$ ne sont pas vide, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $\overline{x}_n \in P_{A_n}(x)$ c'est à dire $\overline{x}_n \in A_n$ avec $\mid \overline{x}_n - x \mid = d(x, A_n)$ ces distances forment une suite bornée car

$$\begin{aligned} d(x, A_n) &= \inf_{y \in A_n} \mid x - y \mid \\ &\leq \inf_{y \in A_n} \Big(\mid x - 0 \mid + \mid 0 - y \mid \Big) \\ &\leq \inf_{y \in A_n} \Big(\mid 0 - y \mid + \mid x \mid \Big) = d(0, A_n) + \mid x \mid . \end{aligned}$$

et $\limsup_n d(0, A_n) < +\infty$, donc

$$\mid \overline{x}_n - x \mid = d(x, A_n) \leq d(0, A_n) + \mid x \mid < +\infty.$$

Tout point d'accumulation de $\Big\{ d(x, A_n) \Big\}_{n \in \mathbb{N}}$ doit être de la forme $\mid \overline{x} - x \mid$ pour un certain point d'accumulation $\overline{x}$ de $\{\overline{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, mais $\overline{x} \in P_A(x)$ par hypothèse donc $\mid \overline{x} - x \mid = d(x, A)$.
Par conséquent $d(x, A_n) \to d(x, A)$.

$\blacksquare$

Théorème 2.0.4. ***Uniformité des approximations dans la convergence des ensembles***

Pour les ensembles A_n, $A \in \mathbb{R}^n$ tel que A fermé, on a

(a) $A \subset \liminf_n A_n$ *si et seulement si pour tout* $\rho > 0$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathcal{N}_\infty \quad t.q. \quad A \cap \rho\mathbb{B} \subset A_n + \varepsilon\mathbb{B}, \forall n \in N.$$

(b) $A \supset \limsup_n A_n$ *si et seulement si pour tout* $\rho > 0$ *et* $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathcal{N}_\infty \quad t.q. \quad A_n + \rho\mathbb{B} \subset A + \varepsilon\mathbb{B}, \forall n \in N.$$

Donc $A = \lim_{n \to +\infty} A_n$ *si et seulement si pour* $\rho > 0$ *et* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble d'indices* $N \in \mathcal{N}_\infty$ *tel que les deux conditions (a) et (b) soient vérifiées.*
On a les caractérisations suivantes de (a) et (b)

(a') $A \subset \liminf_n A_n$ *si et seulement si pour tout* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, *et pour tout* $\rho > 0$ *et* $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathcal{N}_\infty \ t.q. \ \big(A \cap \mathbb{B}(\overline{x}, \rho)\big) \subset \big(A_n + \varepsilon\mathbb{B}\big),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b') $A \supset \limsup_n A_n$ *si et seulement si pour tout* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, *et pour tout* $\rho > 0$ *et* $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathcal{N}_\infty \ tq \ (A_n \cap \mathbb{B}(\overline{x}, \rho)) \subset (A + \varepsilon\mathbb{B}),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration.

Dans (a)

$\Leftarrow$) pour tout $\overline{\rho} \geq 0$, considérons $x \in A$ et soit $\rho \geq \max\{\overline{\rho}, \mid x \mid\}$, alors $x \in A \cap \rho\mathbb{B}$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble d'indices $N \in \mathcal{N}_\infty$ avec $x \in A_n + \varepsilon\mathbb{B}$, *pour tout* $n \in N$. C'est à dire, $x \in \liminf_n A_n$

$\Rightarrow$) Supposons le contraire,

On peut trouver $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathcal{N}_\infty$ tels que les points $x_n \in (A \cap \rho\mathbb{B}) \backslash (A_n + 2\varepsilon\mathbb{B})$ existent pour $n \in N$ avec $x_n \underset{N}{\to} \overline{x}$. Pour n assez grand on a

$$2\varepsilon \leq d(x_n, A_n) \leq d(\overline{x}, A_n) + \mid \overline{x} - x_n \mid \leq d(\overline{x}, A_n) + \varepsilon.$$

Soit $n \to +\infty$ d'après le **corollaire 2.0.2** , on obtient

$$2\varepsilon \leq \limsup_n d(\overline{x}, A_n) + \varepsilon \leq d(\overline{x}, A) + \varepsilon. \tag{2.15}$$

D'où, comme $\overline{x} \in A \cap \rho\mathbb{B}$, donc $d(\overline{x}, A) = 0$ on obtient alors d'après (2.15)

$2\varepsilon \leq \varepsilon$ c'est impossible .

Dans (b)

$\Leftarrow$) Soit $x_n \underset{N}{\longrightarrow} \overline{x}$ pour un certain $N \in \mathcal{N}_\infty^\#$, avec $x_n \in A_n$ pour tout $n \in N$. Supposons que $\overline{x}$ est un point quelconque dans $\limsup_n A_n$, si la seconde condition dans (b) est satisfaite pour tout $\rho > \overline{\rho}$ pour un certain $\overline{\rho} > 0$, il vient que pour tout $\rho > \max\{\overline{\rho}, \mid \overline{x} \mid\}$ et $\varepsilon > 0$, $\overline{x} \in A + \varepsilon\mathbb{B}$. C'est à dire, $\overline{x} \in A$, donc $\limsup_n A_n \subset A$.

$\Rightarrow$) Supposons le contraire i.e., on peut trouver $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathcal{N}_\infty^\#$ tels que pour tout $n \in N$, il existe $x_n \in (A_n \cap \rho\mathbb{B}) \backslash (A + \varepsilon\mathbb{B})$.

Soit $\overline{x}$ un point d'accumulation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\overline{x} \in \limsup_n A_n$ et $\overline{x} \notin A + int(\varepsilon\mathbb{B})$. D'où, $\limsup_n A_n \nsubseteq A$

Justifications de (a') et (b'), les assertions (a') et (b') sont obtenus en remplaçant la boule $\rho\mathbb{B}$ dans la démonstration de (a) et (b) par $\mathbb{B}(\overline{x}, \rho)$ avec $\overline{x}$ quelconque .

$\blacksquare$

Théorème 2.0.5. *Soit K un ensemble d'un espace métrique X satisfaisant pour tout U voisinage de K, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset U$, alors $\limsup_n K_n \subset \overline{K}$.*
Si X est compact la réciproque est vraie.

Proposition 2.0.6. *Soient $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'un espace métrique X s'il existe M un ensemble compact, qui vérifie la propriété suivante*
Pour tout voisinage W de M, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $M_n \subset W$. Alors pour tout voisinage U de $M \cap \big(\limsup_n L_n\big)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $L_n \cap M_n \subset U$ pour tout $n \geq n_0$.

Démonstration.
soit U un voisinage de $(M \cap \big(\limsup_n L_n\big))$
Soit

$$W \in \vartheta(M), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, M_n \subset W. \tag{2.16}$$

$1^{\textbf{er}}$ **Cas**, si $M \subset U$ d'après (2.16), on prend $W = U$ alors $M_n \subseteq U$.
Donc $M_n \cap L_n \subset U$, pour toute suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.
$2^{\textbf{ème}}$**Cas**, $M \nsubseteq U$
Soit U un voisinage de $\big(M \cap \limsup_n L_n\big)$.
Posons $K := M\backslash U$ non vide, $K \cap \limsup_n L_n = \phi$.
Et K est compact car M compact.
Soit $y \in K$ alors $y \notin \limsup_n L_n$, d'où

$$\exists \varepsilon_y > 0,\ N_y \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_y,\ y \notin \mathbb{B}(L_n, \varepsilon_y).$$

Comme K compact et $K = \bigcup_{y\in K} \{y\} \subset \bigcup_{y\in K} \mathbb{B}(y, \varepsilon_y)$, donc il existe un sous recouvrement fini tel que $K \subset \bigcup_{i=0}^{p} \mathbb{B}(y_i, \varepsilon_{y_i})$.
Pour tout $n \geq N_0$, $N_0 := \max\{N_{y_i}\}_{i=1..p}$ et $V = \bigcup_{i=0}^{p} \mathbb{B}(y_i, \varepsilon_{y_i})$ on a $L_n \cap V = \phi$.
D'autre part

$$\begin{aligned} M &= (M \cap U) \cup (M\backslash U) \\ &\subset U \cup K \\ &\subset U \cup V. \end{aligned}$$

Donc, $W := U \cup V \in \vartheta(M)$, d'après l' hypothèse

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1,\ M_n \subset W = U \cup V.$$

Alors,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_1,\; M_n \cap L_n \subset W,\, \forall (L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X.$$

D' où

$$L_n \cap M_n \subset U,\, \forall n \geq \max(N_0, N_1).$$

■

Lemme 2.0.7. *Soit Z un espace métrique et Y un espace métrique compact, soient $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de sous ensembles de Z et Y respectivement.*
Soit $\varphi : Z \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction semicontinue supérieurement.
Posons $M_s = \limsup\limits_n M_n$ et $L_i = \limsup\limits_n L_n$. Alors

$$\limsup_n \big(\sup_{y\in M_n} \inf_{x\in L_n} \varphi(x,y)\big) \leqslant \sup_{y\in M_s} \Big(\inf_{x\in L_i} \varphi(x,y)\Big)$$

Démonstration.
Soit $y \in M_s$ d'après la semicontinuité supérieure de φ on a

$$\forall \varepsilon > 0,\, \forall z \in L_i,\, \exists V \in \vartheta(z)\, et\, W \in \vartheta(y)\; t.q.\; \forall z' \in V,\, \forall y' \in W :\; \varphi(z', y') \leq \varphi(z, y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, pour $z_y \in L_i : \varphi(z_y, y') \leq \inf\limits_{z\in L_i} \varphi(z, y) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
S'il existe $(z_{n_y}) \in L_n$ telle que $z_{n_y} \to z_y$ on a

$$\exists N_y > 0,\, \forall n \geqslant N_y,\, \forall y' \in W :\; \varphi(z_{n_y}, y') \leqslant \varphi(z_y, y) + \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Et

$$\forall y \in M_s,\, \forall n \geqslant N_y,\, \forall y' \in W :\; \inf_{z\in L_n} \varphi(z, y') \leqslant \inf_{z\in L_i} \varphi(z, y) + \varepsilon.$$

Comme M_s compact et $M_s = \bigcup\limits_{y\in M_s} \{y\} \subset \bigcup\limits_{y\in K} W_y$, donc il existe un sous recouverement fini tel que $M_s \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} W_{y_i}$ et $W_{y_i} \in \vartheta(y_i)$ d'après le **théorème** 2.0.5

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N_0 :\; M_n \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} W_{y_i}.$$

Soit $N = \max\{V_i\}_{i=1,n}$, $\forall n \geqslant N \, et \, y \in M_n$

$$\begin{aligned}\inf_{z\in L_n} \varphi(z,y) &\leqslant \inf_{z\in L_i} \varphi(z,y) + \varepsilon \\ &\leqslant \sup_{y\in M_s} \Big(\inf_{z\in L_i} \varphi(z,y) + \varepsilon \Big).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$, pour tout $n \geq N$

$$\sup_{y\in M_n} \Big(\inf_{z\in L_n} \varphi(z,y) \leq \sup_{y\in M_s} \Big(\inf_{z\in L_i} \varphi(z,y) \Big) + \varepsilon.$$

D' où, quand $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{y\in M_n} \Big(\inf_{z\in L_n} \varphi(z,y) \leq \sup_{y\in M_s} \Big(\inf_{z\in L_i} \varphi(z,y) \Big).$$

■

Chapitre 3

Continuités des multi-applications

Soit X et Y des ensembles non vides, pour l'instant sons structure une fonction à valeurs multiples ou multi-fonvtions (multi-applications) de X à Y et simplement une fonction qui assigne à chaque élément de X un sous ensembles (éventuellement vide) de Y. Une fonction à valeurs fixe de X à Y est représentée par la 'double flèche' maintenant standard notation

$$F : X \rightrightarrows Y$$

3.1 Semicontinuité supérieure des multi-applications

Définition 3.1.1. *Soient T et X deux espaces topologiques séparés et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application, on dit que F est semicontinue supérieurement (s.c.s.) au point $t_0 \in T$, si pour tout ouvert U de X contenant $F(t_0)$, il existe un voisinage W de t_0 tel que $F(z) \subset U$, pour tout $z \in W$ ou $F(W) \subset U$. c'est à dire $F_+^{-1}(U)$ est un voisinage de t_0.*

Proposition 3.1.1. ***Caractérisation de la s.c.s.***
la semicontinuité supérieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes

1. *$F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y.*
2. *$F^{-1}(U)$ est un fermé de X pour tout fermé U de Y.*
3. *$\overline{F^{-1}(M)} \subseteq F^{-1}(\overline{M})$ pour tout sous ensemble M de X.*

Démonstration.

F s.c.s $\Rightarrow$ 1) Supposons que F est s.c.s. et montrons que $F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y.
Soit V un ouvert de Y, on doit montrer que $F_+^{-1}(V)$ est un voisinage de tous ces points . Soit $t \in F_+^{-1}(V)$ ce qui est équivalent à $F(t) \subseteq V$, et comme V est un ouvert de Y et F est s.c.s. au point t donc il existe un voisinage Ω de t tel que $F(\Omega) \subset V$.
Alors $\Omega \subset F_+^{-1}(V)$, d'où $F_+^{-1}(V)$ est un voisinage de tous ces points.

1) $\Rightarrow$ 2) On suppose que $F_+^{-1}(U)$ est un ouvert de T, et montrons que $F^{-1}(U)$ est un fermé de T. On a U est un fermé de Y, alors $Y \backslash U$ est un ouvert, d'après 1. $F_+^{-1}(Y \backslash U)$ est un ouvert de X.
D'autre part

$$F_+^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash F^{-1}(U).$$

D'où $X \backslash F^{-1}(U)$ est un ouvert de X, alors $F^{-1}(U)$ est un fermé de X.

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $M \subseteq X$, montrons que $\overline{F^{-1}(M)} \subseteq F^{-1}(\overline{M})$.
Soit

$$t \in F^{-1}(M) \Leftrightarrow F(t) \cap M \neq \phi.$$

Comme

$$\begin{aligned} M \subset \overline{M} &\Rightarrow F(t) \cap \overline{M} \neq \phi \\ &\Rightarrow t \in F^{-1}(\overline{M}) \\ &\Rightarrow F^{-1}(M) \subset F^{-1}(\overline{M}). \end{aligned}$$

On a $\overline{M}$ est un fermé d'après 2. $F^{-1}(\overline{M})$ est un fermé, alors

$$\overline{F^{-1}(M)} \subset F^{-1}(\overline{M}).$$

3) $\Rightarrow$ F s.c.s. Soit $t_0 \in X$ et V un voisinage de $F(t_0)$ tels que $F(t_0) \subset V$, montrons que $F_+^{-1}(V)$ est un voisinage de t_0.
On a

$$X \backslash F_+^{-1}(V) = F^{-1}(Y \backslash V).$$

Et comme V est un ouvert, donc $Y\backslash V$ est un fermé i.e., $\left(Y\backslash V = \overline{Y\backslash V}\right)$.
Alors

$$X\backslash F_+^{-1}(V) = F^{-1}(Y\backslash V) = F^{-1}(\overline{Y\backslash V}) \supseteq \overline{F^{-1}(Y\backslash V)} = \overline{X\backslash F_+^{-1}(V)} \; .$$

D'où

$$\overline{X\backslash F_+^{-1}(V)} \subseteq X\backslash F_+^{-1}(V). \tag{3.1}$$

D'autre part

$$X\backslash F_+^{-1}(V) \subseteq \overline{X\backslash F_+^{-1}(V)}. \tag{3.2}$$

De (3.1) et (3.2)

$$X\backslash F_+^{-1}(V) = \overline{X\backslash F_+^{-1}(V)}.$$

Donc $X\backslash F_+^{-1}(V)$ est un fermé de X, alors $F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de X.
Comme

$$\begin{aligned} F(t_0) \subset V &\Rightarrow t_0 \in F_+^{-1}(V) \\ &\Rightarrow F_+^{-1}(V) \textit{ est un ouvert contenant } t_0 \\ &\Rightarrow F_+^{-1}(V) \in \vartheta(t_0) \\ &\Rightarrow F \textit{ est s.c.s. au point } t_0 \in X. \end{aligned}$$

Donc comme t_0 est quelconque, F est s.c.s. sur X.

■

Théorème 3.1.2. *Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs fermées, alors le graphe de F est fermé dans $X \times Y$.*

Démonstration.
Soit (x_n, y_n) une suite de $gph(F)$ qui converge vers (x, y), il suffit de montrer que $(x, y) \in gph(F)$.
On a F s.c.s. sur X alors F s.c.s. en tout point $x \in X$.
C'est à dire, pour tout $x \in X$ et pour tout U ouvert de X tels que $F(x) \subset U$, il existe $\Omega \in \vartheta(x)$ vérifiant

$$F(z) \subset U, \forall z \in \Omega. \tag{3.3}$$

D'autre part, $\Omega \in \vartheta(x)$ et $x_n \to x$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $x_n \in \Omega$. D'après (3.3)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \ F(x_n) \subset U. \tag{3.4}$$

D'autre part

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) \in gph(F) \text{ alors } y_n \in F(x_n).$$

D'après (3.4)

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U.$$

D'où

$$\forall U \in \vartheta(F(x)), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U.$$

Qu'on peut écrire aussi pour $U = \mathbb{B}(F(x), \varepsilon)$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(y_n, F(x)) < \varepsilon.$$

Qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in \overline{F(x)} = F(x).$$

D'où

$$\begin{aligned} y_n \in F(x),\ y_n \to y \textit{ et } F(x) \text{ fermé} &\Rightarrow y \in F(x) \\ &\Rightarrow (x, y) \in gph(F). \end{aligned}$$

On conclut que $gph(F)$ est fermé dans $X \times Y$.

■

Théorème 3.1.3. *Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et soient $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : X \rightrightarrows Y$ deux multi-applications telles que pour tout $x \in X$, $F(x) \cap G(x) \neq \phi$, et soit $x_0 \in X$, Supposons que*

1. *F est s.c.s. au point $x_0 \in X$.*

2. *$F(x_0)$ est compact.*

3. *le graphe de G est fermé.*

Alors, la multi-application $t \mapsto (F \cap G)(t)$ *est s.c.s. au point* x_0.

Démonstration.

Soit U un voisinage ouvert de $(F \cap G)(x_0)$ alors $F(x_0) \cap G(x_0) \subset U$.

On veut montrer que pour tout $x \in X,$ il existe un voisinage V de x tel que $F(x) \cap G(x) \subset U$.

i) Si $F(x_0) \subset U,$ d'après la s.c.s. de $F,$ il existe $\Omega \in \vartheta(x)$ tel que, $F(x) \subset U$ pour tout $x \in \Omega$.

Comme
$$F(x) \cap G(x) \subset F(x) \subset U, \forall x \in \Omega.$$
Alors
$$\exists V = \Omega \in \vartheta(x_0),\ F(x) \cap G(x) \subset U, \forall x \in V.$$
D'où, $F \cap G$ est s.c.s. au point x_0.

ii) Si $F(x_0) \subsetneq U$ on obtient $F(x_0) \cap \complement_Y^U \neq \phi$.

On pose $K = F(x_0) \cap \complement_Y^U,$ on a U ouvert de Y donc $\complement_Y^U$ est un fermé .

Et comme $F(x_0)$ est compact, alors K est compact (Car : $F(x_0)$ est compact et $\complement_Y^U$ est fermé).

D'autre part, nous avons
$$\begin{aligned}\forall y \in K &\Leftrightarrow y \in F(x_0) \cap \complement_Y^U \\ &\Leftrightarrow y \in F(x_0)\, et\, y \notin U \\ &\Leftrightarrow y \in F(x_0)\, et\, y \notin F(x_0) \cap G(x_0) \\ &\Leftrightarrow y \in F(x_0)\, et\, y \notin G(x_0).\end{aligned}$$

Donc
$$\forall y \in K \Rightarrow y \notin G(x_0)\ .$$
D'où
$$\forall y \in K, (x_0, y) \notin gph(G) = P, \forall x_0 \in X.$$
Ainsi
$$(x_0, y) \in \complement_{X\times Y}^P.$$

On a $gph(G)$ est fermé, alors $\complement_{X\times Y}^P$ est un ouvert, donc il existe $V_{x_0}^y$ un voisinage ouvert de x_0 et W_y un voisinage ouvert de y tels que $V_{x_0}^y \times W_y \subset \complement_{X\times Y}^P$.

Alors

$$(V_{x_0}^y \times W_y) \cap P = \phi \quad \text{i.e.,} \Big(\Big(V_{x_0}^y \times W_y \Big) \cap gph(G) = \phi \Big).$$

On a

$$W_y \in \vartheta(y) \; et \; \forall x \in V_{x_0}^y,\, y \notin G(x) \Rightarrow W_y \cap G(x) \neq \phi,\, \forall x \in V_{x_0}^y. \tag{3.5}$$

D'autre part

$$K = \bigcup_{y \in K} \{y\} \subset \bigcup_{y \in K} W_y \Rightarrow K \subset \underset{y \in K}{\cup} W_y.$$

D'où (W_y) est un recouvrement ouvert de K, et comme K est compact donc on peut extraire un sous-recouvrement fini $(W_{yi})_{i=\overline{1,n}}$ tel que $K \subset \Big(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} W_{y_i} \Big) = W$ i.e., W est un voisinage ouvert de K.

Par suite

$$W \cup U \text{ est un ouvert.}$$

et

$$F(x_0) \subset F(x_0) \cup U = \big(F(x_0) \cap \complement_Y^U \big) \cup U = K \cup U \subset (W \cup U).$$

Donc $F(x_0) \subset W \cup U$, d'où $W \cup U$ est un voisinage de $F(x_0)$

D'autre part $(V \cup U)$ est un voisinage ouvert de $F(x)$ et F s.c.s. au point x_0, donc

$$\exists V_0 \in \vartheta(x_0) \, t.q. \, F(x) \subset W \cup U,\, \forall x \in V_0. \tag{3.6}$$

On prend, $V_{x_0} = V_0 \cap (\overset{n}{\underset{i=0}{\cap}} V_{x0}^{yi})$, pour tout $x \in V_{x_0}$ on a $x \in V_0 \; et \; x \in V_{x0}^{yi}$, $\forall i = \overline{1,n}$.

De (3.5) et (3.6) on a

$$F(x) \subset W \cup U,\, \forall x \in V_0 \text{ et } G(x) \cap W_{yi} \neq \phi,\, \forall x \in V_{x_0},\, \forall i = \overline{1,n} \,.$$

Alors

$$F(x) \subset W \cup U \text{ et } \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \big(G(x) \cap W_{y_i} \big) \neq \phi,\, \forall x \in V_{x_0}$$

Donc

$$F(x) \subset W \cup U \text{ et } G(x) \cap (\overset{n}{\underset{i=0}{\cup}} W_{yi}) \neq \phi,\, \forall x \in V_{x_0} \,.$$

Donc

$$F(x) \subset W \cup U \text{ et } G(x) \cap W \neq \phi,\, \forall x \in V_{x_0}.$$

Par suite

$$F(x) \subset W \cup U \text{ et } G(x) \subset \complement_Y^W,\, \forall x \in V_{x_0}.$$

D'où, pour tout $x \in V_{x_0}$ on a

$$\begin{aligned} F(x) \cap G(x) \subset (W \cup U) \cap \complement_Y^W &= (W \cap \complement_Y^W) \cup (U \cap \complement_Y^W) \\ &= U \cap \complement_Y^W \subset U,\, \forall x \in V_{x_0}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall U \in \vartheta\big(F(x_0) \cap G(x_0) \big),\; \exists V = V_{x_0} \in \vartheta(x_0) \text{ t.q. } F(x) \cap G(x) \subset U,\, \forall x \in V.$$

On conclut que $F \cap G$ est s.c.s. au point x_0.

■

Corollaire 3.1.4. *Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et $G : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non-vides et Y un espace compact. Si le graphe de G est fermé, alors G est s.c.s.*

Démonstration.
Soit

$$\begin{aligned} F : X &\rightrightarrows Y \\ x &\mapsto F(x) = Y \end{aligned}$$

1. F est une m.a constante donc elle est continue (elle est s.c.s. et s.c.i.) donc F s.c.s en tout point $x \in X$.
2. $F(x) = Y$ est compact .
3. $\forall x \in F(x) \cap G(x) = Y \cap G(x) = G(x) \neq \phi$ (Car : G à valeurs non vides).

Donc, d'après le théorème 3.1.3 : $F \cap G$ est s.c.s. ou point x.
D'où, G s.c.s. au point x, et x quelconque alors G est s.c.s. sur X.

■

Théorème 3.1.5. *Soient X, Y deux espaces topologiques et X métrisable.*
On suppose que T et S sont deux multi-applications de X dans Y telles que T et S soient s.c.s. au point x_0. Alors

$$x \mapsto (T \cap S)(x) = T(x) \cap S(x)$$

est une multi-application s.c.s. au point x_0

Démonstration.
Soit U un voisinage ouvert de $(T \cap S)(x_0)$ alors $(T \cap S)(x_0) = T(x_0) \cap S(x_0) \subset U$.

1. Si $S(x_0) \subset U$, comme S est s.c.s. au point x_0, alors

$$\begin{aligned} \exists W_1 \in \vartheta(x_0) \; tq \; S(z) \subset U, \forall z \in W_1 &\Rightarrow S(z) \cap T(z) \subset S(z) \subset U, \forall z \in W_1 \\ &\Rightarrow T(z) \cap S(z) \subset U, \forall z \in W_1 \\ &\Rightarrow (S \cap T)(z) \subset U, \forall z \in W_1 \\ &\Rightarrow S \cap T \text{ est s.c.s. au point } x_0. \end{aligned}$$

2. Si $T(x_0) \subset U$, comme T est scs au point x_0, alors

$$\begin{aligned}\exists W_2 \in \vartheta(x_0)\ tq\ T(z) \subset U, \forall z \in W_2 &\Rightarrow T(z) \cap S(z) \subset T(z) \subset U, \forall z \in W_2\\ &\Rightarrow T(z) \cap S(z) \subset U, \forall z \in W_2\\ &\Rightarrow (S \cap T)(z) \subset U, \forall z \in W_2\\ &\Rightarrow S \cap T\ est\ s.c.s.\ au\ point\ x_0.\end{aligned}$$

3. Si $S(x_0) \subsetneq U$ et $T(x_0) \subsetneq U$, on obtient
$$S(x_0) \cap (X \backslash U) \neq \phi \text{ et } T(x_0) \cap (X \backslash U) \neq \phi.$$

Alors
$$S(x_0) \cap (X \backslash U) \cap T(x_0) \neq \phi\ .$$
Donc
$$\exists \Omega_1 \in \vartheta(S(x_0) \cap (X \backslash U)) \text{ et } \exists \Omega_2 \in \vartheta(T(x_0)) \text{ tels que } \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \phi.$$
On a

$$S(x_0) \cap (X \backslash U) \subset \Omega_1 \Rightarrow \exists V_1 \in \vartheta(x_0)\ t.q.\ S(z) \cap (X \backslash U) \subset \Omega_1, \forall z \in V_1. \tag{3.7}$$

$$T(x_0) \subset \Omega_2 \Rightarrow \exists V_2 \in \vartheta(x_0)\ t.q.\ T(z) \subset \Omega_2, \forall z \in V_2. \tag{3.8}$$

D'après (3.8), on a

$$\begin{aligned}S(z) \cap (X \backslash U) \cup U \subset \Omega_1 \cup U, \forall z \in V_1 &\Rightarrow \big(S(z) \cup U\big) \cap \big((X \backslash U) \cup U\big) = S(z) \cup U\\ &\Rightarrow S(z) \cup U \subset (\Omega_1 \cup U), \forall z \in V_1\\ &\Rightarrow S(z) \subset \Omega_1 \cup U, \forall z \in V_1. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

D'après (3.7) et (3.9), pour tout $\forall z \in V_1 \cap V_2 = V \in \vartheta(x_0)$ on a
$$S(z) \cap T(z) \subset (\Omega_1 \cup U) \cap \Omega_2 \subset (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (U \cap \Omega_2) \subset U \cap \Omega_2 \subset U.$$

Donc

$$\exists V = V_1 \cap V_2 \in \vartheta(X_0), S(z) \cap T(z) \subset U, \forall z \in V.$$

D'où, $S \cap T$ est s.c.s. au point x_0

■

Théorème 3.1.6. *Soient X, Y deux espaces topologiques séparés*
On suppose $T, S : X \rightrightarrows Y$ deux multi-applications telles que T et S soient s.c.s. au point x_0. Alors

$$x \mapsto (T \cup S)(x) = T(x) \cup S(x)$$

est une multi-application s.c.s. au point x_0

Démonstration.

Soit $x_0 \in X$ et U un ouvert de X tel que : $(S(x_0) \cup T(x_0)) \subset U$ Donc, d'après la s.c.s. de S et T au point x_0 on a par définition :

$$\exists W_1 \in \vartheta(x_0) \; t.q. \; S(x) \subset U, \; \forall z \in W_1.$$
$$\exists W_2 \in \vartheta(x_0) \; t.q. \; T(x) \subset U, \; \forall z \in W_2.$$

Alors

$$\exists W = W_1 \cap W_2, \; S(x) \cup T(x) \subset U, \forall z \in W.$$

D'où, $S \cup T$ est s.c.s. au point x_0

■

Proposition 3.1.7. *Soient X et Y deux espaces topologiques vectoriels et T, S deux multi-applications de X dans Y s.c.s. au point x_0, si $S(x_0)$ et $T(x_0)$ sont compacts. Alors la multi-application défini par*

$$G : X \rightrightarrows Y$$
$$x \mapsto G(x) = S(x) + T(x)$$

est s.c.s. au point x_0.

Démonstration.

Soit Ω un ouvert de Y tq $S(x) + T(x) \subset \Omega$.

Montrons que $S(x) + T(x)$ est s.c.s. au point x_0.

Soit $x \in S(x)$ et $y \in T(x)$, alors

$$x + y \in S(x) + T(x) \subset \Omega \Rightarrow x + y \in \Omega$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \exists W^{'}_{x,y} \; \textit{un voisinage ouvert de } x \\ \exists W^{''}_{x,y} \; \textit{un voisinage ouvert de } y \end{cases} \quad \textit{et } W^{'}_{x,y} + W^{''}_{x,y} \subset \Omega$$

D'autre part

$$T(x_0) = \bigcup_{y \in T(x_0)} \{y\} \subset \bigcup_{y \in T(x_0)} W^{''}_{x,y}. \tag{3.10}$$

Comme $T(x_0)$ est compact, on peut extraire donc un sous recouvrement fini i.e.,

$$T(x_0) \subset \bigcup_{j=1}^{p} W''_{x,y}.$$

On pose

$$W'_x = \bigcup_{j=1}^{p} W'_{x,y_j}.$$

$$et$$

$$W''_x = \bigcup_{j=1}^{p} W''_{x,y_j}.$$

D'après (3.10), W'_x et W''_x vérifient

$$T(x_0) \subset W''_x, \text{ et } W'_x + W''_x \subset \Omega.$$

En effet

$$W'_x + W''_x \subset W'_{x,y_j} + \bigcup_{j=1}^{p} W''_{x,y_j} \subset \bigcup_{j=1}^{p} W'_{x,y_j} + \bigcup_{j=1}^{p} W''_{x,y_j} = \bigcup_{j=1}^{p} (W'_{x,y_j} + W''_{x,y_j}) \subset \Omega.$$

D'autre part

$$S(x_0) = \bigcup_{x \in S(x_0)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in S(x_0)} W'_x.$$

On a $S(x_0)$ est compact, on peut extraire donc un sous recouvrement fini i.e.,

$$S(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W'_{x_i} \tag{3.11}$$

On pose

$$W' = \bigcup_{i=1}^{n} W'_{x_i}.$$

$$et$$

$$W'' = \bigcap_{i=1}^{n} W''_{x_i}.$$

D'après (3.11), W' et W'' vérifient

$$S(x_0) \subset W', \ T(x_0) \subset W'', \text{ et } W' + W'' \subset \Omega.$$

On a

$$S(x_0) \subset W' \; et \; S(x_0) \; s.c.s. \; au \; point \; x_0 \Rightarrow \exists V' \in \vartheta(x), \, S(z) \subset W', \, \forall z \in V'.$$
$$T(x_0) \subset W'' \; et \; T(x_0) \; s.c.s. \; au \; point \; x_0 \Rightarrow \exists V'' \in \vartheta(x), \, T(z) \subset W'', \, \forall z \in V''.$$

Pour $V = V' + V''$ et $z \in V$ on a $S(z) \subset W'$ et $T(z) \subset W''$.
Soit $a \in S(x) + T(x)$ c'est à dire il existe $a_1 \in S(z) \in W'$ et il existe $a_2 \in T(z) \in W''$ tels que $a = a_1 + a_2$.
Alors

$$a_1 + a_2 \in W' + W'' \subset \Omega.$$

Donc

$$S(x) + T(x) \subset \Omega, \, \forall z \in V.$$

D'où, $S + T$ est s.c.s. au point x_0.

■

Proposition 3.1.8. *Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compacts et s.c.s. sur X, donc pour tout ensemble $K \subset X$ compact, l'image*

$$F(K) := \bigcup_{x \in K} F(x).$$

est compact sur Y.

Théorème 3.1.9. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compacts et s.c.s. sur X si et seulement si pour tout $x \in X$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge vers x et pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ telle que $y_n \subset F(x_n)$, il existe une sous suite (y_{n_k}) convergente de (y_n) et sa limite est dans $F(x)$. C'est à dire,*

$$\exists y \in Y \; tq \; y_{nk} \rightarrow y \; et \; y \in F(x)$$

Démonstration.

1. $\Rightarrow$) Soit F s.c.s. sur X et $(x_n) \subset X$ tq $x_n \to x$.
   $K := \{x.x_1, x_2, ...\}$ est compact et $F|_K$ est s.c.s.
   Donc d'après la **Proposition 3.1.8**, $F(K)$ est compact dans Y.
   On a F s.c.s. au point $x \in X$, donc pour tout U_1 un ouvert de X il existe $\Omega \in \vartheta(x)$ tel que $F(z) \subset U_1$, pour tout $z \in \Omega$.
   Pour $z = x_n$ on obtient
   $$F(x_n) \subset U_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$
   D'autre part, pour $y_n \in F(x_n)$ et par l'hypothèse, on a
   $$y_n \subset U_1.$$
   Par passage à la limite $y \subset U_1$. C'est contradiction
2. $\Leftarrow$) Supposons que F n'est pas s.c.s. dans X, d'après la définition
   $$\exists U \in \vartheta(F(x)), \forall V \in \vartheta(x), \exists z \in V \text{ tq } F(z) \subsetneq U$$
   D'autre part, par l'hypothèse on a $x_n \to x$, $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \notin U$, on peut extraire à (y_n) une sous suite (y_{n_k}) qui converge vers $y \in F(x)$ i.e.,
   $$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in F(x). \tag{3.12}$$
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$\begin{aligned} y_n \notin U &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \notin U \\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \notin F(x) \\ &\Rightarrow contradiction\, avec\, (3.12) \end{aligned}$$
   Donc, F est s.c.s. sur X

■

3.2 Semicontinuité inférieure des multi-applications

Définition 3.2.1. *Soit T et X deux espaces topologiques séparés et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est semicontinue inférieurement (s.c.i.) au point $t_0 \in T$ si pour tout ouvert U de X tel que $F(t_0) \cap U \neq \phi$, il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(t) \cap U \neq \phi$, $\forall t \in \Omega$. i.e., $F^{-1}(U)$ est un voisinage de t_0 .*

Remarque 3.2.1.
On dit que F est s.c.i. sur T si elle est s.c.i. en tout point $t \in T$

Corollaire 3.2.1. ***Caractérisation de la s.c.i***
Soient T et X deux espaces topologiques séparés et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-applications, la s.c.i de F est équivalente à l'une des conditions suivantes
i) $F^{-1}(V)$ est un ouvert de T pour tout V ouvert de X.
ii) $F_+^{-1}(U)$ est un fermé de T pour tout U fermé de X.
iii) $\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}\overline{(M)}$ pour tout ensemble M de X .

Démonstration.
F s.c.i. $\Rightarrow i)$
Soit V un ouvert de X. Montrons que $F^{-1}(V)$ un ouvert de T
Montrons que $F^{-1}(V)$ est un voisinage de tous ses points
Soit $t \in F^{-1}(V)$ c' est à dire $F(t) \cap V \neq \phi$ or F est s.c.i., alors

$$\begin{aligned}\exists\,\Omega \in \vartheta(t_0),\ F(t) \cap V \neq \phi,\ \forall t \in \Omega &\Rightarrow t \in F^{-1}(V),\ \forall t \in \Omega \\ &\Rightarrow \Omega \subset F^{-1}(V).\end{aligned}$$

d' où, $F^{-1}(V)$ est un voisinage de t, pour tout $t \in F^{-1}(V)$ voisinage de tout ses point
Donc

$$F^{-1}(V) \text{ est un ouvert de } T.$$

i)$\Rightarrow ii)$
Soit U un fermé de X. Montrons que $F^{-1}(U)$ est un fermé de T

$$\begin{aligned}\text{U est un fermé de X} &\Leftrightarrow X\backslash U \text{ est un ouvert de X} \\ &\Leftrightarrow F^{-1}(X\backslash U) \text{ est un ouvert de T} \\ &\Leftrightarrow T\backslash F_+^{-1}(U) \text{ est un ouvert de T} \\ &\Leftrightarrow F_+^{-1}(U)\ \text{ est un fermé de T.}\end{aligned}$$

ii)$\Rightarrow$iii)
Soit $t \in F_+^{-1}(M). Alors$

$$\begin{aligned}F(t) \subseteq M \subseteq \overline{M} &\Rightarrow F(t) \subset \overline{M} \\ &\Rightarrow t \in F_+^{-1}(\overline{M})\end{aligned}$$

Donc

$$F_+^{-1}(M) \subset F_+^{-1}(\overline{M}).$$

$\overline{M}$ est un fermé, Alors $F_+^{-1}(M)$ est un fermé de T, Alors $\overline{F_+^{-1}(M)} \subset \overline{F_+^{-1}(\overline{M})} = F_+^{-1}(\overline{M})$ d'où

$$\overline{F_+^{-1}(M)} \subset F_+^{-1}(\overline{M}).$$

iii)$\Rightarrow F$ *s.c.i.*

Soit $t_0 \in T$ et V un voisinage de t_0 tel que $F(t_0) \cap V \neq \phi$. C'est à dire $t_0 \in F^{-1}(V)$. Montrons que $F^{-1}(V)$ est un voisinage de t_0. On a

$$T \backslash F^{-1}(V) = F_+^{-1}(X \backslash V)\, et X \backslash V \text{ est un fermé.} \tag{3.13}$$

Alors

$$F_+^{-1}(X \backslash V) \text{ est un fermé}$$

ce qui entraine $\overline{F_+^{-1}(X \backslash V)} = F_+^{-1}(X \backslash V)$ d'où d'après (3.13), $T \backslash F^{-1}(V)$ est un fermé Donc $F^{-1}(V)$ est un ouvert de T, i.e., $F^{-1}(V)$ est voisinage de t_0. Alors F *s.c.i.* au point t_0.

■

Théorème 3.2.2. *Soient X et Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est s.c.i. au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset X$ telle que $x_n \to x_0$ et pour tout $y_0 \in F(x_0)$ il existe une suite $(y_n)_n \subset Y$ telle que $y_n \subset F(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ et $y_n \to y_0$.*

Démonstration.

Supposons que F est s.c.i. au point x_0. On a $x_n \to x_0$. i.e.,

$$\forall V \in \vartheta(x_0), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ x_n \in V. \tag{3.14}$$

Soit $y_0 \in F(x_0)$ et soit U un voisinage ouvert de y_0. Alors

$$F(x_0) \cap U \neq \phi.$$

Et F est s.s.i. au point x_0, d'où

$$\exists \Omega \in \vartheta(x_0), F(x) \cap U \neq \phi,\ \forall x \in \Omega \tag{3.15}$$

Comme $\Omega \in \vartheta(x_0)$ d'après (3.14), On a

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x_n \in \Omega$$

Donc par (3.15), on obtient

$$F(x_n) \cap U \neq \phi,\ \forall n \geq n_0$$

Soit mainlemant $y_n \in U \cap F(x_n)$. Alors $y_n \in F(x_n)$
et $y_n \in U$. Ainsi

$$\forall U \in \vartheta(y_0), \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \in n_0,\ y_n \in U.$$

En d'autres termes $y_n \to y_0$, quand $n \to \infty$

$\Leftarrow$) Supposons que F n' est pas s.c.i. au point $x_0 \in X$. Alors

$$\exists\, U\, ouvert\, de\, Y\, tel\, que\, F(x_0) \cap U = \phi, \tag{3.16}$$

et

$$\forall\, \Omega \in \vartheta(x_0),\ \exists\, x \in \Omega \text{ telle que } F(x) \cap U = \phi.$$

i.e. ; pour $\Omega = \mathbb{B}(x_0, \frac{1}{n})$. On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, x_n \in \mathbb{B}(x_0, \frac{1}{n}) \text{ et } F(x_n) \cap U = \phi.$$

On aura alors construit une suite $(x_n)_n \subset X$ telle que

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_0) = 0.$$

Alors

$$x_n \to x_0,\ lorsque\, n \to \infty.$$

Par contre pour tout $y_0 \in (F(x_0) \cap U)$ on peut trouver une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $y_n \in F(x_n)\, et\, y_n \to y_0$ car si au avait l' existence d'une telle suite, on aurait.

$$\forall\, W \in \vartheta(y_0),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in W,\ n > n_0,\ y_n \in W.$$

On particulier pour $W = U$

$$\forall\, U \in \vartheta(y_0),\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\, \forall\, n \in W,\ n > n_0,\ on a\, y_n \in U \text{ et } y_n \in F(x_n).$$

D'où $U \cap F(x_n) \neq \phi$. C' est un contradiction avec (3.16) F est s.c.i. au point x_0.

■

Théorème 3.2.3. *Soient T et X deux espaces topologiques séparés et $F, G : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications, et F, G sont s.c.i au point $t_0 \in T$, pour $\alpha : T \to \mathbb{R}$ une fonction continue au point $t_0 \in T$. Alors la multi-applications $t \mapsto \alpha(t)F(t) + G(t)$ est s.c.i. au point $t_0 \in T$.*

Démonstration.
Supposons Ω un ouvert de X tel que $\Big(\alpha(t_0)F(t_0) + G(t_0)\Big) \cap \Omega \neq \phi$. Alors

$$\exists\, x \in F(t_0),\ \exists\, y \in G(t_0) \text{ tel que } \alpha(t_0)x + y \in \Omega.$$

D' autres part,

$$\alpha \text{ continue} \Leftrightarrow \exists\, V \in \vartheta(t_0) \text{ tel que } \alpha(V)x + y \subset \Omega$$

Donc

$$\exists\, \Omega_1, \Omega_2 \text{ deux ouverts de } X \text{ tels que } \Omega_1 \in \vartheta(x),\ \Omega_2 \in \vartheta(y) \text{ et } \alpha(V)\Omega_1 + \Omega_2 \subset U.$$

Par suite on obtient

$$x \in \Omega_1 \ et\ x \in F(t_0),\ alors\ \Omega_1 \cap F(t_0) \neq \phi.$$

et

$$y \in \Omega_2 \ et\ y \in G(t_0),\ alors\ \Omega_2 \cap G(t_0) \neq \phi.$$

Comme F et G sont s.c.i. au point t_0, alors il existe $W_1 \in \vartheta(t_0)$ et $W_2 \in \vartheta(y)$ tels que $F(z) \cap \Omega_1 \neq \phi$ pour tout $z \in W_1$ et $G(z) \cap \Omega_2 \neq \phi$ pour tout $z \in W_2$
Soit $U = W_1 \cap W_2 \subset V$ et $F(z) \cap \Omega_1 \neq \phi$ et $G(z) \cap \Omega_2 \neq \phi$, pour tout $z \in U$
donc il existe $z_1 \in F(z) \cap \Omega_1$ et il existe $z_2 \in G(z) \cap \Omega_2$ tel que

$$\alpha(t_0)z_1 + z_2 \in \alpha(V)z_1 + z_2 \subset \alpha(V)\Omega_1 + \Omega_2 \subset \Omega.$$

Alors

$$\exists\, U \in \vartheta(t),\ (\alpha(t)F(z) + G(z)) \cap \Omega \neq \phi,\ \forall z \in U.$$

En d'autres termes

$$\alpha(t)F(z) + G(z) \text{ est s.c.i. au point } t_0.$$

■

Théorème 3.2.4. *Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et F et $G : X \rightrightarrows Y$ deux multi-aplication telles que F et G soient s.c.i. au point x_0. Alors $t \mapsto \Big(F(t) \cup G(t)\Big)$ est s.s.i. au point t_0.*

Démonstration.
Soit U un ouvert de Y tel que $F(x_0) \cap U \neq \phi$ et $G(x_0) \cap U \neq \phi$. On a

$$F \textit{ s.c.i. au point } x_0,\ \textit{alors } \exists\, \Omega_1 \in \vartheta(x_0) \textit{ tel que } F(x) \cap U \neq \phi,\ \forall\, x \in \Omega_1.$$

et

$$G \textit{ s.c.i. au point } x_0, \textit{ alors } \exists\, \Omega_2 \in \vartheta(x_0) \textit{ telle que } G(x) \cap U \neq \phi,\ \forall\, x \in \Omega_2\ .$$

Si on prend $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$. On a

$$(F(x_0) \cap U) \cup (G(x_0) \cap U) \neq \phi.$$

i.e.,

$$(F \cup G)(x_0) \cap U \neq \phi.$$

d'où, $F \cup G$ est s.c.i. au point $x_0 \in X$.

■

3.3 Semicontinuités supérieure et inférieure au sens de la distance de Hausdorff

Définition 3.3.1. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est semicontinué supérieurement au sens de Hausdorff (H-s.c.s.) au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$F(\mathbb{B}(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \varepsilon) \text{ avec } V(F(x_0), \varepsilon) = \{y \in Y, d'(y, F(x_0)) \leq \varepsilon\}$$

On dit que F est H-s.c.s. si et seulement si elle est H-s.c.s. en tout point $x \in X$.

Corollaire 3.3.1. *Soit (X, d) (Y, d') deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Si F est s.c.s. au point x_0, alors F est H-s.c.s. au point x_0 .*

Démonstration.
Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $U = int(V(F(x_0)), \varepsilon) = \{y \in Y, d'(y, F(x_0)) < \varepsilon\}$.
On a

$$\begin{aligned} \forall\, y \in F(x_0),\, d'(y, F(x_0)) = 0 < \varepsilon &\Rightarrow y \in U \\ &\Rightarrow F(x_0) \subset U. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} F\, est\, s.c.s\, au\, point\, x_0 &\Rightarrow \exists O_{x_0} \in \vartheta(x_0),\; F(x) \subset U,\, \forall x \in O_{x_0} \\ &\Rightarrow \exists \delta > 0,\; F(x) \subset U,\, \forall x \in B(x_0, \delta) \\ &\Rightarrow \exists \delta > 0,\; F\big(B(x_0, \delta)\big) \subset U \subset V\big(F(x_0 \varepsilon)\big). \end{aligned}$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } F\big(B(x_0, \varepsilon)\big) \subset U \subset V\big(F(x_0), \varepsilon\big)$$

i.e.,F est H.s.c.s. au point x_0

■

Corollaire 3.3.2. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et F :$X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
Si $F(x_0)$ est compact, on a la H-s.c.s. de F au point x_0 est équivalente à la s.c.s. au point x_0 .

Démonstration.

F est s.c.s. au point x_0. alors F H-s.c.s. au point x_0. D'après le **corollaire 3.3.1**.

Montrons que si F est H-s.c.s. au point x_0 et $F(x_0)$ compact, alors F est s.c.s. au point x_0.

Soit U un voisinage ouvert de $F(x_0)$,

$F(x_0)$ est compact, alors

$$\exists \eta > 0 \text{ t.q. } int(V(F(x_0, \eta)) \subset U.$$

En effet

$$U \text{ ouvert} \Leftrightarrow \forall y \subset U, \exists r_y > 0 \, tq \, \mathbb{B}(y, r_y) \subset U.$$

Soit $\eta > 0$

$$\begin{aligned} y \in int(V(F(x_0, \eta)) &\Rightarrow d(y, F(x_0)) < \eta \\ &\Rightarrow \inf_{z \in F(x_0)} d(y, z) < \eta. \end{aligned}$$

i.e.,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists z_n \in F(x_{x_0}) \, t.q. \, , d(y, z_n) < \frac{1}{n} + \eta. \tag{3.17}$$

D'autre part, $(z_n)_n \subset F(x_0)$ et $F(x_0)$ compact, donc on peut extraire une sons suite $(z_{n_k})_{k>0}$ qui converge vers $z_0 \in F(x_0)$. D'où,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n_k > n_0, d(z_{n_k}, z_0) < \frac{1}{n_k} \tag{3.18}$$

On a d'après (3.17) et (3.18) on a il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\begin{aligned} d(y, z_0) &< d(y, z_{n_k}) + d(z_{n_k}, z_0) \\ &< \frac{1}{n_k} + \eta + \frac{1}{n_k}. \end{aligned}$$

Alors par passage à la limite

$$d(y, z_0) < \eta \Rightarrow y \in \mathbb{B}(z_0, \eta).$$

Aussi

$$z_0 \in F(x_0) \subset U \Rightarrow \exists r_0 > 0, \mathbb{B}(z_0, r_0) \subset U.$$

Il suffit alors de prend $\eta = r_0$ on obtient $y \in \mathbb{B}(z_0, \eta) \subset U$.

Donc

$$\exists \eta > 0,\ int(V(F(x_0,\eta))) \subset U\ .$$

D'autre part

$$\begin{aligned} y \in V(F(x_0),\varepsilon) &\Rightarrow d(y,F(x_0)) \leq \varepsilon < \eta \\ &\Rightarrow y \in int\big(V(F(x_0),\eta)\big). \end{aligned}$$

D'où,

$$\forall \varepsilon \in]0,\eta[,\ V(F(x_0,\varepsilon)) \subset int(V(F(x_0,\eta))) \subset U.$$

Comme F est H-s.c.s. au point x_0, donc

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } F(B(x_0,\delta)) \subset V(F(x_0,\varepsilon)) \subset U.$$

Par conséquent

$$\forall U \in \vartheta(F(x_0)),\ \exists \Omega = \mathbb{B}(x_0,\delta) \in \vartheta(x_0),\ F(x) \subset U,\ \forall x \in \Omega.$$

D'où F est s.c.s. au point x_0.

■

Définition 3.3.2. *Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-applicaton, on dit que F est semicontinue inférieurement au sens de Hausdorff (H-s.c.i.) au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $F(x_0) \subset V(F(x),\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{B}(x_0,\delta)$.*

Corollaire 3.3.3. *Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, si F est H.s.c.i. au point x_0, alors F est s.c.i. au point x_0.*

Démonstration.

Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques

Supposons que F est H-s.c.i. au point x_0 et qu'elle n'est pas s.c.i. au point x_0, alors

$$\exists U \textit{ ouvert de } Y \textit{ t.q. } F(x_0) \cap U \neq \phi,\ \forall \Omega \in \vartheta(x),\ \exists y \in \Omega,\ F(y) \cap U = \phi. \tag{3.19}$$

C'est à dire, pour $\Omega = \mathbb{B}(x_0,\dfrac{1}{n})$

$$\exists U \textit{ ouvert de } Y \textit{ tq } F(x_0) \cap U \neq \phi,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists y_n \in \mathbb{B}(x_0,\frac{1}{n}),\ F(y_n) \cap U = \phi.$$

D'autre part,

$$F \text{ est H-s.c.i. au point } x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ F(x_0) \subset V\big(F(x), \varepsilon\big),\ \forall x \in \mathbb{B}(x_0, \delta).$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall n \geq n_0,\ ona \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow \mathbb{B}(x_0, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{B}(x_0, \delta).$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 :\ F(x_0) \subset int\big(V(F(y_n, \varepsilon))\big) \text{ comme } F(x_0) \cap U \neq \phi.$$

il existe alors

$$z \in F(x_0) \cap U \Rightarrow z \in F(x_0) \text{ et } z \in U.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} z \in F(x_0) &\Rightarrow z \in int\big(V(F(y_n), \varepsilon)\big) \\ &\Rightarrow d\big(z, F(y_n)\big) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \inf_{z' \in F(y_n)} d(z, z') < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists z_k \in F(y_n)\ t.q.\ d(z, z_k) < \frac{1}{k} + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0. \tag{3.20}$$

Pour k assez grand

$$d(z, z_k) < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$

D' où pour ε très petit

$$d(z, z_k) = 0 \Rightarrow z = z_k \text{ pore k très grand.}$$

Alors d'après (3.20)

$$z \in F(y_n)\ et\ z \in U \Rightarrow z \in F(y_n) \cap U.$$

Contradiction avec $F(y_n) \cap U = \phi$.
Par conséquent, F est s.c.i. au point x_0.

■

Corollaire 3.3.4. *Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, si $F(x_0)$ est compact, alors F H-s.c.i. au point x_0 si et seulement si F s.c.i. au point x_0*

Démonstration.
D'après le **corollaire 3.3.3**, on a F H-s.c.i. alors F est s.c.i.
supposons que F est s.c.i. et montres que F est H-s.c.i au point x_0. Soit

$$F(x_0) = \bigcup_{y \in F(x_0)} \{y\} \subset \bigcup_{y \in F(x_0)} \mathbb{B}(y, \frac{1}{2}\varepsilon).$$

D' où $\left(\mathbb{B}(y, \frac{1}{2}\varepsilon)\right)_{y \in F(x_0)}$ est un recouvrement ouvert de $F(x_0)$.
Comme $F(x_0)$ est compact, on peut extraire une sous-recouvrement fini de $F(x_0)$.
D' où

$$F(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon).$$

Donc

$$F(x_0) \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon)\right) \neq \phi \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} \left(F(x_0) \bigcap \mathbb{B}(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon)\right) \neq \phi.$$

or F s.c.i. au point x_0, alors

$$\exists V \in \vartheta(x_0),\ F(x) \cap \mathbb{B}(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \neq \phi,\ \forall x \in V,\ \forall i = \overline{1,m}.$$

i.e.,

$$\exists \delta_i > 0,\ F(x) \cap \mathbb{B}(yi, \frac{1}{2}\varepsilon) \neq \phi,\ \forall x \in \mathbb{B}(x_0, \delta_i),\ \forall i = \overline{1,m}.$$

Soit $S = \inf_{i=\overline{1,m}} \delta_i$, alors pour tout $x \in \mathbb{B}(x_0, \delta)$ on a $x \in \mathbb{B}(x_0, \delta_i)$.
D' où

$$F(x) \cap \mathbb{B}(y_i \frac{1}{2}\varepsilon) \neq \phi,\ \forall x \in \mathbb{B}(x_0, \delta). \tag{3.21}$$

De (3.21) on trouve $\forall x \in \mathbb{B}(x_0, \delta)$.

$$\begin{aligned} \exists z \in F(x) \cap \mathbb{B}(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) &\Rightarrow z \in F(x) \textit{ et } d(z, y_i) < \frac{1}{2}\varepsilon \\ &\Rightarrow \mathbb{B}(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \subset int\big(V(F(x), \varepsilon)\big), \; \forall i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Car

$$t \in \mathbb{B}(y, \frac{1}{2}\varepsilon) \Rightarrow d(t, y) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Et

$$\begin{aligned} d(t, z) \leq d(t, y_i) + d(y_i, z) &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \\ &\Rightarrow d(t, z) < \varepsilon \\ &\Rightarrow t \in int\big(V(F(x), \varepsilon)\big). \end{aligned}$$

Par suite

$$F(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \subset int\big(V(F(x_0, \varepsilon)\big) \subset V\big(F(x), \varepsilon\big), \; \forall x \in \mathbb{B}(x_0, \delta).$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0, \; F(x_0) \subset V(F(x), \varepsilon), \; \forall x \in \mathbb{B}(x_0, \delta).$$

Par conséquent, F est H-s.c.i. au point x_0.

■

Corollaire 3.3.5. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-applications à valeurs fermées, alors F est H-s.c.s. au point x_0 si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x_0, nous avons On a :*

$$\lim_{n\to\infty} e(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

Démonstration.

$\Rightarrow$)Supposons que F est H-s.c.s. au point x_0 et montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} e(F(x_n, F(x_0))) = 0$. F est H-s.c.s. au point x_0 i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0, \; F(\mathbb{B}(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0, \varepsilon))). \tag{3.22}$$

Soit $(x_n)_n$ une suite de points de X telle que $x_n \longrightarrow x_0$, donc

$$\forall \zeta > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n > n_0, x_n \in \mathbb{B}(x_0, \zeta).$$

En particulier pour $\zeta = \delta$, on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ x_n \in \mathbb{B}(x_0, \delta).$$

D'après (3.22) on a

$$F(x_n) \subset v\big(F(x_0), \varepsilon\big),\ \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow e(F(x_n), F(x_0)) \leqslant \varepsilon,\ \forall n \geqslant n_0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} e(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

$\Leftarrow$) Supposons que F n'est pas H.s.c.s. au point x_0. i.e.,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ F(\mathbb{B}(x_0), \delta) \nsubseteq V(F(x_0), \varepsilon)\ .$$

Alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n > 0,\ F(\mathbb{B}(x_0), \frac{1}{n}) \nsubseteq V(F(x_0), \varepsilon).$$

Ce qui entraine

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n > 0,\ \exists x_n \in \mathbb{B}(x_0, \frac{1}{n})\ et\ F(x_n) \nsubseteq V(F(x_0), \varepsilon)\ .$$

donc il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ telle que

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ et } F(x_n) \nsubseteq v(F(x_0), \varepsilon),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi

$$x_n \to x_0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} e(F(x_n), F(x_0)) \neq 0.$$

Contradictions avec l'hypothèse. Alors F est H-s.c.s. au point x_0

■

Corollaire 3.3.6. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques$F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées, alors F est H-s.c.i. au point x_0 si et seulement si Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $x_n \to x_0$*
On a

$$\lim_{n\to\infty} e(F(x_0), F(x_n)) = 0 \ .$$

Démonstration.

$\Rightarrow$) Supposons que F H-s.c.i. au point x_0. Montrerons que $\lim_{n\to\infty} e(F(x_0), F(x_n)) = 0$.
F est H-s.c.i. au point x_0 i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ \delta > 0, \ F(x_0) \subset V(F(x), \varepsilon), \ \forall x \in \mathbb{B}(x_0, \delta).$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites de X telle que $x_n \to x_0$. D'où

$$\forall \zeta > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in \mathbb{B}(x_0, \zeta).$$

En particulier pour $\zeta = \delta$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in \mathbb{B}(x_0), \delta).$$

On a

$$\begin{aligned} x_n \in \mathbb{B}(x_0, \delta) &\Rightarrow F(x_n) \subset V(F(x_0), \varepsilon), \ \forall n \geqslant n_0 \\ &\Rightarrow e(F(x_0), F(x_n)) \leqslant \varepsilon, \ \forall n \geqslant n_0 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (e(F(x_0), F(x_n)) = 0. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Supposons que F n'est pas H.s.c.i. au point x_0. i.e.,

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall \delta > 0, \ \exists x \in \mathbb{B}(x_0, \delta), \ F(x_0) \subsetneq V(F(x), \varepsilon), \ \textit{cequi est equivelent} \ \exists \varepsilon > 0, \ \forall \ n \in \mathbb{N}^*, \ \exists x_0 \in \mathbb{B}(x_0, \frac{1}{n}), \ F(x_0) \nsubseteq V(F(x_n), \varepsilon)$$

On a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ et $x_n \to x_0$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \end{aligned}$$

Et

$$F(x_0) \nsubseteq V(F(x_n), \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e(F(x_0), F(x_n)) \neq 0.$$

D'où, la contradiction avec l'hypothèse, Alors F est H-s.c.i. au point x_0.

■

Définition 3.3.3. *Soit F une multi-application de (X, d) dans (Y, d'), on dit que F H-continue au point x_0 si F est H-s.c.s. et H-s.c.i. au point x_0.*

Corollaire 3.3.7. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeur fermées alors F est H-continue si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergeant vers x_0, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} h(F(x_0), F(x_n)) = 0.$$

Démonstration.
On a F est H-continue, donc F H-s.c.s. et H-s.c.i. C'est à dire ;

$$\lim_{n\to\infty} e(F(x_n), F(x_0)) = 0,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} e\big(F(x_0), F(x_n)\big) = 0.$$

Comme

$$h(F(x_n), F(x_0)) = \max\Big(e\big(F(x_0), F(x_n)\big), e\big(F(x_n), F(x_0)\big)\Big).$$

Alors, d'après la définition de la distance de Housdorff

$$h\big(F(x_n), F(x_0)\big) = \lim_{n\to\infty} \max\big(e(F(x_0), F(x_n), e(F(x_n), F(x_0))\big) = 0.$$

■

3.4 Semicontinuité extérieure des multi-applications

Définition 3.4.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, et $F : X \rightrightarrows Y$ est une multi-application. F est semicontinue extérieurement au point $x_0 \in X$ si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ convergent vers x_0 pour toute suite $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \subset X$. on a*

$$\limsup_{\lambda} F(x_\lambda) \subset F(x_0).$$

Lemme 3.4.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques séparés et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, les assertions suivantes sont équivalentes*

a) F est s.c.e. au point x_0.

b) $F(x_0)$ est fermé et $FracF(x_0) \subset F(x_0)$.

c) Pour $y_0 \in Y \backslash F(x_0)$, il existe un voisinage W de x_0 et un voisinage V de y_0 tels que $F(W) \cap V = \phi$.

avec

$$FracF(x_0) = \bigcap \{\overline{F(W) \setminus F(x_0)},\, W \in \vartheta(x_0)\}.$$

Démonstration.

1. *a)* $\Rightarrow$ *b)*

   (a) Supposons que F est s.c.e. au point x_0. D'après la **définition 3.4.1** on a

   $$\forall (x_\lambda)_{\lambda \in \Delta} \subset X,\ x_\lambda \to x_0$$

   Si on prend $x_\lambda = x_0$, on obtient

   $$\underset{n}{limSup} F(x_\lambda) \subseteq F(x_0).$$

   Donc $F(x_0)$ est fermé.

   (b) Soit

   $$\begin{aligned} y_0 \in FracF(x_0) &\Leftrightarrow \forall W \in \vartheta(x_0),\, y_0 \in \overline{F(W) \backslash F(x_0)} \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \vartheta(y_0),\, \exists x_{V,W} \in W \ t.q.\ F(x_{V,W}) \cap V = \phi. \end{aligned}$$

   La relation "inclusion" (décroissante) défini sur les ensembles $\vartheta(x_0)$, et $\vartheta(y_0)$ est une relation d'ordre partielle, donc par induction l'ensemble prodiut $\vartheta(x_0) \times \vartheta(y_0)$ est aussi partiellement ordonné. Alors la famille

   $$\begin{aligned} \vartheta(x_0) \times \vartheta(y_0) &\longrightarrow W \subset X \\ (W, V) &\longmapsto x_{W,V}. \end{aligned}$$

   est convergente vers x_0. Et par la s.c.e. de F

$$y_0 \in \liminf_n F(x_{W,V}) \subset \limsup_n F(x_{W,V}) \subset F(x_0).$$

2. $b) \Rightarrow c)$

   Soit $y_0 \in Y \backslash F(x_0)$ d'après b)

   $$y_0 \notin FracF(x_0) \text{ et } \exists W \in \vartheta(x_0)\ t.q.\ y_0 \notin \overline{F(W) \backslash F(x_0)}.$$

   Donc

   $$\exists V_0 \in \vartheta(y_0)\ t.q.\ V_0 \cap (F(W) \backslash F(x_0)) = \phi.$$

   Comme $F(x_0)$ est fermé, alors $V = V_0 \cap (Y \backslash F(x_0))$ est un voisinage de y_0.

   On a $F(W) \cap V = \phi$, d'où

   $$\forall y_0 \in Y \backslash F(x_0),\ \exists W \in \vartheta(x_0),\ \exists V \in \vartheta(y_0)\ t.q.\ F(W) \cap V = \phi.$$

3. $c) \Rightarrow a)$

   On suppose $(x_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ est une suite dans X qui converge vers x_0, alors

   $$\exists \lambda_0 \in \Delta,\ \forall \lambda \geq \lambda_0,\ x_\lambda \in W. \tag{3.23}$$

   Soit $y_0 \in Y \backslash F(x_0)$, d'après c)

   $$\exists W \in \vartheta(x_0),\ \exists V \in \vartheta(y_0)\ t.q.\ F(W) \cap V = \phi. \tag{3.24}$$

   Remplaçant (3.23) dans (3.24), on trouve

   $$\exists \lambda_0 \in \Delta,\ \forall \lambda \geq \lambda_0,\ F(x_\lambda) \cap V = \phi.$$

   Donc

   $$y_0 \notin \limsup_n F(x_\lambda)\ et\ \lim_{\lambda \to +\infty} \sup F(x_\lambda) \subset F(x_0).$$

   Alors F est s.c.e. au point x_0.

■

3.5 La relation entre la semicontinuité supérieure et la semicontinuité extérieure

Proposition 3.5.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques séparés et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application*

Si F est s.c.e. au point x_0, s'il existe un voisinage W_0 de x_0 tel que $\overline{F(W_0)}$ est compact, alors F est s.c.s. au point x_0.

Démonstration.

Soit $K = \overline{F(W_0)}$ et soit V un voisinage ouvert de $F(x_0)$.

1. Si $K \subset V$ c'est à dire $\overline{F(x_0)} \subset V$. évident

2. Si $K \subsetneq V$
   Supposons $K^{'} = K \backslash V$ un ensemble non vide compact.
   D'après le **lemme 3.4.1**, on a
   $$\forall y \in K^{'}, \exists W_y \in \vartheta(x_0)\ et\ V_y \in \vartheta(y)\ t.q.\ F(W_y) \cap V_y = \phi.$$
   Soit $y_i \in K^{'}$, $\forall i = \overline{1,n}$, alors
   $$\exists W_{y_i} \in \vartheta(x_0)\ et\ V_{y_i} \in \vartheta(y_i)\ tq\ F(W_{y_i}) \cap V_{y_i} = \phi. \tag{3.25}$$
   On a K' est compact, donc on peut extraire un sous-recouvrement fini $(V_{y_0}))_{i=\overline{1,n}}$ tel que $K^{'} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$.
   Posons
   $$W \equiv W_0 \cap W_{y_1} \cap ... \cap W_{y_n} \in \vartheta(x_0).$$
   On a
   $$F(W) = F(W_0 \cap W_{y_1} \cap ... \cap W_{y_n}) = \bigcap_{i=0}^{n} F(W_i) \subset F(W_0) \subset V.$$
   Donc
   $$\exists W \in \vartheta(x_0)\ t.q.\ F(W) \subset V.$$

D'où F est s.c.s. au point x_0.

■

Proposition 3.5.2. *Soient X, Y deux espace topologiques séparés , et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
Supposons que F est s.c.s. au point $x_0 \in X$ et $F(x_0)$ est fermé.

1. *Si Y est régulier, alors F est s.c.e. au point x_0.*
2. *Si X et Y sont à base de voisinages dénombrables, alors F est s.c.e. au point x_0.*

Démonstration.

1. Soit $y \in \complement_Y^{F(x_0)}$ et B un voisinage fermé de y tel que $B \cap F(x_0) = \phi$.
   F est s.c.s. au point $x_0 \in X$, alors il existe un voisinage W de x tel que $F(W) \subset U$ pour tout U ouvert de Y.
   Posons $U = \complement_Y^B$ un ouvert, on a $F(W) \subset \complement_Y^B$.
   Par conséquent, $F(W) \cap int(B) = \phi$.
   Donc, d'après le lemme 3.4.1 F est s.c.e. au point x_0.

2. Supposons que F n'est pas s.c.e. au point x_0, donc
$$\exists y_0 \in \complement_Y^{F(x_0)},\ \forall W \in \vartheta(x_0),\ \forall V \in \vartheta(y_0),\ F(W) \cap V \neq \phi.$$
Soit $\{W_n,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ et $\{V_n,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ deux bases localement dénombrables des points x_0 et y_0 respectivement, vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{Z}_+,\ W_n \supset W_{n+1},\ V_n \supset V_{n+1} \text{ et } V_n \cap F(x_0) = \phi.$$
Pour $n \in \mathbb{Z}_+$, on peut choisi $x_n \in W_n$ tel que $F(x_n) \cap V_n \neq \phi$.
Ainsi, on peut choisi $y_n \in F(x_n) \cap V_n$.
Soit $U = \{y_n, n = 0, 1, ...\}^c$ qui est d'après la convergence de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ vers y_0 est un ensemble ouvert de Y.
On a $F(x_0) \subset U$, $\forall n \in \mathbb{N}$, d'où $F(x_n) \subsetneq V$ qui est en contradiction avec la s.c.s. de F au point x_0 .

■

Bibliographie

[1] **J.P.Aubin and A.Cellina**, *Différential inclisions Set-Valued maps and Viability*, theory.Springer-Verlag,Berlin(1984).

[2] **D.Azzam-Laouir**, *Polycopie, cours d'analyse multivoque.***Laboratoire de Mathématique Pures et Appliquées,Université Mohamed Seddik Ben Yahia. De Jijel(2008)**.

[3] **G.Beer**, *Topologies on closed and closed convex Sets*, **Kluwer Academic Publishers (1993).** *DORDRECHT/BOSTON/LONDON.*

[4] **G.Christol and A.Cot and C-Michel Marle**, *Topologie*, **Edition marketing S.A (1997)**

[5] **M-Kisielewicz**, *Differential inclusions and optimal control.* **Klower Academic Publishers,(1991).**

[6] **R.T. Rockafellar and R-J-B.Wets**, *Variational analysis,Springer-Verlag,Berlin(1998).*